

MÉMOIRES

DE

L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES

DE

SAINT-PÉTERSBOURG.

VIIE SÉRIE.

TOME XXXI.

(Avec 44 planches.)



SAINT-PÉTERSBOURG, 1883.

Commissionnaires de l'Académie Impériale des sciences:

à St.-Pétersbourg: MM. Eggers et Cie et J. Glasounof; à Riga: M. N. Kymmel; à Leipzig: Voss' Sortiment (G. Haessel).

Prix: 10 Roubl. 30 Cop. = 34 Mk. 20 Pf.

Imprimé par ordre de l'Académie Impériale des Sciences.
Décembre, 1883. C. Vessélofsky, Secrétaire perpétuel.

Imprimerie de l'Académie Impériale des sciences.
(Vass.-Ostr. 9e ligne, № 12.)

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME XXXI.

№ 8.

Die kreisförmige Nutation und das Winden der Stengel. Von Prof. Dr. **I. Baranetzki.** 73 pages.

№ 9.

L'aberration des étoiles fixes. Par **Magnus Nyrén.** 47 pages.

№ 10.

Ueber die Wechselwirkung zweier Magnete mit Berücksichtigung ihrer Querdimensionen. Von **O. Chwolson.** 20 pages.

№ 11.

Sur la généralisation des fonctions de Jacques Bernoulli. Par **B. Imschenetzky.** 58 pages.

№ 12.

Die Beobachtung der electrischen Ströme der Erde in kürzeren Linien. Von **H. Wild,** (Mit 1 Tafel.) 24 pages.

№ 13.

Die Pflanzenreste der Steinkohlenformation am östlichen Abhange des Ural-Gebirges. Von **J. Schmalhausen.** (Mit 4 Tafeln.) 20 pages.

№ 14.

Untersuchungen über das zweite Spectrum des Wasserstoffs. Zweite Abhandlung. Von Dr. **B. Hasselberg.** (Mit 2 Tafeln.) 30 pages.

№ 15.

Allgemeine Jupiterstörungen des Encke'schen Cometen für den Bahntheil zwischen 152° 21′ 7,″62 und 170° wahrer Anomalie. Von **Theodor Wittram.** 48 pages.

№ 16 ET DERNIER.

Russische Caledonit- und Linarit-Krystalle. Von **P. W. Jereméjew.** 22 pages.

1:1-16→

MÉMOIRES
DE
L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES DE ST.-PÉTERSBOURG, VIIE SERIE.
Tome XXXI, N° 1.

ZUR THEORIE

DER TALBOT'SCHEN LINIEN.

VON

Hermann Struve.

(Lu le 1 février 1883.)

St.-PÉTERSBOURG, 1883.

Commissionnaires de l'Académie Impériale des sciences:

à St.-Pétersbourg: MM. Eggers et Cie et J. Glasounof;

à Riga: M. N. Kymmel;

à Leipzig: Voss' Sortiment (G. Haessel).

Prix: 15 Kop. = 50 Pf.

MÉMOIRES
DE
L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES DE ST.-PÉTERSBOURG, VIIE SERIE.
TOME XXXI, N° 1.

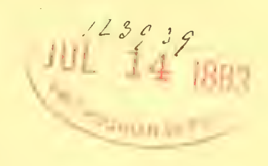
ZUR THEORIE

DER TALBOT'SCHEN LINIEN.

VON

Hermann Struve.

(*Lu le 1 février 1883.*)





ST.-PÉTERSBOURG, 1883.

Commissionnaires de l'Académie Impériale des sciences:

à St.-Pétersbourg: MM. Eggers et Cie et J. Glasounof; à Riga: M. N. Kymmel; à Leipzig: Voss' Sortiment (G. Haessel).

Prix: 15 Kop. = 50 Pf.

Imprimé par ordre de l'Académie Impériale des sciences.

Février 1883. C. Vessélofski, Secrétaire perpétuel.

Imprimerie de l'Académie Impériale des sciences
(Vass.-Ostr., 9 ligne, № 12.)

Die Erklärung der Talbot'schen Linien erfordert bekanntlich den Nachweis, dass diese Linien nur entstehen können, wenn man, ein Spectrum im Fernrohr betrachtend, ein dünnes durchsichtiges Blättchen von der violetten Seite her zwischen Ocular und Pupille bis zur Hälfte vorschiebt, dass sie aber nicht auftreten, wenn das Blättchen von der rothen Seite aus vorgeschoben wird.

Airy erklärte dies eigenthümliche Verhalten durch die Beugung des Lichts am Rande der Pupille und es gelang ihm für den einfacheren Fall, wo der kreisförmige Pupillenrand durch einen geradlinigen Spalt ersetzt gedacht wird, den strengen Beweis dafür zu liefern[1]). Später wurde dieser Beweis in einigen Theilen von Esselbach vervollständigt, welcher die Talbot'schen Streifen zur absoluten Messung der Wellenlängen benutzte[2]).

In der That lässt sich leicht einsehen, dass die Beugung des Lichts am Rande einer feinen Oeffnung für das Zustandekommen der Talbot'schen Linien eine nothwendige Voraussetzung ist, — wofern nämlich das Spectrum scharf eingestellt ist und man es demnach mit einer Fraunhofer'schen Beugungserscheinung zu thun hat, welchen Fall wir hier allein in Betracht ziehen wollen. Auch ist anzunehmen, dass die für einen Spalt abgeleiteten Gesetze näherungsweise für eine kreisförmige Oeffnung gelten werden. Es scheint aber bisher nicht versucht worden zu sein, dieses Problem unter der Annahme einer solchen Oeffnung streng zu behandeln, und doch ist diese Untersuchung nicht ohne einiges Interesse, einestheils weil sie (unter einer gewissen Einschränkung allerdings) fast ebenso einfach ist wie diejenige für eine spaltförmige Oeffnung und ebenfalls zu geschlossenen Ausdrücken führt, namentlich aber weil sie einen Einblick gewährt in eine gewisse Klasse bestimmter Integrale, welche bisher meines Wissens noch nicht zur Kenntniss gelangt sind.

---

1) Airy, Pogg. Ann. Bd. 53, pag. 459 und Bd. 58, pag. 535.

2) Esselbach, Pogg. Ann. Bd. 98, pag. 513. Ausserdem wäre noch anzuführen: Dvořák, Pogg. Ann. Bd. 147, pag. 604 und Bd. 150, pag. 399.

1. Wir haben zunächst die Fraunhofer'sche Beugungserscheinung für einen Lichtpunkt und eine kreisförmige Objectivöffnung (Pupille), die zur Hälfte mit einer planparallelen durchsichtigen Lamelle bedeckt ist, darzustellen. Die Ebene der Oeffnung sei die Coordinatenebene xy, der Anfangspunkt der Coordinaten im Mittelpunkt des Kreises; die Begrenzungslinie der Lamelle sei die x-Axe und die y-Axe werde positiv in der Richtung von der bedeckten zur unbedeckten Kreishälfte gerechnet.

In der Focalebene des Objectivs (Retina) werde ferner ein paralleles Axenkreuz angenommen, dessen Anfangspunkt in der optischen Axe liegt und es mögen

ξ_1, η_1 die Coordinaten des geometrischen Bildpunkts
ξ, η die Coordinaten eines beliebigen Punkts P

in der Focalebene des Objectivs bedeuten, die Brennweite desselben gleich 1 gesetzt.

Endlich sei R der Radius der Objectivöffnung (Pupille) und δ die Phasendifferenz der durch die bedeckte Hälfte gegangenen Strahlen.

Alsdann ergiebt sich die Intensität des Punkts P aus folgendem Ausdruck:

$$J = (C_1 + C_2)^2 + (S_1 + S_2)^2$$

$$C_1 = \iint \cos\left\{\frac{2\pi}{\lambda}(\xi - \xi_1)x + \frac{2\pi}{\lambda}(\eta - \eta_1)y\right\} dxdy$$

$$S_1 = \iint \sin\left\{\frac{2\pi}{\lambda}(\xi - \xi_1)x + \frac{2\pi}{\lambda}(\eta - \eta_1)y\right\} dxdy$$

$$C_2 = \iint \cos\left\{\frac{2\pi}{\lambda}(\xi - \xi_1)x + \frac{2\pi}{\lambda}(\eta - \eta_1)y - \delta\right\} dxdy$$

$$S_2 = \iint \sin\left\{\frac{2\pi}{\lambda}(\xi - \xi_1)x + \frac{2\pi}{\lambda}(\eta - \eta_1)y - \delta\right\} dxdy$$

wo C_1 und S_1 über alle Elemente der unbedeckten Kreishälfte, C_2 und S_2 über alle Elemente der bedeckten Hälfte zu integriren sind.

Führen wir Polarcoordinaten ein, indem wir

$$x = \frac{R}{z} r \cos\omega \qquad \frac{2\pi}{\lambda} R(\xi - \xi_1) = z\cos\omega_1$$

$$y = \frac{R}{z} r \sin\omega \qquad \frac{2\pi}{\lambda} R(\eta - \eta_1) = z\sin\omega_1$$

setzen, und berücksichtigen, dass

$$\int_0^\pi \cos[r\cos(\omega - \omega_1)]\,d\omega = \int_{-\omega_1}^{\pi-\omega_1} \cos(r\cos\omega)\,d\omega = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(r\cos\omega)\,d\omega$$

$$\int_0^\pi \sin[r\cos(\omega - \omega_1)]\,d\omega = \int_{-\omega_1}^{\pi-\omega_1} \sin(r\cos\omega)\,d\omega = 2\int_0^{\omega_1} \sin(r\cos\omega)\,d\omega$$

so wird:

$$C_1 = 2\,\frac{R^2}{z^2}\int_0^z r\,dr\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(r\cos\omega)\,d\omega$$

$$S_1 = 2\,\frac{R^2}{z^2}\int_0^z r\,dr\int_0^{\omega_1}\sin(r\cos\omega)\,d\omega$$

ferner

$$C_2 = +\,C_1\cos\delta - S_1\sin\delta$$

$$S_2 = -\,C_1\sin\delta - S_1\cos\delta$$

und damit

$$J = 4\left(C_1\cos\frac{\delta}{2} - S_1\sin\frac{\delta}{2}\right)^2$$

Bemerkenswerth ist, dass dieser Ausdruck ein vollständiges Quadrat darstellt und dies gilt nicht nur für eine kreisförmige Begrenzung, sondern auch für jede andere Oeffnung, so lange man nur annimmt, dass die Begrenzungslinie der Lamelle die Oeffnung in zwei symmetrische Hälften theilt. Würden ferner die beiden Kreishälften nicht direct in einer mathematischen Linie aneinandergrenzen, sondern, wie das in Wirklichkeit immer der Fall sein wird, durch einen kleinen dunklen Zwischenraum von der Breite e von einander getrennt sein, so hätte man, um auch dies zu berücksichtigen, an Stelle von δ allgemeiner $\delta + e\,\frac{z}{R}\sin\omega_1$ zu setzen, während im Uebrigen die obige Formel unverändert bliebe.

Liegen insbesondere der geometrische Bildpunkt, sowie der Punkt P in der Axe η, so ist $\xi = \xi_1 = 0$ und $\omega_1 = \frac{\pi}{2}$. Folglich, wenn man die Bezeichnungen

$$J_0(z) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(z\cos\omega)\,d\omega \qquad z\,J_1(z) = \int_0^z z\,J_0(z)\,dz$$

$$H_0(z) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(z\cos\omega)\,d\omega \qquad z\,H_1(z) = \int_0^z z\,H_0(z)\,dz$$

einführt:

$$J = \frac{4\pi^2R^4}{z^2}\left(J_1(z)\cos\frac{\delta}{2} - H_1(z)\sin\frac{\delta}{2}\right)^2$$

wo

$$z = \frac{2\pi}{\lambda}\,R\,(\eta - \eta_1)$$

$J_1(z)$ ist die Bessel'sche Function ersten Ranges, welche bekanntlich auf die beiden folgenden Formen gebracht werden kann:

$$J_1(z) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(z \sin\omega)\sin\omega\, d\omega = \frac{2}{\pi} z \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(z\sin\omega)\cos^2\omega\, d\omega$$

In ähnlicher Weise lässt sich auch die entsprechende H-Function umformen. Durch zweimalige Differentiation von $H_0(z)$ ergiebt sich nämlich zunächst die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 H_0(z)}{\partial z^2} + \frac{1}{z}\frac{\partial H_0(z)}{\partial z} + H_0(z) = \frac{2}{\pi z}$$

oder

$$z H_0(z) = \frac{2}{\pi} - \frac{\partial\left(z\frac{\partial H_0(z)}{\partial z}\right)}{\partial z}$$

und daraus nach der Definition

$$H_1(z) = \frac{2}{\pi}\left(1 - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(z\cos\omega)\cos\omega\, d\omega\right)$$

$$= \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\left(\frac{z\cos\omega}{2}\right)\cos\omega\, d\omega = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\left(\frac{z\sin\omega}{2}\right)\sin\omega\, d\omega$$

Eine zweite Integraldarstellung ergiebt sich hieraus, wenn man den Fourier'schen Satz

$$f(z) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \sin(\alpha z)\, d\alpha \int_0^{\infty} f(\lambda)\sin(\alpha\lambda)\, d\lambda$$

auf die Function $f(z) = \frac{H_1(z)}{z}$ anwendet, welche offenbar ungerade ist, worauf man auch im weiterhin Folgenden Rücksicht zu nehmen hat. Durch Vertauschung der Integrationsordnung folgt nämlich aus demselben

$$\frac{H_1(z)}{z} = \frac{8}{\pi^2}\int_0^{\infty} \sin\alpha z\, d\alpha \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\omega\, d\omega \int_0^{\infty} \frac{\sin\alpha\lambda\cdot\sin^2\left(\frac{\lambda\sin\omega}{2}\right)}{\lambda}\, d\lambda$$

oder weil

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha\lambda \cdot \sin^2\left(\frac{\lambda \sin \omega}{2}\right)}{\lambda}\, d\lambda = \begin{cases} \frac{\pi}{4} \text{ wenn } \sin\omega > \alpha \\ 0 \text{ wenn } \sin\omega < \alpha \end{cases}$$

$$\frac{H_1(z)}{z} = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \sin \alpha z\, d\alpha \int_{\operatorname{arc} \sin \alpha}^{\frac{\pi}{2}} \sin \omega\, d\omega = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \sin \alpha z \cdot \sqrt{1 - \alpha^2}\, d\alpha$$

und daher schliesslich:

$$H_1(z) = \frac{2}{\pi} z \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(z \sin\omega) \cos^2\omega\, d\omega$$

Beiläufig sei noch erwähnt, dass man auf dem nämlichen Wege von der *ersten* Form für $J_1(z)$ zur *zweiten* gelangen kann. Auch lassen sich nach dieser Methode die Fundamentaleigenschaften der Bessel'schen Functionen

$$\frac{2n}{z} J_n(z) = J_{n-1}(z) + J_{n+1}(z)$$

$$2 \frac{\partial J_n(z)}{\partial z} = J_{n-1}(z) - J_{n+1}(z)$$

sehr einfach ableiten.

---

2. Es möge nun an Stelle eines Lichtpunkts eine ununterbrochene Reihe unabhängig von einander leuchtender Punkte vorhanden sein, deren geometrische Bilder sämmtlich auf der η-Axe liegen. Die Punkte sollen sich nur durch ihre Wellenlänge unterscheiden, welche von einer Seite zur anderen stetig zunimmt, und im Uebrigen dieselbe specifische Intensität besitzen. Eine solche Annahme würde einem idealen, unendlich schmalen Spectrum, rechtwinklig zur Trennungslinie der beiden Kreishälften des Objectivs (Pupille), entsprechen.

Die Intensität $I(\eta)$ eines Punkts im geometrischen Focalbilde dieses Spectrums ergiebt sich dann durch Summation der Intensitäten J für alle möglichen η_1, welche wir zwischen den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ liegend annehmen können; demnach ist:

$$I(\eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} J \cdot d\eta_1$$

oder, nach Substitution von $z = \frac{2\pi}{\lambda} R(\eta - \eta_1)$

$$I(\eta) = 2\pi\lambda R^3 \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{J_1(z)}{z} \cos\frac{\delta}{2} - \frac{H_1(z)}{z} \sin\frac{\delta}{2}\right)^2 dz.$$

Darin ist die Phasendifferenz δ eine Function der Wellenlänge und somit auch eine Function von η_1 oder z, welche man sich vermittelst des Taylor'schen Satzes nach Potenzen von z entwickelt denken kann. Bezeichnet man mit δ_0 die Phasendifferenz im Punkte η, dessen Intensität gesucht wird, so kann die Phasendifferenz in einem beliebigen Punkte η_1 hiernach näherungsweise durch

$$\delta = \delta_0 + (\eta_1 - \eta)\left(\frac{\partial \delta}{\partial \eta_1}\right)_\eta = \delta_0 - \frac{\lambda}{2\pi R}\left(\frac{\partial \delta}{\partial \eta_1}\right)_\eta \cdot z$$
$$= \delta_0 + \alpha z$$

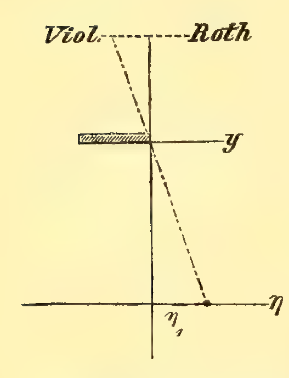
ausgedrückt werden, indem man die höheren Potenzen von z vernachlässigt. Dieselben würden nur bei grösseren Argumenten in Betracht kommen, für welche $\frac{J_1(z)}{z}$ und $\frac{H_1(z)}{z}$ ihrer Natur nach sehr klein sind. In Folge dessen wird aber der Beitrag, welchen entferntere Punkte des Spectrums zur Intensität des Punktes η beisteuern, so klein, dass man ohne merklichen Fehler auch für die entfernteren Punkte die obige genäherte Darstellung von δ beibehalten darf. Aus demselben Grunde sind wir berechtigt, die specifische Intensität des Spectrums constant anzunehmen, sowie auch für λ (in dem obigen Ausdruck von α) die dem Punkt η entsprechende Wellenlänge zu setzen.

Für eine planparallele Glasplatte von der Dicke d und dem Brechungsexponenten n findet man

$$\delta_0 = 2\pi d\left(\frac{n-1}{\lambda}\right)_\eta$$

und mithin

$$\alpha = -\frac{d}{R}\left(\lambda\,\frac{\partial\left(\frac{n-1}{\lambda}\right)}{\partial \eta_1}\right)_\eta$$



Wird mit wachsendem η_1 die Phasendifferenz δ grösser, so ist obiger Annahme zufolge α negativ, wird sie kleiner, so ist α positiv. Ersteres entspricht dem Fall, dass λ in der Richtung der positiven η abnimmt. Da aber die Richtung der Farben im Spectrum derjenigen in der Focalebene entgegengesetzt ist, so bedeutet ein negatives α, dass die Richtung von *Violett* nach *Roth* im Spectrum mit der Richtung von der bedeckten zur unbedeckten Kreishälfte übereinstimmt, oder mit anderen Worten, dass das verzögernde Blättchen vor das violette Ende des Spectrums vorgeschoben ist, während ein positives α der umgekehrten Anordnung entspricht.

Mit Fortlassung des Factors $2\pi\lambda R^3$ ergiebt sich nunmehr die Intensität des Punkts η, für welchen die Phasendifferenz δ_0 ist:

$$I(\eta) = \int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\frac{J_1(z)}{z}\cos\frac{\alpha z + \delta_0}{2} - \frac{H_1(z)}{z}\sin\frac{\alpha z + \delta_0}{2}\right\}^2 dz.$$

Um hieraus die Lage der Intensitäts-Maxima und Minima zu bestimmen, hat man diesen Ausdruck nach δ_0 zu differentiiren und den Differentialquotienten $= 0$ zu setzen. Indem man dabei α, welches nur langsam mit η respective δ_0 variirt, als constant ansieht, gelangt man zu der Gleichung

$$\sin \delta_0 = 0$$

aus welcher zu folgern ist, dass Minima resp. Maxima nur an denjenigen Stellen stattfinden können, wo die Wegedifferenz der Lichtstrahlen ein ungerades resp. gerades Vielfaches einer halben Wellenlänge beträgt. Dieselbe Lage behalten die Maxima und Minima, wenn ein Spalt als beugende Oeffnung angenommen wird und man sieht ferner leicht ein, dass das nämliche Gesetz auch noch für eine kreisförmige Oeffnung gültig bleibt, wenn man die einschränkende Voraussetzung, dass das Spectrum unendlich schmal ist, fallen lässt. Unter allen Umständen bleibt also die Lage der Maxima und Minima unverändert dieselbe und hängt nur von der Dicke d des verzögernden Blättchens und dem Quotienten $\frac{n-1}{\lambda}$ ab, nicht aber von den Dimensionen der beugenden Oeffnung. An den bezeichneten Stellen braucht indess die Intensität nicht nothwendig zu variiren; sie kann auch überall constant sein und zur Entscheidung dieser Frage ist in jedem einzelnen Fall eine genaue Discussion der in $I(\eta)$ vorkommenden Integrale erforderlich.

Führt man folgende Bezeichnungen ein:

$$A = \int_0^\infty \left(\frac{J_1(z)}{z}\right)^2 \cos(\alpha_0 z)\, dz \qquad A_0 = \int_0^\infty \left(\frac{J_1(z)}{z}\right)^2 dz$$

$$B = \int_0^\infty \left(\frac{H_1(z)}{z}\right)^2 \cos(\alpha_0 z)\, dz \qquad B_0 = \int_0^\infty \left(\frac{H_1(z)}{z}\right)^2 dz$$

$$C = \int_0^\infty \frac{J_1(z)\cdot H_1(z)}{z^2} \sin(\alpha_0 z)\, dz,$$

wo α_0 den absoluten Werth von α bedeute, und erwägt, dass A und B gerade Functionen, C dagegen eine ungerade Function von α_0 ist, so geht der obige Intensitätsausdruck in den folgenden über:

$$I(\eta) = A_0 + B_0 + \cos \delta_0 \,(A - B \mp 2C)$$

und zwar gilt im letzten Gliede das obere oder untere Vorzeichen, je nachdem α positiv oder negativ ist, oder je nachdem das verzögernde Blättchen auf der *rothen* oder auf der *violetten* Seite des Spectrums liegt.

---

3. Die Integrale A, B, C lassen sich auf elliptische Integrale zurückführen und stehen unter einander in einer merkwürdigen Beziehung, zu der man am einfachsten in folgender Weise gelangt.

Beachtet man die Eingangs erwähnten Darstellungen

$$J_1(z) = \frac{2}{\pi} z \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(z \sin a) \cos^2 a \, da = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(z \sin b) \sin b \, db$$

$$H_1(z) = \frac{2}{\pi} z \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(z \sin a) \cos^2 a \, da = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\left(\frac{z \sin b}{2}\right) \sin b \, db$$

so kann man A, B, C folgendermassen ausdrücken:

$$A = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 a \sin b \, da \, db \int_0^{\infty} \frac{\sin(z \sin b)}{z} [\cos z(\alpha_0 + \sin a) + \cos z(\alpha_0 - \sin a)] \, dz$$

$$B = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 a \sin b \, da \, db \int_0^{\infty} \frac{\sin^2\left(\frac{z \sin b}{2}\right)}{z} [\sin z(\alpha_0 + \sin a) - \sin z(\alpha_0 - \sin a)] \, dz$$

$$C = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 a \sin b \, da \, db \int_0^{\infty} \frac{\sin^2\left(\frac{z \sin b}{2}\right)}{z} [\sin z(\alpha_0 + \sin a) + \sin z(\alpha_0 - \sin a)] \, dz$$

Die nach z zu nehmenden Integrale haben daher sämmtlich die Form

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin pz}{z} \cos qz \, dz$$

oder

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2\left(\frac{pz}{2}\right)}{z} \sin qz \, dz,$$

in welchen p seiner Bedeutung nach positiv ist.

Wegen

$$\int_0^\infty \frac{\sin rz}{z}\, dz = \begin{cases} +\frac{\pi}{2} & r > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & r < 0 \end{cases}$$

hat man aber für positive p

$$\int_0^\infty \frac{\sin pz}{z} \cos qz\, dz = \pm 2 \int_0^\infty \frac{\sin^2\left(\frac{pz}{2}\right)}{z} \sin qz\, dz = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \text{ für } p > \text{abs. } q \\ 0 \text{ für } p < \text{abs. } q \end{cases}$$

und zwar gilt im zweiten Integral das positive oder negative Vorzeichen, je nachdem q positiv oder negativ ist.

Führen wir demnach in den dreifachen Integralen A, B, C zunächst die Integration nach z aus und bezeichnen der Kürze halber das Doppelintegral

$$\frac{1}{\pi} \int\int \cos^2 a \sin b\, da\, db$$

ausgedehnt über solche Werthe von a und b, die zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ liegen

und für welche $\sin b > \alpha_0 + \sin a$ ist, mit P

» » » $\sin b > \alpha_0 - \sin a > 0$ » » Q

» » » $\sin b > \sin a - \alpha_0 > 0$ » » R

so erhalten wir nunmehr:

$$A = P + Q + R$$
$$B = P - Q + R$$
$$C = P + Q - R$$

Ist erstlich $2 > \alpha_0 > 1$, so giebt es keine Werthe von a und b zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$, für welche $\sin b > \alpha_0 + \sin a$, oder $\sin b > \sin a - \alpha_0 > 0$ ist; daher ist in diesem Fall

$$P = 0 \qquad R = 0$$

und folglich

$$A = -B = C = Q$$

Ist zweitens $\alpha_0 > 2$, so ist ausserdem auch $Q = 0$ und daher

$$A = B = C = 0.$$

Für $\alpha_0 < 1$ folgt dagegen durch Subtraction, resp. Addition:

$$A - C = 2R = \frac{2}{\pi}\int_{\arcsin\alpha_0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 a\, da \int_{\arcsin(\sin a - \alpha_0)}^{\frac{\pi}{2}} \sin b\, db = \frac{2}{\pi}\int_{\arcsin\alpha_0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 a \cdot \sqrt{1-(\sin a - \alpha_0)^2}\, da$$

$$B + C = 2P = \frac{2}{\pi}\int_0^{\arcsin(1-\alpha_0)} \cos^2 a\, da \int_{\arcsin(\alpha_0+\sin a)}^{\frac{\pi}{2}} \sin b\, db = \frac{2}{\pi}\int_0^{\arcsin(1-\alpha_0)} \cos^2 a \cdot \sqrt{1-(\alpha_0+\sin a)^2}\, da$$

oder, wenn man $x = \sin a$ substituirt,

$$A - C = \frac{2}{\pi}\int_{\alpha_0}^{1} \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-(x-\alpha_0)^2}\, dx$$

$$B + C = \frac{2}{\pi}\int_0^{1-\alpha_0} \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-(x+\alpha_0)^2}\, dx$$

Die Integrale rechter Hand sind aber einander gleich, da das zweite durch die Substitution $y = x + \alpha_0$ in das erste übergeführt werden kann. In Folge dessen ist für $\alpha_0 < 1$

$$A - C = B + C = \frac{2}{\pi}\int_{\alpha_0}^{1} \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-(x-\alpha_0)^2}\, dx,$$

während für $\alpha_0 > 1$

$$A - C = B + C = 0$$

ist. Demnach gilt allgemein für beliebige α_0 die bemerkenswerthe Relation

$$A - B = 2C$$

aus welcher unmittelbar folgt, dass die Talbot'schen Minima nur dann auftreten können, wenn α negativ ist, d. h. die bedeckte Hälfte der Pupille auf der *violetten* Seite des Spectrums liegt. In diesem Fall wird

$$I(\eta) = A_0 + B_0 + 4C\cos\delta_0$$

Ist hingegen α positiv, also die bedeckte Hälfte am *rothen* Ende, so wird

$$I(\eta) = A_0 + B_0$$

d. h. die Intensität constant. Dasselbe findet statt, wenn zwar α negativ, aber zugleich $\alpha_0 > 2$ ist, da alsdann A, B, C sämmtlich verschwinden.

Es erübrigt nur noch C zu bestimmen, indem A und B und folglich auch A_0 und B_0 mittelst der obigen Sätze auf C zurückgeführt werden können.

Da nun, wegen $P = R$, allgemein $C = Q$ ist, so hat man für $\alpha_0 < 1$

$$C = \frac{1}{\pi}\int_0^{\arcsin\alpha_0} \cos^2 a\, da \int_{\arcsin(\alpha_0 - \sin a)}^{\frac{\pi}{2}} \sin b\, db = \frac{1}{\pi}\int_0^{\alpha_0} \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-(\alpha_0-x)^2}\, dx$$

und für $2 > \alpha_0 > 1$

$$C = \frac{1}{\pi}\int_{\arcsin(\alpha_0-1)}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 a\, da \int_{\arcsin(\alpha_0 - \sin a)}^{\frac{\pi}{2}} \sin b\, db = \frac{1}{\pi}\int_{\alpha_0-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-(\alpha_0-x)^2}\, da$$

Durch die Substitution

$$x = \frac{\alpha_0}{2} + \left(1 - \frac{\alpha_0}{2}\right)\sin\varphi$$

lassen sich diese Integrale in die Normalform der elliptischen Integrale 1-ter und 2-ter Gattung transformiren, wodurch man zu folgenden Ausdrücken gelangt:

für $\alpha_0 < 1$ $\quad C = \frac{1}{3\pi}\alpha_0\sqrt{1-\alpha_0^2} + \frac{2}{3\pi}\left(1+\frac{\alpha_0}{2}\right)^3 \{(1+k^2)E(\varphi_0) - (1-k^2)F(\varphi_0)\}$

für $2 > \alpha_0 > 1$ $\quad C = \frac{2}{3\pi}\left(1+\frac{\alpha_0}{2}\right)^3 \{(1+k^2)E - (1-k^2)K\}$

Darin haben $E(\varphi_0)$, $F(\varphi_0)$, E, K die gewöhnliche Bedeutung, nämlich

$$E(\varphi_0) = \int_0^{\varphi_0} \Delta(\varphi, k)\, d\varphi, \qquad E = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Delta(\varphi, k)\, d\varphi,$$

$$F(\varphi_0) = \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi, k)}, \qquad K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi, k)};$$

der Modul ist $k = \frac{1-\frac{\alpha_0}{2}}{1+\frac{\alpha_0}{2}}$ und die Amplitude bestimmt sich aus $\sin\varphi_0 = \frac{1-k}{2k}$.

Aus den obigen Relationen folgt weiter:

$$A = \frac{2}{3\pi}\left(1+\frac{\alpha_0}{2}\right)^3 \{(1+k^2)\,E-(1-k^2)\,K\} \quad \text{allgemein für } \alpha_0 < 2$$

$$B = A - 2C$$

und folglich, da für $\alpha_0 = 0$ oder $k = 1$

$$E = 1 \qquad (1-k^2)K = 0 \;\text{ und }\; C = 0$$

wird:

$$A_0 = B_0 = \frac{4}{3\pi},$$

was sich übrigens leicht noch auf anderm Wege verificiren liesse. Beziehen wir somit die Intensitäten auf die constante Intensität, welche das Spectrum besitzt, wenn das verzögernde Blättchen auf der *rothen* Seite liegt, und fassen die bisherigen Resultate zusammen, so ergiebt sich schliesslich:

$$I(\eta) = 1$$

sobald α entweder positiv oder dem absoluten Werth nach grösser als 2 ist;

$$I(\eta) = 1 + \cos\delta_0 \left\{\frac{\alpha_0\sqrt{1-\alpha_0^2}}{2} + \left(1+\frac{\alpha_0}{2}\right)^3 [(1+k^2)E(\varphi_0) - (1-k^2)F(\varphi_0)]\right\}$$

sobald α negativ und $\alpha_0 < 1$;

$$I(\eta) = 1 + \cos\delta_0 \left(1+\frac{\alpha_0}{2}\right)^3 [(1+k^2)E - (1-k^2)K]$$

sobald α negativ und $2 > \alpha_0 > 1$ ist.

---

4. Die grössten Veränderungen erleidet die Intensität, wenn C ein Maximum oder $\frac{\partial C}{\partial \alpha_0} = \int_0^\infty \frac{J_1(z)\cdot H_1(z)}{z}\cos(\alpha_0 z)\,dz = 0$ ist. Um zu entscheiden, für welchen Werth von α_0 dies eintritt, beachte man, dass für $\alpha_0 > 1$, $\frac{\partial C}{\partial \alpha_0} = -\frac{1}{\pi}\int_{\alpha_0-1}^{1} \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1-(\alpha_0-x)^2}$ stets negativ ist, während für $\alpha_0 = 0$, $\frac{\partial C}{\partial \alpha_0} = +\frac{1}{\pi}$ wird. Der betreffende Werth von α_0 muss also jedenfalls zwischen den Grenzen 0 und 1 enthalten sein, und zwar findet man durch eine leichte Rechnung, dass er sehr nahe an $\frac{6}{7}$ liegt und dass für denselben der Factor von $\cos\delta_0$ in dem Intensitätsausdruck ungefähr gleich 0,94 ist.

Eine Folge davon ist, dass die Talbot'schen Minima bei einer kreisförmigen Oeffnung, streng genommen, niemals absolut dunkel sein können. Bei einem Spalt als beugender Oeffnung wäre dies dagegen möglich. Denn behält man dieselben Bezeichnungen wie oben bei, nur dass man an Stelle des Radius R, die halbe Breite des Spalts setzt, so erhält man, wie Airy gezeigt hat:

$$I(\eta) = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin\omega}{\omega}\right)^2 \cos^2\left((1+\alpha_0)\,\omega + \frac{\delta_0}{2}\right) d\omega$$

und daraus, wegen $\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin\omega}{\omega}\right)^2 d\omega = \pi$,

$$\begin{aligned} I(\eta) &= 1, && \text{wenn entweder } \alpha \text{ positiv, oder } \alpha_0 > 2 \\ &= 1 + \alpha_0 \cos\delta_0, && \text{wenn } \alpha \text{ negativ und } \alpha_0 < 1 \\ &= 1 + (2 - \alpha_0)\cos\delta_0, && \text{» » » » } 2 > \alpha_0 > 1 \end{aligned}$$

Die Talbot'schen Streifen werden demnach, wenn ein Spalt als beugende Oeffnung angewandt wird, absolute Minima, sobald $\alpha = -1$ ist.

Daraus, dass α_0 für einen Spalt von der Breite $2R$ den nämlichen Werth besitzt wie für eine kreisförmige Oeffnung von demselben Durchmesser, folgt noch der in theoretischer Hinsicht ganz interessante Satz:

«Ist die Intensität bei Anwendung eines Spalts constant, so ist sie auch constant bei Anwendung einer dem Spalt eingeschriebenen kreisförmigen Oeffnung, und umgekehrt». Die Talbot'schen Minima müssen desshalb mit wachsendem α_0 in beiden Fällen gleichzeitig verschwinden.

Ouvrages astronomiques et géodésiques publiés dans la VII. Série des Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences:

T. I, № 1. **Struve, O.** Nouvelle détermination de la parallaxe annuelle des étoiles α Lyrae et 61 Cygni. 1859. Pr. 45 K. = 1 Mk. 50 Pf.

№ 6. **Schubert, T. F.** Essai d'une détermination de la véritable figure de la terre. Avec 1 pl. 1859. Pr. 35 K. = 1 Mk. 20 Pf.

T. II, № 1. **Struve, O. u. Winnecke, Dr. A.** Pulkowaer Beobachtungen des grossen Cometen von 1858. Erste Abtheilung: Beobachtungen am Refractor, angestellt von O. Struve, Mitgliede der Akademie. Zweite Abtheilung: Beobachtungen am Heliometer nebst Untersuchungen über die Natur des Cometen von Dr. A. Winnecke, Adjunct-Astronomen der Hauptsternwarte. Mit 6 Taf. 1859. Pr. 1 R. 50 K. = 5 Mk.

№ 4. **Struve, O.** Beitrag zur Feststellung des Verhältnisses von Keppler zu Wallenstein. 1860. Pr. 30 K. = 1 Mk.

T. III, № 5. **Baeyer, J. J.** Ueber die Strahlenbrechung in der Atmosphäre. Avec 1 pl. lith. 1860. Pr. 65 K. = 2 Mk. 20 Pf.

T. IV, № 1. **Struve, O.** Beobachtung der totalen Sonnenfinsterniss vom 18. (6.) Juli 1860 in Pobes. Nach den Berichten der einzelnen Theilnehmer zusammengestellt. Mit 3 Taf. 1861. Pr. 85 K. = 2 Mk. 80 Pf.

T. V, № 4. **Struve, O.** Observations de la grande nébuleuse d'Orion, faites à Cazan et à Poulkova. I[e] Partie: Mémoire de M. Liapounov sur les observations de Cazan. II[e] Partie: O. Struve, Additions au mémoire de M. Liapounov et Observations de Poulkova. Avec 4 pl. lith. 1862. Pr. 1 R. 35 K.= 4 Mk. 50 Pf.

T. VI, № 7. **Winnecke, A.** Beobachtungen des Mars um die Zeit der Opposition 1862. 1863. Pr. 40 K. = 1 Mk. 30 Pf.

№ 11. **Sawitsch, A.** Opposition des Mars im Jahre 1862, beobachtet auf der kleinen akademischen Sternwarte zu St. Petersburg. 1863. Pr. 25 K. = 80 Pf.

T. VII, № 7. **Winnecke, A.** Pulkowaer Beobachtungen des hellen Cometen von 1862, nebst einigen Bemerkungen. Mit 6 lith. Taf. 1864. Pr. 90 K. = 3 Mk.

T. VIII, № 2. **Linsser, C.** Vier von De l'Isle beobachtete Plejaden-Bedeckungen, bearbeitet und mit Hansen's Mond-Tafeln verglichen. 1864. Pr. 25 K. = 80 Pf.

T. X, № 1. **Gyldén, H.** Untersuchungen über die Constitution der Atmosphäre und die Strahlenbrechung in derselben. Erste Abhandlung. 1866. Pr. 70 K. = 2 Mk. 30 Pf.

T. XII, № 4. **Gyldén, H.** Untersuchungen über die Constitution der Atmosphäre und die Strahlenbrechung in derselben. Zweite Abhandlung. 1868. Pr. 45 K. = 1 Mk. 50 Pf.

№ 5. **Struve, O.** Beobachtungen des grossen Cometen von 1861. Mit 1 lith. Taf. 1868. Pr. 50 K.=1 Mk. 70 Pf.

T. XVI, № 10. **Gyldén, H.** Studien auf dem Gebiete der Störungstheorie. I. Entwickelung einiger Verbindungen elliptischer Functionen. 1871. Pr. 1 R. 5 K. = 3 Mk. 50 Pf.

T. XVII, № 1. **Kortazzi, J.** Bestimmung der Längen-Differenz zwischen Pulkowa, Helsingfors, Åbo, Lowisa und Wiborg. 1871. Pr. 60 K. = 2 Mk.

№ 10. **Fuss, V. u. Nyrén, M.** Bestimmung der Längen-Differenz zwischen den Sternwarten Stockholm und Helsingfors, ausgeführt im Sommer 1870. 1871. Pr. 35 K. = 1 Mk. 20 Pf.

T. XVIII, № 3. **Fuss, V.** Beobachtungen und Untersuchungen über die astronomische Strahlenbrechung in der Nähe des Horizontes. 1872. Pr. 40 K. = 1 Mk. 30 Pf.

№ 5. **Asten, E. v.** Resultate aus Otto von Struve's Beobachtungen der Uranustrabanten. 1872. Pr. 25 K. = 80 Pf.

№ 10. **Asten, E. v.** Untersuchungen über die Theorie des Encke'schen Cometen. I. Berechnung eines wichtigen Theiles der absoluten Jupitersstörungen des Encke'schen Cometen. 1872. Pr. 65 K.=2 Mk. 20 Pf.

T. XIX, № 2. **Nyrén, M.** Bestimmung der Nutation der Erdachse. 1872. Pr. 55 K. = 1 Mk. 80 Pf.

№ 10. **Nyrén, M.** Die Polhöhe von Pulkowa. 1873. Pr. 35 K. = 1 Mk. 20 Pf.

T. XXIII, № 3. **Nyrén, M.** Das Aequinoctium für 1865,0, abgeleitet aus den am Passageninstrumente und am Verticalkreise in den Jahren 1861 — 70 in Pulkowa angestellten Sonnenbeobachtungen. 1876. Pr. 30 K. = 1 Mk.

T. XXVI, № 2. **Asten, E. v.** Untersuchungen über die Theorie des Encke'schen Cometen. II. Resultate aus den Erscheinungen 1819—1875. 1878. Pr. 1 R. = 3 Mk. 30 Pf.

№ 4. **Hasselberg, Dr. B.** Studien auf dem Gebiete der Absorbtionsspectralanalyse. Avec 4 pl. 1878. Pr. 1 R. = 3 Mk. 30 Pf.

T. XXVII, № 1. **Hasselberg, Dr. B.** Ueber das durch electrische Erregung erzeugte Leuchten der Gaze bei niedriger Temperatur. 1879. Pr. 25 K. = 80 Pf.

№ 11. **Struve, O.** Études sur le mouvement relatif des deux étoiles du système de 61 Cygni. 1880. Pr. 35 K. = 1 Mk. 20 Pf.

T. XXVIII, № 6. **Backlund, O.** Zur Theorie des Encke'schen Cometen. 1881 Pr. 70 K. = 2 Mk. 30 Pf.

T. XXX, № 4. **Lindemann, Ed.** Zur Beurtheilung der Veränderlichkeit rother Sterne. 1882. Pr. 15 K. = 50 Pf.

№ 7. **Hasselberg, Dr. B.** Untersuchungen über das zweite Spectrum des Wasserstoffs. Avec 1 pl. 1882. Pr. 30 K. = 1 Mk.

№ 8. **Struve, Hermann.** Ueber den Einfluss der Diffraction an Fernröhren auf Lichtscheiben. 1882. Pr. 90 K. = 3 Mk.

Imprimé par ordre de l'Académie Impériale des sciences. Février, 1883. C. Vessélofski, Secrétaire perpétuel.

Imprimerie de l'Académie Impériale des sciences. (Vass.-Ostrow., 9 ligne, № 12.)

MÉMOIRES
DE
L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES DE ST.-PÉTERSBOURG, VIIE SERIE.
TOME XXXI, № 2.

RESULTATE

AUS

DEN IN PULKOWA ANGESTELLTEN VERGLEICHUNGEN

VON

PROCYON MIT BENACHBARTEN STERNEN.

VON

Ludwig Struve.

(Lu le 15 février 1883.)

ST.-PÉTERSBOURG, 1883.
Commissionnaires de l'Académie Impériale des sciences:

à St.-Pétersbourg: MM. Eggers et Cie et J. Glasounof;
à Riga: M. N. Kymmel;
à Leipzig: Voss' Sortiment (G. Haessel).

Prix: 45 Kop. = 1 Mk. 50 Pf.

MÉMOIRES
DE
L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES DE ST.-PÉTERSBOURG, VIIE SERIE.
TOME XXXI, № 2.

RESULTATE

AUS

DEN IN PULKOWA ANGESTELLTEN VERGLEICHUNGEN

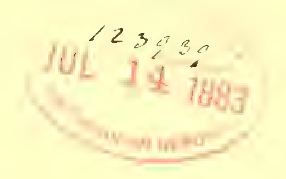
VON

PROCYON MIT BENACHBARTEN STERNEN.

VON

Ludwig Struve.

(Lu le 15 février 1883.)



ST.-PÉTERSBOURG, 1883.
Commissionnaires de l'Académie Impériale des sciences:

à St.-Pétersbourg: MM. Eggers et Cie et J. Glasounof;

à Riga: M. N. Kymmel;

à Leipzig: Voss' Sortiment (G. Haessel).

Prix: 45 Kop. = 1 Mk. 50 Pf.

Imprimé par ordre de l'Académie Impériale des sciences.

Mars 1883. C. Vessélofski, Secrétaire perpétuel.

Imprimerie de l'Académie Impériale des sciences.
(Vass.-Ostr., 9 ligne, № 12.)

Prof. Auwers hat am Schlusse seiner beiden berühmten Abhandlungen über die Eigenbewegung von Procyon[1]) nachgewiesen, dass alle bis 1873 angestellten Vergleichungen von Procyon mit teleskopischen Sternen sich mit genügender Uebereinstimmung durch die von ihm abgeleiteten Kreiselemente darstellen lassen. Seitdem hat sich die umfassendste Reihe dieser Differentialbeobachtungen, die Pulkowaer, noch wesentlich vergrössert und zeigt, wenigstens was die von O. Struve gemessenen Declinationsdifferenzen betrifft, jetzt schon Abweichungen von der Auwers'schen Bahn, die durch zufällige Beobachtungsfehler nicht erklärt werden können. Letztere Beobachtungen umfassen zwar bis jetzt erst ungefähr drei Viertel eines Umlaufs von Procyon um den Schwerpunkt des Systems, doch ist ihre Genauigkeit so gross und den Beobachtungen an Meridianinstrumenten gegenüber so überwiegend, dass zu erwarten stand, aus ihnen, wenn auch nicht für alle Bahnelemente, so doch wenigstens für die Epoche und den Radius Werthe ableiten zu können, die an Genauigkeit hinter den von Auwers aus der Gesammtheit der Meridianbeobachtungen abgeleiteten kaum zurückbleiben dürften. Aus den von O. Struve beobachteten Rectascensionsdifferenzen liess sich von vornherein kein sicheres Resultat erwarten. Die Beobachtungen dieser Coordinate sind zwar gleichzeitig mit den Beobachtungen der Declinationsdifferenzen am grossen Refractor der Pulkowaer Sternwarte 1851 begonnen, doch ist, wie schon Auwers bemerkt hat[2]) und unten noch gezeigt werden soll, ihre Güte durch die offenbar nicht vollkommene Stabilität des Instruments in Rectascension wesentlich beeinträchtigt worden, und zwar derart, dass sie zu Aufgaben, wie die vorliegende, wo es auf den höchsten erreichbaren Grad der Genauigkeit ankommt, nicht verwandt werden können.

---

1) Untersuchungen über veränderliche Eigenbewegungen. I. Königsb. 1862 u. Monatsbericht der K. Preussischen Akademie der Wissensch zu Berlin. aftenMai 1873.

2) Untersuchungen über veränderliche Eigenbewegungen. I. pag. 51.

Ein Jahr später, 1852, begann Herr Wagner am grossen Passageninstrumente der hiesigen Sternwarte die Beobachtung der Rectascensionsdifferenzen, doch schon im folgenden Jahre musste die Arbeit wegen längerer Abwesenheit des Beobachters unterbrochen werden. Erst 1859 wurde sie wieder aufgenommen und ist seit dann ohne längere Pause bis jetzt fortgeführt. Seit 1863 kam hierbei die Registrirmethode zur Anwendung. Wenn man von den wenigen Beobachtungen aus den Jahren 1852 und 1853 absieht, so umfasst diese Beobachtungsreihe also nicht viel mehr als die Hälfte eines Umlaufs von Procyon, und ist leider die Lage des beobachteten Theiles der Bahn nicht sehr günstig zum Erkennen der Ungleichförmigkeit in Rectascension. Obgleich also aus dieser Beobachtungsreihe gegenwärtig keine entscheidenden Resultate zu erwarten waren, so glaubte ich doch, dass es nicht ohne Interesse sein dürfte, zu untersuchen, was dieselbe bis jetzt liefert, und einen wie bedeutenden Beitrag zu der in Rede stehenden Aufgabe man von der angewandten Methode in Zukunft zu erhoffen berechtigt ist. Ein besonderes Interesse gewinnen aber diese Beobachtungen noch durch den Umstand, dass Herr Wagner sie nicht allein zum Zweck der Bestimmung der ungleichförmigen Eigenbewegung angestellt hat, sondern damit zugleich die Absicht verband die Parallaxe von Procyon zu bestimmen.

Trotz der Helligkeit und beträchtlichen Eigenbewegung von Procyon ist seine Parallaxe bis jetzt nur wenig zum Gegenstand der Untersuchung gemacht worden. Abgesehen von den hierauf gerichteten Versuchen Piazzi's und Brinkley's sind mir nur zwei zu berücksichtigende Bestrebungen auf diesem Gebiete bekannt geworden. Die eine ist durch Bessel in der Einleitung zu seinen Fundamenta Astronomiae gemacht worden; er untersuchte die von Bradley beobachteten Rectascensionsdifferenzen zwischen Procyon und α Aquilae und fand für die Summe der Parallaxen beider Sterne[1])

$$\pi + \pi''. 1{,}005 = + 0''{,}9313 \pm 0''{,}2085$$

also einen Werth von beträchtlicher Grösse, der seinen wahrscheinlichen Fehler um mehr als das Vierfache übertrifft und der, selbst wenn sich der Werth gleichmässig auf beide Sterne vertheilen sollte, eine verhältnissmässig grosse Parallaxe von Procyon vermuthen liess. Die zweite Bestimmung ist von Auwers am Königsberger Heliometer gemacht

1) a. a. O. pag. 117. Bessel hat schon im XIX. Bande der Monatlichen Correspondenz (Febr. 1809) einen kurzen Aufsatz über die Parallaxen der Fixsterne nach Bradley's Beobachtungen publicirt. Er giebt dort für die Summe der Parallaxen von Procyon und α Aquilae einen von dem vorstehenden abweichenden Werth an, nämlich + 0″,6315. Die Rechnung selbst ist nicht wiedergegeben und in den Fundamenta findet sich kein Hinweis darauf; es kann also über die Ursache der grossen Differenz zwischen jenen beiden Werthen gegenwärtig nichts mehr gesagt werden. Der oben gegebene Werth ist aber des späteren Datums wegen jedenfalls als der definitive zu betrachten und bedarf nach Peters nur noch einer kleinen, weniger als 0″,1 betragenden Correction, um die von der Anomalie der Sonne abhängigen Glieder der Nutation zu berücksichtigen. Cfr. Recherches sur la parallaxe des étoiles fixes. § 21.

worden[1]). Er verwandte hierzu 46 von ihm in den Jahren 1861 und 1862 gemessenen Distanzen zwischen Procyon und dem Doppelsterne Σ1126 ($7^m{,}2$) und fand

$$\pi = +0''{,}2396 \pm 0''{,}0293$$

bemerkt aber selbst, dass er die gefundene Parallaxe wohl für einen Näherungswerth von reeller Bedeutung halte, aber für lange nicht so sicher, als der aus der Uebereinstimmung der Beobachtungen geschlossene wahrscheinliche Fehler angiebt. Die Beobachtungen sind nämlich fast sämmtlich um die Zeit des positiven Maximums der Parallaxe in Distanz angestellt worden, nur zwei zur Zeit, wo ihr Coefficient = 0 war (1862 Jan. 13 und 18) und fünf (1861 Nov. 23—Dec. 3) um die Zeit des negativen Maximums. Der für die Parallaxe erhaltene Werth beruht also vornehmlich auf diesen fünf, der Zeit nach sehr nahe bei einander liegenden Beobachtungen und würde durch eine an dieselben etwa anzubringende gemeinsame Correction wesentlich verändert wenn auch nicht zum Verschwinden gebracht werden können. Auwers zieht daher aus seinen Beobachtungen nur den Schluss, dass die Parallaxe in ihnen wohl merklich ist und wahrscheinlich zwischen 0,"15 und 0,"35 liegt.

Sonst ist meines Wissens bisher ausser dem hier zu behandelnden von Wagner kein Versuch einer Bestimmung der Parallaxe von Procyon gemacht worden. Der Grund davon liegt zum Theil darin, dass eine Bestimmung derselben aus Zenithdistanzen oder Declinationsdifferenzen keine Aussicht auf Erfolg bietet, weil der Coefficient der Parallaxe in Declination im Maximum 0,32 beträgt, und dass die Vergleichsterne, an die man Procyon anschliessen könnte, um eine Bestimmung durch Messungen von Positionswinkeln und Distanzen zu erhalten, für Refractore zu weit abstehen und für Heliometer, mit Ausnahme des von Auwers angewandten und einiger weniger anderer, im Allgemeinen zu schwach sind. Obgleich nun die Bestimmung von Parallaxen aus Rectascensionsdifferenzen in der Regel zu nicht so sicheren Resultaten führt, wie die Anwendung der anderen Methoden, so scheint sie in diesem Falle doch die vortheilhafteste zu sein.

---

1) Astronomische Nachrichten. № 1411—1416.

Erster Abschnitt.

Die Rectascensionsdifferenzen.

Die Beobachtungen von Wagner, welche hier zuerst behandelt werden sollen, bieten Rectascensionsdifferenzen zwischen Procyon und vier kleinen Sternen, die so ausgewählt sind, dass je einer dem Procyon sowohl nördlich wie südlich vorangeht und ebenso folgt; es sind dies die von Auwers mit den Buchstaben *a*, *b*, *c*, *d* bezeichneten Sterne, deren Grössen und genäherte relative Lagen gegen Procyon für 1865,0 die folgenden sind:

d	8ᵐ,7	$P-d =$	$+ 1^m\ 54^s,8$	$+ 3'\ 26''$
b	9	$P-b =$	$+ 0\ \ 24,5$	$- 1\ \ 30$
c	9	$P-c =$	$- 0\ \ 22,2$	$- 0\ \ 44$
a[1]	7,2 u. 7,5	$P-a =$	$- 0\ \ 42,6$	$+ 1\ \ 45$

Wie man sieht, ist diese Anordnung der Vergleichsterne eine sehr günstige für die Ausschliessung der Fehler, die etwa durch eine der Zeit proportionale Bewegung des Instruments hervorgehen könnten. Sie ist jedoch hier kaum von Belang, da die täglich mehrfach angestellten Mirenablesungen und Nivellirungen der Axe gezeigt haben, dass diese Bewegungen am hiesigen Passageninstrumente nur äusserst langsam vor sich gehen und ihre Vernachlässigung daher für die hier in Betracht kommende grösste Zwischenzeit von nicht vollen zwei Minuten gewiss keinen Fehler verursachen kann, der 0ˢ,001 erreicht. Das Instrument ist ferner immer so nahe berichtigt gewesen, dass die Reductionen auf den Meridian für diese Sterne als identisch anzunehmen waren und daher gar nicht berücksichtigt zu werden brauchten. Der erwähnte Vortheil der Anordnung der Vergleichsterne wird überdies durch den Umstand ganz aufgehoben, dass keineswegs immer alle vier an denselben Tagen beobachtet sind; im Gegentheil, an dem grösseren Theile der Beobachtungstage sind nur drei von ihnen oder weniger mitgenommen.

1) Der Stern *a* ist der physiche Doppelstern Σ 1126, dessen Componenten 1″,3 von einander abstehen. Die Beobachtungen beziehen sich auf das Mittel beider. Den Mikrometermessungen zufolge ist die Bahnbewegung so langsam, dass auf dieselbe keine Rücksicht genommen zu werden brauchte. Die Distanz ist nämlich während 60 Jahren constant geblieben und der Positionswinkel hat sich in dieser ganzen Zeit kaum um 15° geändert. Es ist dies derselbe Stern, den auch Auwers zur Bestimmung der Parallaxe von Procyon benutzt hat.

In der That sind an den 246 Beobachtungstagen ausser Procyon

	alle 4 Sterne	an	104	Tagen	beobachtet,
dagegen nur	*a*, *b*, *c*	»	7	»	
	a, *b*, *d*	»	13	»	
	a, *b*	»	2	»	
	a, *c*	»	1	»	
	a, *d*	»	23	»	
	b, *d*	»	22	»	
	a	»	42	»	
	b	»	2	»	
	d	»	30	»	

im Ganzen also der Stern *a* an 192, *b* an 150, *c* an 112 und *d* an 192 Tagen.

In der ersten Zeit nämlich beobachtete Herr Wagner nur den einzigen Stern *d*, der allein unter den Vergleichsternen hinlänglich in Rectascension von Procyon abstand, um an denselben Tagen mit letzterem an einer hinreichenden Anzahl von Fäden (durchschnittlich 7) nach der Auge- und Ohr-Methode beobachtet werden zu können; seit 1861 wurde *b* an durchschnittlich 2 Fäden mitgenommen, während *a* und *c* erst 1863, nach Einführung der Registrirmethode, hinzukamen. Dabei wurde im Allgemeinen *d* an 11, *b* an 6, Procyon an 9, *c* an 5 und *a* an 6 Fäden beobachtet, jedoch auch das keineswegs gleichmässig. Bei nicht ganz heiterem Himmel oder ungenügend durchsichtiger Luft, ferner bei allen in die Dämmerung fallenden Beobachtungen in den ersten Apriltagen konnten die schwachen Sterne *b*, *c* und häufig auch *d* nicht mehr gesehen werden, und blieb also nur der Stern *a* übrig, der seiner grösseren Helligkeit wegen länger als die anderen verfolgt werden konnte. In solchen Fällen wurde er in der Regel an mehr Fäden, nämlich an 8 bis 10 beobachtet. Da die Sterne *b* und *c* an der Grenze der Sichtbarkeit des angewandten Instruments bei voller Feldbeleuchtung stehen und die gleichzeitige Anwesenheit von Procyon im Felde wegen seines blendenden Lichtes einen störenden Einfluss ausübt, so konnten ihre Durchgänge nicht mit derselben Sicherheit notirt werden wie die der beiden anderen, weiter abstehenden Sterne *a* und *d*. Demzufolge entschloss sich Herr Wagner in den letzten Jahren, die beiden erstgenannten Sterne ganz auszuschliessen oder nur gelegentlich mitzunehmen, wodurch er erreichte, dass er den Stern *a* an einer grösseren Anzahl von Fäden, und zwar an gleich vielen wie *d* und Procyon zu beobachten im Stande war. Die seit 1863 angestellten Beobachtungen sind sämmtlich registrirt, mit Ausnahme einiger weniger aus den Jahren 1879 und 1880, die nach der Auge- und Ohr-Methode ausgeführt wurden.

Ehe ich an die Reduction und Ausgleichung dieser Beobachtungen gehe, muss ich zuerst einige Worte über die Gründe vorausschicken, die mich veranlasst haben, sämmtliche von anderen Astronomen beobachteten Rectascensionsdifferenzen $P-a$, $P-b$, $P-c$ (von $P-d$ sind mir keine bekannt) zu vernachlässigen. Für die Ableitung der Unregelmässigkeit der Eigenbewegung hoffte ich ursprünglich, auch diese Beobachtungen mit berücksichtigen zu

können, umsomehr, als sie für den Stern *a* bis auf Bradley vom Jahre 1743 und für die beiden anderen bis auf Lalande zurückgehen; doch zeigte schon ein flüchtiger Anblick der von Auwers[1]) gegebenen Zusammenstellung, welche bis in die sechziger Jahre als vollständig anzusehen ist, dass dies leider ganz unthunlich war. Einestheils ist die Genauigkeit der älteren, nicht registrirten und blos gelegentlich angestellten Beobachtungen an meistens nur einem oder zwei Fäden für eine derartige Untersuchung viel zu klein und steht in keinem Verhältniss zur Sicherheit der neueren, welche speciell zur Erforschung der Eigenbewegung unternommen und mit der möglichsten Sorgfalt ausgeführt wurden; und anderentheils fallen die neueren Beobachtungen fast durchweg mit genügend zahlreichen von Herrn Wagner zusammen, und ist ausserdem Grund vorhanden zur Vermuthung, dass persönliche, durch die verschiedene Helligkeit der Sterne bedingte Unterschiede zwischen den einzelnen Beobachtern bestehen, welche sich wegen mangelnden Materials nicht mit Sicherheit bestimmen lassen, welche aber möglicherweise so gross sind, dass sie etwaige aus der Vereinigung der verschiedenen Beobachtungsreihen abgeleiteten Resultate ganz illusorisch machen könnten. Die Beobachtungen der Rectascensionsdifferenzen von O. Struve wären zwar wegen des längeren Zeitraums, den sie umfassen, geeigneter zu der vorliegenden Aufgabe wie die Wagner'schen, doch sind sie meistens nur ein Mal jährlich nach der Gehörmethode angestellt und kann daher ihre Sicherheit mit derjenigen der registrirten Beobachtungen nicht rivalisiren. Ausserdem treten bei ihnen, wie schon erwähnt, Fehlerquellen auf, die nicht auf den Beobachter sondern auf das Instrument zurückgeführt werden müssen, und endlich ist die Vereinigung beider Reihen, abgesehen von persönlichen Unterschieden, sehr unvortheilhaft, weil die Beobachtungen von O. Struve nur die Rectascensionsdifferenzen zwischen Procyon und den Sternen *b* und *c* enthalten, welche von Wagner in den ersten Jahren garnicht und in den letzten nur sehr selten beobachtet sind. Aus diesen Gründen habe ich von sämmtlichen anderen Beobachtungen ganz abgesehen und will nur zum Schluss die Rectascensionsdifferenzen von O. Struve einer besonderen Betrachtung unterziehen.

Nachdem ich die Beobachtungen der Jahre 1852 — 1853 und 1861 — 1872 den Vol. II, XI und XII der Observations de Poulkova und die übrigen, welche bis jetzt noch nicht publicirt sind, den mir zu diesem Zweck freundlichst von Herrn Wagner zur Verfügung gestellten Manuscripten entnommen hatte, wurden sie sämmtlich auf ein und dieselbe Epoche reducirt, wozu ich die nahezu in der Mitte zwischen den äussersten Beobachtungsdaten gelegene von 1867.0 wählte. Aus den oben gegebenen relativen Lagen der Vergleichsterne und dem für 1865.0 geltenden Orte von Procyon $\alpha = 7^h\ 32^m\ 14^s$ $\delta = +\ 5°\ 34'.1$ ergaben sich die folgenden Unterschiede der Sternconstanten der Vergleichsterne gegen die von Procyon:

---

1) Unreg. Eigenbew. I. pag. 47 — 53 u. Berliner Monatsberichte. Mai 1873, pag. 397—405.

	Δa	Δb	Δc	Δd
Stern *d*	— 0,00083	+ 0,00008	+ 0,00052	+ 0,00021
» *b*	+ 0,00060	0,00000	+ 0,00011	+ 0,00005
» *c*	+ 0,00018	— 0,00002	— 0,00010	— 0,00004
» *a*	— 0,00079	— 0,00001	— 0,00019	— 0,00008

Diese Grössen sind zwar selbst nicht vollkommen constant, jedoch geht ihre Aenderung so langsam vor sich, dass sie hier ohne Bedenken als unveränderlich betrachtet werden können; die Reduction auf das mittlere Aequinoctium jedes Beobachtungsjahres kann dabei als ganz exact angesehen werden, nur bei der Reduction für Präcession auf 1867,0 entstehen kleine Fehler, die aber auch nur bis auf zwei Tausendstel einer Zeitsecunde anwachsen können. Wie diese Zusammenstellung zeigt, hat ausserdem die Nutation auf die Rectascensionsdifferenzen nur einen ganz verschwindend kleinen Einfluss, und es genügte daher, die einzelnen Beobachtungen für Aberration zu corrigiren, um sie auf das mittlere Aequinoctium des Beobachtungsjahres zu reduciren. Hierzu benutzte ich folgende kleine Tafel, die diese Correctionen von 10 zu 10 Tagen in Einheiten der dritten Stelle der Zeitsecunde giebt:

	d	*b*	*c*	*a*		*d*	*b*	*c*	*a*
Jan. 10	+ 0,6	+ 0,2	— 0,1	— 0,4	Oct. 12	+ 10,6	+ 2,3	— 2,0	— 3,9
» 20	— 1,2	— 0,2	+ 0,2	+ 0,3	» 22	+ 10,6	+ 2,3	— 2,0	— 3,9
» 30	— 3,1	— 0,6	+ 0,6	+ 1,0	Nov. 1	+ 10,2	+ 2,2	— 2,0	— 3,8
Febr. 9	— 4,8	— 1,0	+ 0,9	+ 1,7	» 11	+ 9,5	+ 2,1	— 1,8	— 3,6
» 19	— 6,4	— 1,3	+ 1,2	+ 2,3	» 21	+ 8,6	+ 1,9	— 1,7	— 3,3
Mrz. 1	— 7,8	— 1,6	+ 1,5	+ 2,8	Dec. 1	+ 7,4	+ 1,6	— 1,4	— 2,9
» 11	— 8,9	— 1,9	+ 1,7	+ 3,2	» 11	+ 5,9	+ 1,3	— 1,1	— 2,3
» 21	— 9,8	— 2,1	+ 1,9	+ 3,6	» 21	+ 4,3	+ 1,0	— 0,8	— 1,7
» 31	— 10,3	— 2,2	+ 2,0	+ 3,8	» 31	+ 2,5	+ 0,6	— 0,5	— 1,1
Apr. 10	— 10,6	— 2,3	+ 2,0	+ 3,9					

Hierauf wurden die beobachteten Rectascensionsdifferenzen mit Präcession und der mittleren Eigenbewegung von Procyon, welche letztere ich dem Auwers'schen Fundamentalcataloge für die Zonenbeobachtungen gemäss zu — 0ˢ,0474 annahm, auf die Epoche 1867,0 reducirt und ausserdem an dieselben die Reduction auf den Schwerpunkt des Systems angebracht, welche ich für die vor 1860 gemachten Beobachtungen direct aus Auwers' Elementen V [1]) berechnete und für die späteren der Tafel in der Einleitung zum Fundamentalcataloge entnahm. An solchen Tagen, wo der Uhrgang so gross war, dass er einen Einfluss auf die dritte Stelle haben konnte, ist er mit berücksichtigt worden. Diese Correction beträgt in den meisten Fällen, wo sie überhaupt bemerklich ist, nur 0ˢ,001 für den

1) Berliner Monatsberichte. Mai 1873, pag. 391.

Stern *d* und ist für die übrigen Vergleichsterne völlig verschwindend; nur an einigen wenigen Tagen erreicht sie einen grösseren Werth, und zwar für die Beobachtungen vom März 1852, wo sie für $P-d$ + 0ˢ002 beträgt, vom Februar 1862, wo sie für $P-d = -$ 0ˢ004 und für $P-b = -$ 0ˢ001 ist, und endlich vom 12. December 1869, wo die Correctionen von $P-d = -$ 0ˢ003 und von $P-a$ und $P-b = -$ 0ˢ001 sind.

In der folgenden Tafel gebe ich eine Zusammenstellung sämmtlicher Wagner'scher Beobachtungen zugleich mit den aus ihnen folgenden, auf 1867,0 reducirten, Rectascensionsdifferenzen zwischen dem Schwerpunkte des Procyon-Systems und den Vergleichsternen; neben denselben ist die Anzahl der Fäden angesetzt, an denen die schwachen Sterne beobachtet wurden, und unter *P* die Anzahl der beobachteten Fadenantritte von Procyon. Zum Verständniss der Tafel braucht nur noch hinzugefügt zu werden, dass Herr Wagner den Zustand der Bilder mit den Nummern 1 bis 6 zu bezeichnen pflegt, und zwar entspricht die Nummer 1 den ruhigsten und besten und 6 den schlechtesten Bildern[1]). Wo bei Procyon der Zustand der Bilder nicht angegeben war, habe ich ihn so angenommen, wie er bei kurze Zeit vor oder nach Procyon culminirenden Sternen notirt war, und in Klammern eingeschlossen; wenn keine solche Sterne beobachtet waren, liess ich die Bezeichnung ganz aus und habe die Beobachtungen später so in die Rechnung eingetragen, als ob sie beim Zustande der Bilder 3—4 angestellt wären. Am 27. März 1852 findet sich das Bild β notirt, welches ungefähr der Nummer 3 entspricht[2]); ich habe daher letztere hier angesetzt.

		P—d			P—b			P—c			P—a				
		beob.	1867.0	F.	beob.	1867.0	F.	beob.	1867.0	F.	beob.	1867.0	F.	P.	Bild.
						1. Gehörbeobachtungen.									
1	1852 Mz. 12	+115ˢ418	+114ˢ664	7	—	—	—	—	—	—	—	—	—	7	—
2	» 13	469	715	7	—	—	—	—	—	—	—	—	—	7	—
3	» 19	278	523	7	—	—	—	—	—	—	—	—	—	7	—
4	» 21	371	618	7	—	—	—	—	—	—	—	—	—	7	—
5*	» 27	384	631	6	—	—	—	—	—	—	—	—	—	7	3
6	1853 Mz. 16	260	547	7	—	—	—	—	—	—	—	—	—	7	—
7*	1859 Oct. 19	048	673	5	—	—	—	—	—	—	—	—	—	7	—
8	Nov. 8	072	699	6	—	—	—	—	—	—	—	—	—	7	—
9*	» 12	039	665	4	—	—	—	—	—	—	—	—	—	7	—
10*	» 14	114.928	556	7	—	—	—	—	—	—	—	—	—	7	—
11	» 18	115.042	669	6	—	—	—	—	—	—	—	—	—	6	—
12	» 27	036	664	7	—	—	—	—	—	—	—	—	—	7	—
13*	Dec. 11	006	632	7	—	—	—	—	—	—	—	—	—	6	—
14*	1860 Feb. 12	114.810	437	5	—	—	—	—	—	—	—	—	—	5	—
15*	Mz. 15	905	530	4	—	—	—	—	—	—	—	—	—	7	—
16*	» 17	870	496	5	—	—	—	—	—	—	—	—	—	5	—
17	» 18	910	536	5	—	—	—	—	—	—	—	—	—	5	—
18	1861 Jan. 1	885	564	7	—	—	—	—	—	—	—	—	—	7	4
19	» 28	897	576	7	—	—	—	—	—	—	—	—	—	7	3
20	» 29	941	620	5	—	—	—	—	—	—	—	—	—	7	4

1) Vorrede zu Vol. XI der Observations de Poulkova, pag. (4).

2) Observations de Poulkowa. Vol. I, pag. (84).

		$P-d$			$P-b$			$P-c$			$P-a$				
		beob.	1867.0	F.	beob.	1867.0	F.	beob.	1867.0	F.	beob.	1867.0	F.	P.	Bild.
21	1861 Feb. 16	+114^s.970	+114^s.650	7	+24^s.457	+24^s.133	2	—	—	—	—	—	—	7	(3)
22	» 19	950	631	7	—	—	—	—	—	—	—	—	—	7	(3—4)
23	» 20	—	—	—	625	310	2	—	—	—	—	—	—	7	3
24	» 21	977	656	7	—	—	—	—	—	—	—	—	—	7	(3)
25	» 25	115.000	680	7	—	—	—	—	—	—	—	—	—	7	(2—3)
26	Mz. 9	114.909	589	7	682	361	2	—	—	—	—	—	—	7	3
27	» 15	886	568	7	680	360	2	—	—	—	—	—	—	7	3
28	» 27	115.072	753	7	—	—	—	—	—	—	—	—	—	7	(3)
29	» 30	114.978	661	7	—	—	—	—	—	—	—	—	—	7	(3)
30	Oct. 17	929	662	7	—	—	—	—	—	—	—	—	—	7	2—3
31*	» 18	943	676	7	—	—	—	—	—	—	—	—	—	7	4
32	Nov. 12	864	600	7	—	—	—	—	—	—	—	—	—	7	4—5
33*	Dec. 29	979	716	7	926	653	1	—	—	—	—	—	—	7	(5)
34	1862 Jan. 2	115.008	742	7	—	—	—	—	—	—	—	—	—	6	3
35	» 9	114.858	590	5	468	195	1	—	—	—	—	—	—	6	4
36	Feb. 7	922	651	7	783	512	2	—	—	—	—	—	—	7	4
37	» 12	821	553	7	422	154	2	—	—	—	—	—	—	7	(5)
38	» 16	966	697	7	785	517	2	—	—	—	—	—	—	6	(4)
39*	» 18	836	567	6	619	351	2	—	—	—	—	—	—	7	5
40	Mz. 5	885	621	7	499	233	2	—	—	—	—	—	—	7	(4)
41	» 6	915	650	7	714	449	2	—	—	—	—	—	—	7	(3)
42	» 10	912	647	5	746	481	2	—	—	—	—	—	—	7	(3)
43	» 15	806	541	7	420	156	2	—	—	—	—	—	—	7	4
44	» 17	864	599	7	627	363	2	—	—	—	—	—	—	7	3
45	» 19	793	528	7	653	389	2	—	—	—	—	—	—	7	3—4
46	» 20	935	670	7	524	260	2	—	—	—	—	—	—	7	3
47	» 21	—	—	—	592	330	2	—	—	—	—	—	—	7	(2)
48	» 22	800	537	7	453	191	2	—	—	—	—	—	—	7	(4)
49	» 25	928	665	7	566	304	2	—	—	—	—	—	—	7	4
50	» 26	753	490	7	406	144	2	—	—	—	—	—	—	7	3—4
51	» 27	908	645	7	674	412	2	—	—	—	—	—	—	7	(4)
52	1879 Mz. 23	113.834	447	5	—	—	—	—	—	—	—43^s.690	—43^s.062	1	5	—
53	» 27	973	587	7	23.582	221	2	—	—	—	415	42.787	6	6	3
54	» 28	991	605	7	707	347	2	—	—	—	415	787	6	6	—
55	1880 Feb. 18	979	633	6	632	309	2	—	—	—	431	769	6	6	3—4
56*	» 19	991	645	5	—	—	—	—	—	—	487	825	5	6	3—4
57*	» 22	—	—	—	—	—	—	—	—	—	430	768	6	6	4
58	Mz. 14	947	600	6	500	179	2	—	—	—	—	—	—	7	3
59	» 16	—	—	—	—	—	—	—	—	—	382	717	5	7	3—4
60	» 17	114.029	682	7	—	—	—	—	—	—	393	728	4	7	3—4
61	» 20	113.958	610	7	579	258	1	—	—	—	—	—	—	7	3—4
62	» 22	—	—	—	—	—	—	—	—	—	496	829	5	7	4
63*	» 29	—	—	—	—	—	—	—	—	—	525	857	4	7	5
64*	» 30	—	—	—	—	—	—	—	—	—	424	756	6	6	4—3

5. Beob. während der Dämmerung. — 7. Bilder mittelmässig bis schlecht. — 9. *d* sehr schwach. Diffuse u. unruhige Bilder. — 10, 13. Bilder sehr schlecht. — 14. Bilder und Beleuchtung schlecht. — 15. *d* schwach. — 16. Bilder recht schlecht. — 31. *d* schwach. — 33. Die Bilder dehnten sich so aus, dass die kleinen Sterne sehr schwach wurden. — 39. Diffus, schwierige Beobachtung. — 56, 57, 63. Nicht ganz heiter. — 64. Luft nicht genügend durchsichtig.

2. Registrirte Beobachtungen.

1	1863 Feb. 19	+114^s.878	+114^s.668	9	+24^s.581	+24^s.371	5	—22^s.049	—22^s.255	5	—42^s.547	—42^s.748	5	9	4
2	» 20	—	—	—	—	—	—	—	—	—	540	741	8	11	4
3	» 23	848	638	11	553	344	6	146	352	4	656	857	6	9	(2—3)
4*	» 25	783	574	8	531	322	5	107	312	4	615	814	5	9	3
5*	Mz. 1	882	672	11	622	413	5	112	316	5	520	719	5	9	(3)
6*	» 5	837	628	8	—	—	—	—	—	—	553	751	6	11	(2)
7	» 10	914	706	11	690	483	5	066	267	5	536	733	5	9	3
8	» 11	840	632	9	559	352	5	177	378	5	631	828	5	9	2
9	» 12	874	665	9	592	385	5	128	329	5	555	752	4	9	3
10	» 15	860	652	11	626	420	5	106	307	5	567	743	6	9	3

		P—d			P—b			P—c			P—a				
		beob.	1867.0	F.	beob.	1867.0	F.	beob.	1867.0	F.	beob.	1867.0	F.	P.	Bild.
11	1863 Mz. 16	+114ˢ.859	+114ˢ.652	9	+24ˢ.556	+24ˢ.350	5	—22ˢ.158	—22ˢ.359	5	—42ˢ.562	—42ˢ.758	5	9	3—2
12	» 24	860	652	9	615	410	5	147	347	5	594	788	4	9	4
13	Apr. 4	—	—	—	—	—	—	—	—	—	582	774	7	11	3
14*	Oct. 21	756	601	9	—	—	—	—	—	—	704	873	5	11	4—5
15	» 22	832	678	11	569	401	6	152	322	5	556	725	6	9	3
16	» 28	894	740	11	565	398	5	127	296	5	607	775	6	9	3
17	» 29	—	—	—	595	428	5	139	308	5	569	737	5	9	2—3
18	Nov. 9	881	727	11	553	388	6	109	277	4	574	741	4	9	4
19	» 28	858	707	11	596	435	6	096	259	5	544	706	6	9	3—4
20*	Dec. 14	888	736	11	610	450	5	174	335	5	555	714	6	9	4—5
21	» 28	864	713	11	564	407	6	097	255	5	557	712	6	9	4
22	1864 Jan. 28	801	647	11	459	303	10	314	465	5	622	774	6	5	4—5
23	Feb. 18	854	701	11	618	466	6	142	291	5	549	698	6	9	4—3
24*	» 19	792	639	11	488	336	6	320	469	5	695	840	6	9	5—4
25	Mz. 3	800	647	11	527	376	6	137	283	5	633	775	5	9	3—2
26	» 6	787	636	11	535	386	6	192	336	5	616	756	5	9	3
27	» 12	883	731	11	507	358	6	176	320	6	635	775	6	9	3
28	» 21	790	639	11	538	391	10	192	334	5	614	752	6	6	3—4
29	» 22	813	662	9	561	414	6	123	265	6	640	788	5	9	3—4
30*	» 25	799	648	11	522	375	6	034	276	5	604	741	6	9	5
31	» 28	805	655	11	576	430	6	113	254	5	624	761	6	9	3—2
32	Oct. 12	—	—	—	—	—	—	138	252	5	562	676	6	10	4—3
33*	» 16	755	657	10	549	441	6	179	292	5	563	676	6	8	4
34	» 19	877	780	10	584	474	6	122	235	5	586	698	6	9	3
35	» 20	—	—	—	539	429	6	154	267	5	588	700	6	9	3
36*	» 29	770	671	10	473	364	6	181	293	5	617	729	6	9	4
37*	Nov. 1	—	—	—	384	276	4	185	296	5	566	677	6	9	3
38	» 3	766	670	11	542	434	6	220	331	5	600	711	5	9	3—4
39	» 11	823	727	11	624	517	5	146	256	5	618	728	6	8	3
40*	1865 Feb. 1	729	634	10	321	225	6	252	345	4	697	788	6	9	4
41*	» 2	832	736	11	441	345	6	194	287	5	649	739	6	8	3—4
42*	» 9	800	704	10	530	435	5	184	276	5	597	686	6	9	4
43*	» 17	945	849	3	477	383	6	144	235	5	655	743	6	9	4
44	» 25	719	623	11	468	375	5	282	372	5	702	788	6	9	4
45	Mz. 4	765	670	10	479	387	6	209	296	5	673	757	6	9	2
46	» 13	751	656	11	503	412	6	176	262	5	679	762	6	9	3
47	» 15	780	685	11	489	399	6	238	324	5	600	683	6	9	2
48	» 17	805	710	10	502	412	6	204	290	5	563	646	6	9	3—2
49	» 20	766	671	11	547	457	6	202	287	5	618	699	5	9	3—4
50	» 21	724	629	11	476	387	6	200	285	5	647	728	6	9	2—3
51	» 25	749	655	11	500	412	6	213	297	5	650	730	6	9	2
52	» 31	—	—	—	—	—	—	—	—	—	689	769	9	9	2—3
53	Nov. 11	669	631	10	407	359	6	267	318	5	633	685	5	9	3—4
54*	» 13	732	693	10	466	418	6	253	304	4	626	678	6	9	5
55	» 15	724	685	11	485	438	6	171	222	5	667	718	6	9	3
56	» 22	790	652	11	511	465	5	241	291	5	659	709	6	9	4—3
57*	» 28	—	—	—	—	—	—	—	—	—	685	734	8	9	2—3
58	» 30	798	760	10	567	522	6	145	193	5	644	693	6	9	3—2
59*	Dec. 5	736	698	11	595	549	6	179	226	5	624	672	6	9	4—3
60	1866 Jan. 30	745	704	11	436	398	6	215	251	5	690	725	6	9	2
61	Feb. 13	739	701	11	445	410	6	261	294	5	661	692	6	9	3
62	» 26	677	637	8	401	367	6	222	253	5	698	727	5	9	3
63*	Mz. 7	670	631	11	425	391	6	261	290	5	651	678	6	9	3—4
64	» 10	749	710	11	438	405	5	218	247	5	694	721	6	9	4
65	» 12	656	616	11	481	448	5	273	302	5	687	714	6	9	3—4
66	» 16	673	634	4	476	444	6	244	272	5	689	715	6	9	3
67	» 22	735	697	11	455	425	6	261	287	5	711	734	6	9	3
68	» 25	—	—	—	444	414	5	256	282	5	689	712	6	9	2—3
69*	» 27	—	—	—	—	—	—	—	—	—	745	769	8	11	3
70	Dec. 2	—	—	—	353	367	6	364	353	5	764	755	6	9	4
71	» 15	759	778	10	412	427	6	168	255	4	736	724	5	9	5—4
72	1867 Mz. 1	621	638	10	281	305	6	392	365	5	839	811	6	9	4—3
73	» 9	590	606	10	353	378	6	308	278	5	782	753	6	9	3—4
74	» 13	678	695	10	318	443	6	378	349	5	770	740	6	8	3—4

		P—d			*P—b*			*P—c*			*P—a*				
		beob.	1867.0	F.	beob.	1867.0	F.	beob.	1867.0	F.	beob.	1867.0	F.	P.	Bild.
75	1867 Mz. 18	+114ˢ.608	+114ˢ.626	10	+24ˢ.358	+24ˢ.385	6	—22ˢ.310	—22ˢ.279	5	—42ˢ.780	—42ˢ.748	5	9	4—3
76	» 19	656	674	11	354	380	6	423	392	5	821	788	6	9	4
77*	Oct. 12	703	774	5	—	—	—	—	—	—	716	660	9	10	4
78	» 13	694	765	11	459	523	5	248	189	4	713	657	6	9	3—4
79	» 14	635	706	10	383	447	5	347	288	5	748	692	6	9	2—3
80	» 25	651	723	11	393	458	5	327	266	5	713	655	5	9	3
81*	» 27	671	743	10	338	403	6	297	236	4	752	694	6	9	3
82	» 31	651	726	10	348	415	5	352	289	5	747	687	6	9	3
83*	Nov. 20	—	—	—	—	—	—	—	—	—	717	654	10	10	4
84*	Dec. 19	642	718	11	387	460	6	308	237	5	738	669	5	9	2—3
85*	1868 Feb. 14	614	687	10	354	434	6	367	286	5	829	748	6	9	3—4
86*	» 21	621	694	11	357	438	6	350	268	5	814	732	6	9	4—3
87	» 27	615	689	11	332	415	5	426	342	5	862	777	5	9	3
88*	» 28	636	709	10	364	446	4	—	—	—	775	690	9	9	3
89	Mz. 5	624	697	11	362	444	6	304	218	5	813	728	6	9	4
90	» 16	631	705	11	355	439	6	354	267	5	779	692	6	9	3
91	» 17	623	697	11	345	429	6	407	320	5	791	704	6	9	3—4
92	» 18	578	652	11	311	395	6	329	241	5	848	761	6	9	3
93	» 24	674	748	11	333	418	6	382	294	5	836	747	6	9	3
94	» 30	—	—	—	—	—	—	—	—	—	784	694	9	9	3
95	» 31	—	—	—	—	—	—	—	—	—	829	739	9	9	3
96	Apr. 1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	772	681	8	10	3
97	» 3	—	—	—	—	—	—	—	—	—	791	700	9	10	2
98	Dec. 14	—	—	—	—	—	—	—	—	—	746	622	10	10	3
99	1869 Feb. 2	641	760	11	360	495	6	442	305	5	856	722	7	9	3
100*	» 20	—	—	—	—	—	—	—	—	—	846	707	9	10	3
101	» 25	551	681	11	246	485	6	428	298	5	892	752	6	9	3—4
102	Mz. 18	556	686	11	305	446	6	451	307	5	872	729	6	9	3
103	» 19	—	—	—	—	—	—	—	—	—	870	726	10	10	4
104	» 25	582	713	11	285	427	6	490	345	5	885	740	6	9	2
105	» 30	534	664	11	273	416	5	425	279	5	869	724	6	9	2—3
106	» 31	—	—	—	—	—	—	—	—	—	862	717	10	9	3
107	Apr. 1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	843	697	9	9	3
108	» 2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	891	745	10	10	2
109	Dec. 12	550	732	11	182	366	6	—	—	—	908	729	4	10	5
110	1870 Jan. 31	507	689	11	—	—	—	—	—	—	—	—	—	11	5—4
111	Feb. 3	552	736	11	241	432	6	486	294	5	884	694	6	9	3
112	» 9	526	711	11	—	—	—	—	—	—	914	722	10	10	3—4
113	Mz. 5	483	669	10	210	405	6	549	351	5	928	738	6	9	2—3
114	» 11	—	—	—	—	—	—	—	—	—	935	739	9	10	3—4
115	» 17	536	722	11	264	461	6	398	199	5	932	735	6	9	4—3
116	» 18	480	664	11	220	417	6	516	316	5	966	768	6	9	3—4
117	» 19	552	736	10	214	411	6	483	283	5	926	727	6	9	3—4
118	» 23	527	711	11	197	395	6	562	362	5	968	769	7	9	3
119	» 28	453	639	11	129	328	6	555	354	5	953	753	6	9	3
120	» 29	—	—	—	194	393	6	—	—	—	885	685	8	9	2—3
121	» 30	513	699	11	177	374	5	442	241	7	919	719	6	9	2
122*	» 31	—	—	—	—	—	—	—	—	—	914	714	9	10	2—1
123	Apr. 4	—	—	—	—	—	—	—	—	—	888	687	9	10	3—2
124	1871 Feb. 6	456	693	11	144	391	6	610	363	5	43.034	790	5	9	3—4
125	Mz. 9	453	690	9	151	402	6	580	327	5	42.954	704	6	9	3—4
126	» 11	477	714	11	195	446	6	554	301	5	933	683	6	8	—
127	» 24	540	777	11	214	464	6	—	—	—	942	690	9	9	3—4
128	» 25	434	673	11	—	—	—	—	—	—	988	735	9	10	4
129	» 31	—	—	—	—	—	—	—	—	—	988	734	9	9	3
130*	1872 Feb. 19	434	724	11	133	435	6	542	242	5	43.036	738	6	9	3—4
131	Mz. 6	389	680	11	109	414	6	667	361	5	090	788	7	9	3
132	» 9	338	628	11	098	403	6	602	296	5	017	715	6	9	3
133	» 13	285	576	11	011	316	6	710	403	5	110	807	6	9	4
134	» 22	357	648	11	002	309	6	619	311	5	091	786	6	9	3
135	» 23	310	601	11	071	378	6	719	411	5	161	856	6	9	3—2
136	1873 Mz. 14	332	674	11	121	479	6	714	355	5	108	754	6	9	3—4
137	» 15	337	679	11	015	373	6	718	359	5	109	755	6	9	3—4
138	» 26	—	—	—	107	466	6	628	268	6	060	704	6	9	2—3

		P−d			P−b			P−c			P−a				
		beob.	1867.0	F.	beob.	1867.0	F.	beob.	1867.0	F.	beob.	1867.0	F.	P.	Bild.
139	1873 Mz. 27	—	—	—	+23ˢ.994	+24ˢ.353	6	−22ˢ.757	−22ˢ.397	7	−43ˢ.121	−42ˢ.765	6	9	3—4
140*	» 28	+114ˢ.397	+114ˢ.740	11	24.051	411	6	673	312	4	079	722	6	9	3—4
141	» 29	325	666	11	055	415	6	668	307	5	095	738	6	9	1—2
142*	» 30	316	659	8	—	—	—	—	—	—	066	709	9	10	3
143*	Apr. 2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	125	768	9	9	2
144	1874 Oct. 30	—	—	—	—	—	—	—	—	—	079	653	10	10	4—3
145	1875 Feb. 26	281	720	9	23.917	372	2	—	—	—	194	745	10	10	2
146	Mz. 5	—	—	—	—	—	—	—	—	—	145	695	10	10	3
147	» 8	—	—	—	882	339	4	—	—	—	157	697	10	10	3
148	» 9	184	622	11	907	364	4	—	—	—	184	734	10	10	3
149	» 12	259	697	11	—	—	—	—	—	—	172	721	8	10	3
150	» 14	207	645	10	—	—	—	—	—	—	126	675	10	9	4
151	» 15	217	656	11	—	—	—	—	—	—	146	695	9	11	4
152	» 19	—	—	—	—	—	—	—	—	—	165	712	8	11	3
153	» 26	—	—	—	—	—	—	—	—	—	157	703	9	10	3—4
154	1876 Feb. 10	190	676	11	—	—	—	—	—	—	263	773	9	10	4
155	» 12	187	674	11	—	—	—	—	—	—	212	721	10	9	4
156	Apr. 2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	193	693	10	10	3
157*	1879 Mz. 20	078	691	11	732	370	6	980	343	5	420	793	6	9	4—3
158*	1880 Feb. 23	+113.845	498	6	—	—	—	—	—	—	446	784	10	10	4—5
159*	Mz. 1	950	603	11	—	—	—	—	—	—	437	773	8	9	3—4
160	» 8	923	576	11	653	332	4	—	—	—	440	775	9	9	4
161	» 21	114.009	662	10	711	391	4	—	—	—	446	779	10	9	3
162*	» 27	113.971	624	6	588	268	6	—	—	—	502	834	10	9	4—5
163*	Oct. 16	916	612	9	—	—	—	—	—	—	401	711	9	11	4—5
164*	1881 Jan. 21	—	—	—	—	—	—	—	—	—	522	835	7	11	4
165	» 28	114.051	743	11	822	537	4	—	—	—	442	744	10	9	4
166	Feb. 23	—	—	—	—	—	—	—	—	—	421	720	9	10	4
167	» 24	—	—	—	—	—	—	—	—	—	416	714	9	10	5—4
168	Mz. 14	113.939	631	11	—	—	—	—	—	—	445	740	9	10	3
169	» 17	889	581	11	—	—	—	—	—	—	439	734	9	11	4
170	» 23	987	679	11	—	—	—	—	—	—	473	766	11	11	4
171	Apr. 2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	495	787	11	11	3
172	» 3	—	—	—	—	—	—	—	—	—	396	688	11	12	2
173*	Dec. 13	851	585	9	—	—	—	—	—	—	390	662	10	10	4—3
174	1882 Jan. 20	890	620	10	—	—	—	—	—	—	424	689	10	10	3
175	Feb. 3	—	—	—	—	—	—	—	—	—	441	704	10	11	3
176	Mz. 8	—	—	—	—	—	—	—	—	—	438	696	9	10	2—3
177*	» 11	883	612	11	—	—	—	—	—	—	469	727	9	11	3—4
178	» 17	879	609	11	481	240	3	—	—	—	448	709	9	11	2
179	» 21	—	—	—	—	—	—	—	—	—	461	717	11	11	3
180	Apr. 1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	474	728	9	12	2
181	» 2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	479	733	9	10	2
182	Oct. 16	—	—	—	—	—	—	—	—	—	449	691	10	10	3

4. *d* schwach. — 5. *d* und *a* etwas schwach. — 6. *d* sehr schwach. — 14. Beide kleinen Sterne sehr schwer zu beob. — 20. *d* etwas schwach. — 24. Die Fadenantritte von *c* zeigen beträchtlich stärkere Abweichungen als gewöhnlich. — 30. Diese Beob. wurden nur angestellt, um den Einfluss der schlechten Bilder zu bestimmen. Die kleinen Sterne waren äusserst schwach. — 33. Leichte Wolken. — 36. *c* etwas schwach. — 37. *b* und *c* zu schwach. — 40. Temp. = — 20°,0 R. Procyon etwas diffus. — 41. Temp. = — 24°,0 R. — 42. Temp. = — 22°,5 R. *c* etwas schwach. — 43. Die kleinen Sterne schwach. — 54. Der Durchmesser von Procyon erstreckt sich auf 30″. — 57. Durch Wolken. Procyon wie ein Stern $2^m,3$. *a* schwach. — 59. Die Fadenantritte von *b* zeigen stärkere Abweichungen als gewöhnlich. — 63. Schlechte Feldbeleuchtung. — 69. Nicht ganz heiter. — 77. Dämmerung. *d* etwas schwach. — 81. *c* überaus schwach. — 83. Nicht ganz heiter. — 84. *d* recht hell, Temp. = — 22°,2 R. — 85. *b* und *c* sehr schwer zu beobachten. — 86. *d* sehr gut sichtbar. — 88. *b* zu schwach. — 100. Durch leichte Wolken. — 122. Nicht ganz heiter. — 130. Bei *d* Feldbeleuchtung schlecht, später besser. — 140, 142. Nicht ganz heiter. — 143. Ablesung etwas unsicher, weil die Secunden des Chronographen nur von halber Grösse sind. — 157. Die Länge der geraden und ungeraden Secunden ist ungleich. — 158. *d* recht schwach. — 159. Nicht ganz heiter. *d* sehr schwach. — 162. Ohne Feldbeleuchtung. — 163. *d* vielleicht zu schwach. Procyon sehr diffus. — 164. Schwache Beleuchtung. Zu verwerfen. — 173. *d* schwach. Procyon etwas diffus. 177. *d* schwach.

Wegen der grossen Ungleichheit der Bedingungen, unter denen die einzelnen Beobachtungen angestellt sind, war es unmöglich, allen das gleiche Gewicht zuzuertheilen; eine Schätzung der Genauigkeiten der einzelnen Rectascensionsdifferenzen ist aber sehr schwierig und ohne eine gewisse Willkürlichkeit kaum durchzuführen, da der wahrscheinliche Fehler einer solchen Differenz nicht allein von der Anzahl der beobachteten Fadenantritte der beiden Sterne abhängt, sondern auch von dem Zustande der Bilder. Da ausserdem angenommen werden muss, dass der Beobachter an einem Tage nicht genau ebenso die Fadenantritte auffasst, wie an anderen, so muss zu dem Ausdrucke für den wahrscheinlichen Fehler noch ein constantes Glied hinzugefügt werden, welches gewissermassen die untere Grenze angiebt, bis auf welche derselbe bei Vermehrung der Zahl der Fäden bis ins Unendliche herabgedrückt werden kann. Bezeichnet man dieses letztere Glied mit ζ, die wahrscheinlichen Fehler der einzelnen Fadenantritte für beide Sterne mit ε_1 und ε_2 und die Anzahl der Fäden resp. mit n_1 und n_2, so kann man dem wahrscheinlichen Fehler einer Beobachtung die Form

$$e = \sqrt{\zeta^2 + \frac{\varepsilon_1^2}{n_1} + \frac{\varepsilon_2^2}{n_2}}$$

geben, worin alle drei Constanten ζ, ε_1, ε_2 als von dem Zustande der Bilder abhängig angenommen werden müssen.

Während nun ε_1 und ε_2 aus den Originalbeobachtungen leicht zu berechnen sind, ist dies für ζ nicht möglich, ohne vorher eine Kenntniss von der Grösse des wahrscheinlichen Fehlers selbst erlangt zu haben, und dies kann mit genügender Sicherheit vor der definitiven Ausgleichung der Beobachtungen nicht geschehen. A priori lässt sich nur vermuthen, dass der Werth von ζ kleiner ist als ε_1 und ε_2, und dass folglich bei der Bestimmung der relativen Gewichte unter Vernachlässigung desselben wahrscheinlich kein bedeutender Fehler entsteht. Ich habe daher denselben vorläufig $= 0$ angenommen. Die einzelnen ε sind von Herrn Wagner aus der Uebereinstimmung der einzelnen Fadenantritte jedes Tages mit dem entsprechenden Mittel für die verschiedenen Luftzustände berechnet bei Gelegenheit einer von ihm ausgeführten vorläufigen Bearbeitung des sich speciell auf die Bestimmung der Parallaxe beziehenden Theiles seiner Beobachtungen aus den Jahren 1863 bis 1868. Da aber die Anzahl der Beobachtungen keine genügende war, um eine Trennung nach allen verschiedenen notirten Zuständen der Bilder zu gestatten und überhaupt eine derartige Zersplitterung des Materials nicht vortheilhaft sein dürfte, zog es Herr Wagner vor, die wahrscheinlichen Fehler nur für drei Gruppen von Bildern abzuleiten, wobei die Gruppe I die Bilder 1 bis 3, die Gruppe II die Bilder 3—4 bis 4 und die Gruppe III die Bilder 4—5 bis 5 umfasst, und fand als Resultate für die registrirten Beobachtungen die folgenden in Logarithmen der Hundertstel einer Zeitsecunde ausgedrückten wahrscheinlichen Fehler eines Fadenantritts:

	I	II	III
für Procyon	0,5655	0,6227	0,6800
» *a* u. *d*	0,6036	0,6949	0,7397
» *b* u. *c*	0,6176	0,7553	0,8831

Um dieselbe Untersuchung für die Gehörbeobachtungen zu machen, ist das vorhandene Material, namentlich was die Sterne *a* und *b* (von *c* sind nur registrirte Beobachtungen angestellt) anbetrifft, nicht ausreichend. Ich habe mich daher darauf beschränkt, für die Fadenantritte von Procyon den wahrscheinlichen Fehler gleich 0^s072 anzusetzen, welcher Werth in der Einleitung zu Vol. I der Observations de Poulkova (pag. (83)) im Mittel für die von Herrn **Wagner** beobachteten Sterne von 0° bis + 10° Declination geltend angegeben ist und demzufolge als einem mittleren Zustande der Bilder, also der Gruppe II entsprechend angenommen werden muss. Indem ich ferner von der Voraussetzung ausging, dass die Verhältnisse der wahrscheinlichen Fehler bei den verschiedenen Sternen und Bildern dieselben sind wie bei den registrirten Beobachtungen, erhielt ich für die Gehörbeobachtungen:

	I	II	III
für Procyon	0,8001	0,8573	0,9146
» *a* u. *d*	0,8382	0,9295	0,9743
» *b*	0,8522	0,9899	1,1177

Nimmt man nun als Einheit des Gewichts dasjenige eines registrirten Fadenantritts von Procyon bei den Bildern I an, so ergeben sich die folgenden Logarithmen der relativen Gewichte des einzelnen Fadenantritts für die verschiedenen Sterne:

	Registrirte Beobachtungen			Gehörbeobachtungen		
	I	II	III	I	II	III
Procyon	0,0000	9,8856	9,7711	9,5308	9,4164	9,3018
a u. *d*	9,9239	9,7413	9,6517	9,4546	9,2722	9,1824
b u. *c*	9,8959	9,6204	9,3649	9,4266	9,1512	8,8956

Das Gewicht einer Rectascensionsdifferenz erhält man hieraus, da $\zeta = 0$ gesetzt ist, nach der Formel $p = \frac{p_1 p_2}{p_1 + p_2}$, worin p_1 und p_2 die aus vorstehender Tabelle entnommenen, mit der Anzahl der Fäden multiplicirten Gewichte der Durchgänge der einzelnen Sterne bedeuten. Im Allgemeinen habe ich mich streng an diese Formel gehalten, jedoch musste mehrfach eine Abweichung eintreten, und zwar allemal, wenn ein Stern als sehr schwach bezeichnet war, oder wenn andere, bei der Beobachtung selbst gemachte Bemerkungen ihre Sicherheit in Frage stellten. In solchen Fällen setzte ich die Gewichte herunter, indem ich meistens die Bilder als der nächstfolgenden niedrigeren Gruppe entsprechend annahm.

Aus den aufgeführten Beobachtungen sind nun folgende Unbekannte zu bestimmen: 1) die mittleren Rectascensionsdifferenzen zwischen dem Schwerpunkte des Procyon-Systems und den Vergleichsternen, 2) Verbesserungen der relativen Eigenbewegungen, oder, indem man die im Fundamentalcataloge gegebene Eigenbewegung von Procyon als exact ansieht, die mit entgegengesetztem Zeichen genommenen Eigenbewegungen der Vergleichsterne, 3) die Parallaxe von Procyon und 4) Correctionen der **Auwers**'schen Elemente V. Letztere sind:

$T = 1795{,}629 \pm 0{,}455$ $\quad U = 39{,}866 \pm 0{,}359$
$n = 9{,}^\circ 02993 \pm 0{,}^\circ 08072$ $\quad a = 0{,}''9805 \pm 0{,}''0253$

von denen ich jedoch, da eine Verbesserung sämmtlicher Elemente bei der Kürze des seit dem Beginne der Beobachtungen bis jetzt durchlaufenen Bogens nicht erhalten werden konnte, nur eine Correction des Halbmessers als Unbekannte eingeführt habe, während ich die übrigen Elemente als nach Auwers genau bestimmt annahm.

Die Reduction der Beobachtungen am Passageninstrumente zur Herstellung des Catalogs der Pulkowaer Hauptsterne für 1865 hat gezeigt, dass zwischen den registrirten und den nach der Auge- und Ohr-Methode ausgeführten Beobachtungen constante Differenzen auftreten. Weil diese sich leicht auch in den Rectascensionsdifferenzen von Sternen so verschiedener Helligkeit, wie im vorliegenden Falle, zeigen können, habe ich bei den Sternen b und d für die Beobachtungen nach der einen oder der anderen Methode die mittleren Rectascensionsdifferenzen als verschieden vorausgesetzt, während für die beiden anderen Sterne die Unterscheidung wegfiel, da von $P - c$ keine Gehörbeobachtungen angestellt sind und von $P - a$ nur so wenige, dass ich dieselben, die ohnehin nur von einem sehr kleinen Gewichte wären, ganz unberücksichtigt gelassen habe.

Bezeichnet man die jedes einzelne Mal beobachtete Rectascensionsdifferenz zwischen Procyon und dem Vergleichsterne, reducirt auf den Schwerpunkt nach Auwers' Elementen und auf die Epoche 1867,0, mit $\Delta\alpha$, die angenäherte mittlere mit $\Delta\alpha_0$ und die daran noch anzubringende Correction für die registrirten und Gehörbeobachtungen resp. mit $\frac{x}{10}$ und $\frac{x'}{10}$; setzen wir ferner die in Zeit ausgedrückte Parallaxe von Procyon $= \frac{y}{10}$, die Correction der relativen Eigenbewegung $= \frac{z}{100}$ und die Verbesserung des Halbmessers der Bahn $= \delta a$, so liefert jede registrirte Beobachtung eine Gleichung von der Form:

$$\Delta\alpha = \Delta\alpha_0 + \frac{x}{10} - \frac{y}{10} R \{\cos\odot \sin\alpha - \sin\odot \cos\varepsilon \cos\alpha\} \sec\delta + \frac{z}{100}(t - 1867{,}0) - \delta a \cos n(t - T) \sec\delta$$

Setzt man hierin:

$$-R\{\cos\odot \sin\alpha - \sin\odot \cos\varepsilon \cos\alpha\} \sec\delta = b \qquad \frac{1}{10}(t - 1867{,}0) = c$$
$$-\cos n(t - T) = d \qquad 10(\Delta\alpha_0 - \Delta\alpha) = \nu \qquad 10\delta a \sec\delta = u$$

so wird:

$$x + by + cz + du + \nu = 0$$

Für die Gehörbeobachtungen ist x durch x' zu ersetzen.

Aus der Gesammtheit dieser Gleichungen sind die wahrscheinlichsten Werthe der Unbekannten x, x', y, z, u nach der Methode der kleinsten Quadrate zu bestimmen. Um mir die grosse und mühsame Rechenarbeit in etwas zu erleichtern, habe ich diese Gleichungen nicht für alle einzelnen Beobachtungen berechnet, sondern vor ihrer Aufstellung nach den Gewichten Mittelwerthe aus den Rectascensionsdifferenzen gezogen, welche so

nahe gleichzeitig beobachtet waren, dass ich den Coefficienten der Parallaxe als in der Zwischenzeit der Zeit proportional sich ändernd annehmen konnte, wodurch die Anzahl der Gleichungen fast auf ihren dritten Theil reducirt wurde. Die folgende Tafel giebt diese Mittelwerthe und die sich ergebenden Bedingungsgleichungen der Reihe nach für alle vier Vergleichsterne nebst den zugehörigen Gewichten. Als angenäherte mittlere Rectascensionsdifferenzen wurden dabei angewandt die mit dem arithmetischen Mittel aus sämmtlichen Beobachtungen nahe übereinstimmenden Werthe:

$P-d = +114^s.665$ $P-b = +24^s.400$ $P-c = -22^s.300$ $P-a = -42^s.730$

Als Einheit des Gewichts wurde ferner durchweg das Gewicht eines Durchgangs von Procyon an 10 Fäden bei den Bildern I angenommen.

1. P — d

	Δα						p	O — C
1852.21	+ 114^s.626	x'_d — 0.91y	— 1.48z_d	+ 0.90u	+ 0.39	= 0	0.4	— 0^s.011
53.20	547	— 0.88	— 1.38	+ 0.96	+ 1.18		0.1	— 0.080
59.84	682	+ 0.92	— 0.72	+ 0.77	— 0.17		0.2	+ 0.030
88	621	+ 0.81	— 0.71	+ 0.77	+ 0.44		0.1	— 0.024
92	652	+ 0.63	— 0.71	+ 0.77	+ 0.13		0.1	+ 0.012
60.12	437	— 0.55	— 0.69	+ 0.74	+ 2.28		0.1	— 0.174
20	522	— 0.89	— 0.68	+ 0.74	+ 1.43		0.1	— 0.079
61.00	564	+ 0.19	— 0.60	+ 0.65	+ 1.01		0.1	— 0.068
07	591	— 0.30	— 0.59	+ 0.64	+ 0.74		0.2	— 0.027
14	657	— 0.64	— 0.59	+ 0.63	+ 0.08		0.4	+ 0.047
19	578	— 0.86	— 0.58	+ 0.62	+ 0.87		0.2	— 0.028
24	707	— 0.96	— 0.58	+ 0.62	— 0.42		0.2	+ 0.103
81	642	+ 0.97	— 0.52	+ 0.54	+ 0.23		0.2	— 0.012
62.00	690	+ 0.17	— 0.50	+ 0.52	— 0.25		0.2	+ 0.057
12	621	— 0.55	— 0.49	+ 0.50	+ 0.44		0.3	+ 0.005
19	614	— 0.85	— 0.48	+ 0.49	+ 0.51		0.5	+ 0.005
22	582	— 0.94	— 0.48	+ 0.49	+ 0.83		0.5	— 0.025
79.23	557	— 0.95	+ 1.22	— 0.83	+ 1.08		0.2	— 0.040
80.13	639	— 0.61	+ 1.31	— 0.74	+ 0.26		0.1	+ 0.044
20	628	— 0.89	+ 1.32	— 0.73	+ 0.37		0.3	+ 0.041
63.14	628	x_d — 0.65	— 0.39	+ 0.36	+ 0.37		1.0	— 0.033
18	663	— 0.82	— 0.38	+ 0.35	+ 0.02		2.0	+ 0.006
20	652	— 0.90	— 0.38	+ 0.35	+ 0.13		1.2	— 0.003
81	686	+ 0.97	— 0.32	+ 0.26	— 0.21		1.2	— 0.020
85	727	+ 0.89	— 0.32	+ 0.25	— 0.62		0.3	+ 0.023
93	720	+ 0.59	— 0.31	+ 0.24	— 0.55		0.6	+ 0.022
99	713	+ 0.23	— 0.30	+ 0.23	— 0.48		0.3	+ 0.025
64.07	647	— 0.27	— 0.29	+ 0.22	+ 0.18		0.2	— 0.028
13	673	— 0.61	— 0.29	+ 0.21	— 0.08		0.6	+ 0.007
18	671	— 0.82	— 0.28	+ 0.20	— 0.06		1.4	+ 0.010

	Δα					p	O — C
1864.23	+ 114ˢ.652	x_d — 0.95y	— 0.28z_d	+ 0.19u	+ 0.13 = 0	1.1	— 0.006
80	705	+ 0.98	— 0.22	+ 0.10	— 0.40	1.0	— 0.006
85	703	+ 0.89	— 0.21	+ 0.09	— 0.38	0.8	— 0.006
65.09	691	— 0.37	— 0.19	+ 0.06	— 0.26	0.5	+ 0.014
11	742	— 0.52	— 0.19	+ 0.05	— 0.77	0.4	+ 0.068
17	652	— 0.79	— 0.18	+ 0.04	+ 0.13	1.2	— 0.015
21	669	— 0.92	— 0.18	+ 0.04	— 0.04	2.1	+ 0.004
87	663	+ 0.83	— 0.11	— 0.07	+ 0.02	1.2	— 0.050
91	733	+ 0.65	— 0.11	— 0.08	— 0.68	0.8	+ 0.024
66.08	704	— 0.33	— 0.09	— 0.10	— 0.39	0.5	+ 0.027
13	672	— 0.63	— 0.09	— 0.11	— 0.07	0.8	— 0.004
19	649	— 0.85	— 0.08	— 0.12	+ 0.16	1.2	— 0.022
22	697	— 0.93	— 0.08	— 0.12	— 0.32	0.5	+ 0.028
95	778	+ 0.46	— 0.01	— 0.23	— 1.13	0.2	+ 0.070
67.17	622	— 0.78	+ 0.02	— 0.27	+ 0.43	0.6	— 0.055
20	667	— 0.89	+ 0.02	— 0.27	— 0.02	0.9	— 0.007
80	745	+ 0.98	+ 0.08	— 0.36	— 0.80	2.2	+ 0.019
96	718	+ 0.41	+ 0.10	— 0.39	— 0.53	0.5	+ 0.006
68.13	691	— 0.61	+ 0.11	— 0.41	— 0.26	0.6	+ 0.005
16	697	— 0.75	+ 0.12	— 0.41	— 0.32	1.2	+ 0.015
21	708	— 0.91	+ 0.12	— 0.42	— 0.43	1.7	+ 0.030
69.09	760	— 0.39	+ 0.21	— 0.54	— 0.95	0.5	+ 0.065
15	681	— 0.70	+ 0.21	— 0.55	— 0.16	0.3	— 0.006
23	688	— 0.95	+ 0.22	— 0.56	— 0.23	1.4	+ 0.007
94	732	+ 0.52	+ 0.29	— 0.65	— 0.67	0.3	+ 0.011
70.09	718	— 0.37	+ 0.31	— 0.67	— 0.53	0.7	+ 0.020
11	711	— 0.50	+ 0.31	— 0.67	— 0.46	0.3	+ 0.016
18	692	— 0.83	+ 0.32	— 0.68	— 0.27	0.8	+ 0.006
23	690	— 0.94	+ 0.32	— 0.68	— 0.25	2.0	+ 0.006
71.10	693	— 0.44	+ 0.41	— 0.78	— 0.28	0.3	— 0.005
18	702	— 0.83	+ 0.42	— 0.78	— 0.37	0.6	+ 0.015
22	725	— 0.94	+ 0.42	— 0.79	— 0.60	0.7	+ 0.040
72.13	724	— 0.61	+ 0.51	— 0.87	— 0.59	0.3	+ 0.030
20	630	— 0.88	+ 0.52	— 0.87	+ 0.35	2.2	— 0.056
73.23	681	— 0.94	+ 0.62	— 0.94	— 0.16	1.8	— 0.003
75.15	720	— 0.70	+ 0.82	— 1.00	— 0.55	0.4	+ 0.037
19	657	— 0.85	+ 0.82	— 1.00	+ 0.08	1.6	— 0.022
76.12	675	— 0.53	+ 0.91	— 0.99	— 0.10	0.7	— 0.006
79.21	691	— 0.91	+ 1.22	— 0.83	— 0.26	0.3	+ 0.049
80.14	498	— 0.65	+ 1.31	— 0.74	+ 1.67	0.2	— 0.140
17	588	— 0.78	+ 1.32	— 0.73	+ 0.77	0.6	— 0.045
22	651	— 0.94	+ 1.32	— 0.73	+ 0.14	0.6	+ 0.022
79	612	+ 0.98	+ 1.38	— 0.66	+ 0.53	0.3	— 0.059

	Δα						p	O — C
1881.07	+ 114ˢ.743	x_a	— 0.27 y	+ 1.41 z_a	— 0.63 u	— 0.78 = 0	0.3	+ 0ˢ.107
21	633		— 0.90	+ 1.42	— 0.61	+ 0.32	1.2	+ 0.017
95	585		+ 0.46	+ 1.50	— 0.51	+ 0.80	0.2	— 0.055
82.05	620		— 0.15	+ 1.50	— 0.50	+ 0.45	0.5	— 0.004
20	610		— 0.87	+ 1.52	— 0.48	+ 0.55	0.8	+ 0.008

2. P — b

1861.14	+ 24ˢ.222	x'_b	— 0.63 y	— 0.59 z_b	+ 0.63 u	+ 1.78 = 0	0.1	— 0ˢ.113
19	360		— 0.86	— 0.58	+ 0.62	+ 0.40	0.1	+ 0.030
62.00	424		+ 0.15	— 0.50	+ 0.52	— 0.24	0.1	+ 0.071
12	427		— 0.54	— 0.49	+ 0.50	— 0.27	0.1	+ 0.088
19	374		— 0.85	— 0.48	+ 0.49	+ 0.26	0.2	+ 0.042
22	286		— 0.93	— 0.48	+ 0.49	+ 1.14	0.2	— 0.044
79.23	263		— 0.96	+ 1.22	— 0.83	+ 1.37	0.1	— 0.024
80.13	309		— 0.61	+ 1.31	— 0.74	+ 0.91	0.1	+ 0.029
80.20	194		— 0.89	+ 1.32	— 0.73	+ 2.06	0.1	— 0.079
63.14	338	x_b	— 0.66	— 0.39	+ 0.36	+ 0.62	0.7	— 0.056
18	408		— 0.83	— 0.38	+ 0.35	— 0.08	1.1	+ 0.018
20	391		— 0.90	— 0.38	+ 0.35	+ 0.09	0.7	+ 0.002
81	409		+ 0.96	— 0.32	+ 0.26	— 0.09	0.8	— 0.022
85	388		+ 0.89	— 0.32	+ 0.25	+ 0.12	0.2	— 0.042
92	437		+ 0.62	— 0.31	+ 0.24	— 0.37	0.3	+ 0.012
99	407		+ 0.23	— 0.30	+ 0.23	— 0.07	0.2	— 0.009
64.07	303		— 0.27	— 0.29	+ 0.22	+ 0.97	0.1	— 0.102
13	417		— 0.61	— 0.29	+ 0.21	— 0.17	0.3	+ 0.019
18	373		— 0.82	— 0.28	+ 0.20	+ 0.27	0.9	— 0.020
23	411		— 0.95	— 0.28	+ 0.19	— 0.11	0.8	+ 0.019
80	434		+ 0.98	— 0.22	+ 0.10	— 0.34	1.0	— 0.001
85	436		+ 0.90	— 0.22	+ 0.09	— 0.36	0.6	+ 0.002
65.09	300		— 0.37	— 0.19	+ 0.06	+ 1.00	0.3	— 0.106
12	407		— 0.56	— 0.19	+ 0.05	— 0.07	0.3	+ 0.003
17	394		— 0.80	— 0.18	+ 0.04	+ 0.06	0.8	— 0.003
21	409		— 0.92	— 0.18	+ 0.04	— 0.09	1.4	+ 0.014
87	422		+ 0.83	— 0.11	— 0.07	— 0.22	0.7	— 0.013
91	532		+ 0.65	— 0.11	— 0.08	— 1.32	0.5	+ 0.100
66.08	398		— 0.33	— 0.09	— 0.10	+ 0.02	0.3	— 0.013
14	388		— 0.63	— 0.09	— 0.11	+ 0.12	0.6	— 0.017
19	426		— 0.86	— 0.08	— 0.12	— 0.26	0.8	+ 0.026
22	420		— 0.94	— 0.08	— 0.12	— 0.20	0.6	+ 0.022
93	390		+ 0.57	— 0.01	— 0.23	+ 0.10	0.3	— 0.043
67.17	342		— 0.78	+ 0.02	— 0.27	+ 0.58	0.4	— 0.062
20	403		— 0.89	+ 0.02	— 0.27	— 0.03	0.5	+ 0.001
80	444		+ 0.98	+ 0.08	— 0.36	— 0.44	1.2	0.000

	Δα						p	O − C
1867.96	+24.ˢ460	x_b	$+0.41y$	$+0.10z_b$	$-0.39u$	$-0.60=0$	0.3	+0.ˢ028
68.13	436		−0.62	+0.11	−0.41	−0.36	0.3	+0.026
16	431		−0.75	+0.12	−0.41	−0.31	0.6	+0.024
21	419		−0.91	+0.12	−0.42	−0.19	1.1	+0.015
69.09	495		−0.39	+0.21	−0.54	−0.95	0.3	+0.078
15	485		−0.70	+0.21	−0.55	−0.85	0.2	+0.077
23	430		−0.94	+0.22	−0.56	−0.30	0.9	+0.024
94	366		+0.52	+0.29	−0.65	+0.34	0.1	−0.072
70.09	432		−0.39	+0.31	−0.67	−0.32	0.3	+0.014
18	426		−0.82	+0.32	−0.68	−0.26	0.5	+0.017
23	382		−0.95	+0.32	−0.68	+0.18	1.6	−0.024
71.10	391		−0.44	+0.41	−0.78	+0.09	0.2	−0.026
18	424		−0.83	+0.42	−0.78	−0.24	0.4	+0.016
22	464		−0.93	+0.42	−0.79	−0.64	0.2	+0.057
72.13	435		−0.61	+0.51	−0.87	−0.35	0.2	+0.023
20	368		−0.88	+0.52	−0.87	+0.32	1.4	−0.037
73.23	400		−0.94	+0.62	−0.94	+0.00	1.3	−0.001
75.15	372		−0.70	+0.82	−1.00	+0.28	0.1	−0.022
18	352		−0.82	+0.82	−1.00	+0.48	0.5	−0.039
79.21	370		−0.91	+1.22	−0.83	+0.30	0.2	+0.026
80.18	332		−0.82	+1.32	−0.73	+0.68	0.1	+0.002
22	351		−0.94	+1.32	−0.73	+0.49	0.3	+0.023
81.07	537		−0.27	+1.41	−0.63	−1.37	0.1	+0.209
82.20	240		−0.88	+1.52	−0.48	+1.60	0.2	−0.054

3. P — c

1863.14	−22.ˢ312	x_c	$-0.66y$	$-0.39z_c$	$+0.36u$	$+0.12=0$	0.6	−0.ˢ011
18	322		−0.83	−0.38	+0.35	+0.22	1.1	−0.015
20	339		−0.90	−0.38	+0.35	+0.39	0.7	−0.031
81	309		+0.96	−0.32	+0.26	+0.09	0.8	−0.039
85	277		+0.89	−0.32	+0.25	−0.23	0.1	−0.006
92	288		+0.60	−0.31	+0.24	−0.12	0.3	−0.011
99	255		+0.23	−0.30	+0.23	−0.45	0.2	+0.030
64.07	465		−0.27	−0.29	+0.22	+1.65	0.1	−0.169
13	359		−0.61	−0,29	+0.21	+0.59	0.3	−0.057
18	313		−0.82	−0.28	+0.20	+0.13	0.8	−0.006
23	276		−0.95	−0.28	+0.19	−0.24	0.6	+0.033
80	261		+0.98	−0.22	+0.10	−0.39	1.0	+0.008
85	288		+0.90	−0.22	+0.09	−0.12	0.6	−0.018
65.09	306		−0.37	−0.19	+0.06	+0.06	0.2	−0.009
12	256		−0.55	−0.19	+0.05	−0.44	0.2	+0.044
17	300		−0.79	−0.18	+0.04	+0.00	0.7	+0.005
21	297		−0.92	−0.18	+0.04	−0.03	1.4	+0.011
87	265		+0.82	−0.11	−0.07	−0.35	0.6	+0.007

	Δα					p	O = C
1865.91	$-22^{s}.207$	$x_c + 0.65y$	$-0.11z_c$	$-0.08u$	$-0.93 = 0$	0.4	$+0^{s}.058$
66.08	251	−0.33	−0.09	−0.10	−0.49	0.3	+0.045
14	268	−0.63	−0.09	−0.11	−0.32	0.5	+0.033
19	277	−0.86	−0.08	−0.12	−0.23	0.8	+0.029
22	284	−0.94	−0.08	−0.12	−0.16	0.5	+0.024
93	320	+0.57	−0.01	−0.23	+0.20	0.2	−0.043
67.17	322	−0.78	+0.02	−0.27	+0.22	0.3	−0.017
20	340	−0.89	+0.02	−0.27	+0.40	0.5	−0.033
80	263	+0.98	+0.08	−0.36	−0.37	0.9	+0.054
96	237	+0.41	+0.10	−0.39	−0.63	0.3	+0.044
68.13	275	−0.62	+0.11	−0.41	−0.25	0.3	+0.026
16	296	−0.76	+0.12	−0.41	−0.04	0.4	+0.009
21	276	−0.91	+0.12	−0.42	−0.24	1.0	+0.031
69.09	305	−0.39	+0.21	−0.54	+0.05	0.3	−0.007
15	298	−0.70	+0.21	−0.55	−0.02	0.2	+0.006
23	310	−0.95	+0.22	−0.56	+0.10	0.8	−0.001
70.09	294	−0.39	+0.31	−0.67	−0.06	0.3	+0.005
18	332	−0.82	+0.32	−0.68	+0.32	0.4	−0.023
23	309	−0.95	+0.32	−0.68	+0.09	1.2	+0.002
71.10	363	−0.44	+0.41	−0.78	+0.63	0.2	−0.060
18	314	−0.83	+0.42	−0.78	+0.14	0.3	−0.002
72.13	242	−0.61	+0.51	−0.87	−0.58	0.2	+0.067
20	375	−0.88	+0.52	−0.87	+0.75	1.2	−0.058
73.22	325	−0.94	+0.62	−0.94	+0.25	1.2	−0.001
79.21	343	−0.91	+1.22	−0.83	+0.43	0.2	+0.049

4. P — a

1863.14	$-42^{s}.796$	$x_a - 0.66y$	$-0.39z_a$	$+0.36u$	$+0.66 = 0$	1.0	$-0^{s}.043$
18	757	−0.81	−0.38	+0.35	+0.27	1.4	+0.001
22	765	−0.94	−0.38	+0.35	+0.35	1.2	−0.005
81	777	+0.97	−0.32	+0.26	+0.47	1.1	−0.069
85	741	+0.89	−0.32	+0.25	+0.11	0.2	−0.031
93	710	+0.58	−0.31	+0.24	−0.20	0.4	+0.008
99	712	+0.23	−0.30	+0.23	−0.18	0.2	−0.048
64.07	774	−0.27	−0.29	+0.22	+0.44	0.1	−0.023
13	762	−0.61	−0.29	+0.21	+0.32	0.4	−0.015
18	770	−0.82	−0.28	+0.20	+0.40	0.9	−0.018
23	763	−0.95	−0.28	+0.19	+0.33	0.8	−0.008
80	696	+0.98	−0.22	+0.10	−0.34	1.3	+0.007
84	704	+0.91	−0.22	+0.09	−0.26	0.8	+0.001
65.09	762	−0.37	−0.19	+0.06	+0.32	0.4	−0.025
12	720	−0.55	−0.19	+0.05	−0.10	0.4	+0.021
17	766	−0.79	−0.18	+0.04	+0.36	0.9	−0.019
22	708	−0.92	−0.18	+0.04	−0.22	1.8	+0.042

	Δα					p	O — C
1865 87	— 42ˢ.703	x_a + 0.82y	— 0.11z_a	— 0.07u	— 0.27 = 0	0.8	0ˢ.000
91	701	+ 0.65	— 0.11	— 0.08	— 0.29	0.8	+ 0.006
66.08	725	— 0.33	— 0.09	— 0.10	— 0.05	0.3	+ 0.006
13	709	— 0.63	— 0.09	— 0.11	— 0.21	0.6	+ 0.030
19	708	— 0.86	— 0.08	— 0.12	— 0.22	1.0	+ 0.036
23	741	— 0.95	— 0.08	— 0.12	+ 0.11	1.1	+ 0.005
93	742	+ 0.56	— 0.01	— 0.23	+ 0.12	0.4	— 0.037
67.17	782	— 0.78	+ 0.02	— 0.27	+ 0.52	0.4	— 0.044
20	759	— 0.89	+ 0.02	— 0.27	+ 0.29	0.6	— 0.008
80	675	+ 0.98	+ 0.08	— 0.36	— 0.55	1.7	+ 0.015
88	654	+ 0.97	+ 0.09	— 0.37	— 0.76	0.5	+ 0.036
96	669	+ 0.41	+ 0.10	— 0.39	— 0.61	0.3	+ 0.035
68.13	740	— 0.61	+ 0.11	— 0.41	+ 0.10	0.4	— 0.010
16	727	— 0.75	+ 0.12	— 0.41	— 0.03	0.9	+ 0.006
21	728	— 0.91	+ 0.12	— 0.42	— 0.02	1.2	+ 0.009
24	704	— 0.97	+ 0.12	— 0.43	— 0.26	1.6	+ 0.034
95	622	+ 0.46	+ 0.20	— 0.52	— 1.08	0.5	+ 0.077
69.09	722	— 0.39	+ 0.21	— 0.54	— 0.08	0.3	— 0.002
14	722	— 0.67	+ 0.21	— 0.55	— 0.08	0.6	+ 0.005
24	725	— 0.96	+ 0.22	— 0.56	— 0.05	2.6	+ 0.009
94	729	+ 0.52	+ 0.29	— 0.65	— 0.01	0.1	— 0.035
70.09	694	— 0.39	+ 0.31	— 0.67	— 0.36	0.3	+ 0.020
11	722	— 0.50	+ 0.31	— 0.67	— 0.08	0.3	— 0.002
18	738	— 0.83	+ 0.32	— 0.68	+ 0.08	0.8	— 0.010
24	729	— 0.96	+ 0.32	— 0.68	— 0.01	2.7	+ 0.002
71.10	790	— 0.44	+ 0.41	— 0.78	+ 0.60	0.2	— 0.053
18	694	— 0.83	+ 0.42	— 0.78	— 0.36	0.4	+ 0.031
23	722	— 0.95	+ 0.42	— 0.79	— 0.08	1.0	+ 0.006
72.13	738	— 0.61	+ 0.51	— 0.87	+ 0.08	0.2	— 0.022
20	789	— 0.88	+ 0.52	— 0.87	+ 0.59	1.5	— 0.065
73.23	737	— 0.95	+ 0.62	— 0.94	+ 0.07	2.4	— 0.013
74.83	653	+ 0.94	+ 0.78	— 1.00	— 0.77	0.3	+ 0.021
75.16	720	— 0.74	+ 0.82	— 1.00	— 0.10	0.9	— 0.003
19	707	— 0.84	+ 0.82	— 1.00	— 0.23	1.9	+ 0.013
22	708	— 0.93	+ 0.82	— 1.00	— 0.22	0.7	+ 0.014
76.12	742	— 0.53	+ 0.91	— 0.99	+ 0.12	0.6	— 0.020
25	693	— 0.98	+ 0.92	— 0.99	— 0.37	0.5	+ 0.031
79.21	793	— 0.91	+ 1.22	— 0.83	+ 0.63	0.2	— 0.065
80.14	784	— 0.65	+ 1.31	— 0.74	+ 0.54	0.3	— 0.060
17	774	— 0.78	+ 1.32	— 0.73	+ 0.44	0.6	— 0.046
22	802	— 0.94	+ 1.32	— 0.73	+ 0.72	0.7	— 0.070
79	711	+ 0.98	+ 1.38	— 0.66	— 0.19	0.2	— 0.026
81.07	744	— 0.27	+ 1.41	— 0.63	+ 0.14	0.3	— 0.026
14	717	— 0.68	+ 1.41	— 0.62	— 0.13	0.6	+ 0.011

	$\Delta\alpha$						p	$O-C$
1881.23	$-42^{s}.739$	x_a	$-0.95y$	$+1.42z_a$	$-0.61u$	$+0.09=0$	2.1	$-0^{s}.003$
95	662		$+0.46$	$+1.50$	-0.51	-0.68	0.3	$+0.041$
82.05	689		-0.15	$+1.50$	-0.50	-0.41	0.5	$+0.029$
09	704		-0.39	$+1.51$	-0.50	-0.26	0.5	$+0.021$
19	709		-0.86	$+1.52$	-0.48	-0.21	1.2	$+0.028$
24	726		-0.97	$+1.52$	-0.48	-0.04	1.4	$+0.014$
79	691		$+0.98$	$+1.58$	-0.40	-0.39	0.5	$+0.051$

Die Behandlung dieser Gleichungen nach der Methode der kleinsten Quadrate führt zu folgenden Endgleichungen:

P — d:

$$\begin{array}{rrrrrrl}
+48{,}700x_d & +0{,}000x'_d & -22{,}600y & +9{,}895z_d & -15{,}218u & -6{,}308 & =0 \\
0{,}000x_d & +4{,}500x'_d & -2{,}281y & -1{,}859z_d & +1{,}999u & +2{,}190 & =0 \\
-22{,}600x_d & -2{,}281x'_d & +35{,}385y & -7{,}647z_d & +10{,}123u & -3{,}875 & =0 \\
+9{,}895x_d & -1{,}859x'_d & -7{,}647y & +18{,}569z_d & -14{,}084u & +1{,}039 & =0 \\
-15{,}218x_d & +1{,}999x'_d & +10{,}123y & -14{,}084z_d & +15{,}644u & +2{,}840 & =0
\end{array}$$

woraus:

$$\begin{aligned}
x_d &= +0^{s}{,}1540 \pm 0^{s}{,}0333 \\
x'_d &= -0{,}2909 \pm 0{,}0882 \\
y &= +0{,}2597 \pm 0{,}0365 \\
z_d &= -0{,}5786 \pm 0{,}0734 \\
u &= -0{,}6833 \pm 0{,}0937
\end{aligned}$$

w. F. einer Gleichung vom Gew. 1 $= \pm 0^{s}{,}0172$

P — b:

$$\begin{array}{rrrrrrl}
+27{,}800x_b & +0{,}000x'_b & -12{,}478y & +1{,}945z_b & -7{,}022u & -1{,}677 & =0 \\
0{,}000x_b & +1{,}100x'_b & -0{,}790y & -0{,}023z_b & +0{,}193u & +0{,}881 & =0 \\
-12{,}478x_b & -0{,}790x'_b & +20{,}068y & -3{,}153z_b & +5{,}505u & -2{,}963 & =0 \\
+1{,}945x_b & -0{,}023x'_b & -3{,}153y & +5{,}072z_b & -5{,}030u & +1{,}091 & =0 \\
-7{,}022x_b & +0{,}193x'_b & +5{,}505y & -5{,}030z_b & +7{,}043u & +0{,}156 & =0
\end{array}$$

woraus:

$$\begin{aligned}
x_b &= +0^{s}{,}0295 \pm 0^{s}{,}0486 \\
x'_b &= -0{,}5324 \pm 0{,}1705 \\
y &= +0{,}2177 \pm 0{,}0484 \\
z_b &= -0{,}8244 \pm 0{,}1718 \\
u &= -0{,}7370 \pm 0{,}1676
\end{aligned}$$

w. F. einer Gleichung vom Gew. 1 $= \pm 0^{s}{,}0172$

P — c:

$$\begin{array}{rrrrrl}
+23{,}200x_c & -10{,}004y & +0{,}166z_c & -4{,}820u & +0{,}179 & =0 \\
-10{,}004x_c & +16{,}190y & -1{,}618z_c & +4{,}019u & -2{,}776 & =0 \\
+0{,}166x_c & -1{,}618y & +2{,}327z_c & -2{,}947u & +0{,}729 & =0 \\
-4{,}820x_c & +4{,}019y & -2{,}947z_c & +4{,}875u & -0{,}797 & =0
\end{array}$$

woraus:
$$x_c = -0{,}^s0523 \pm 0{,}^s0756$$
$$y = +0{,}2046 \pm 0{,}0474$$
$$z = -1{,}0215 \pm 0{,}4238$$
$$u = -0{,}6740 \pm 0{,}3275$$
w. F. einer Gleichung vom Gew. 1 $= \pm 0{,}^s0156$

P — a:
$$+54{,}100x_a - 27{,}628y + 19{,}514z_a - 21{,}278u - 0{,}909 = 0$$
$$-27{,}628x_a + 38{,}913y - 14{,}643z_a + 15{,}486u - 4{,}614 = 0$$
$$+19{,}514x_a - 14{,}643y + 26{,}627z_a - 16{,}985u - 1{,}421 = 0$$
$$-21{,}278x_a + 15{,}486y - 16{,}985z_a + 17{,}526u + 1{,}671 = 0$$

woraus:
$$x_a = +0{,}^s0392 \pm 0{,}^s0345$$
$$y = +0{,}2555 \pm 0{,}0365$$
$$z_a = -0{,}0244 \pm 0{,}0543$$
$$u = -0{,}2972 \pm 0{,}0816$$
w. F. einer Gleichung vom Gew. 1 $= \pm 0{,}^s0173$

Drückt man die Parallaxe und die Correction des Bahnhalbmessers in Bogensecunden aus, so erhält man dieselben aus den verschiedenen Gleichungssystemen:

P—d	$\pi = +0{,}''390 \pm 0{,}''055$	$\delta a = -1{,}''020 \pm 0{,}''140$, folglich	$a = -0{,}''040$
P—b	$+0{,}327 \pm 0{,}073$	$-1{,}101 \pm 0{,}250$	$-0{,}121$
P—c	$+0{,}307 \pm 0{,}071$	$-1{,}007 \pm 0{,}489$	$-0{,}027$
P—a	$+0{,}383 \pm 0{,}055$	$-0{,}444 \pm 0{,}122$	$+0{,}536$

Die Parallaxe ergiebt sich demnach aus den Vergleichungen mit allen vier Sternen sehr nahe identisch; aus *P—b* und *P—c* wurde sie zwar um ein Unbedeutendes kleiner erhalten als aus den beiden anderen Sternen, doch sind diese kleineren Werthe mit grösseren wahrscheinlichen Fehlern behaftet und es lässt sich daraus gewiss kein Schluss ziehen auf etwa wahrnehmbare Parallaxen der genannten beiden kleinen Sterne *b* und *c*. Im Hinblick auf die Grösse der wahrscheinlichen Fehler ist die Uebereinstimmung vielmehr eine auffallend günstige zu nennen, eine Erscheinung, die jedoch zum Theil ihre einfache Erklärung darin findet, dass für die Vergleichung mit den verschiedenen Sternen vorwiegend ein und dieselben Beobachtungen von Procyon benutzt sind.

Auf den ersten Blick scheinen die Resultate meiner Rechnung geradezu der Ungleichförmigkeit der Eigenbewegung in Rectascension zu widersprechen, doch kann den sich aus unseren Gleichungen ergebenden Werthen für den Halbmesser der Procyon-Bahn im Vergleich mit der Auwers'schen Bestimmung desselben kein bedeutendes Gewicht beigemessen werden. Nach meiner Rechnung wird dieselbe durch die Gleichungen für *P—a* fast auf die Hälfte reducirt, während die Vergleichungen mit den übrigen drei Sternen sogar einen

kleinen negativen Werth ergeben. Bei der Kürze des durchlaufenen Bogens tritt jedoch, wie es ein Blick auf den Gang der Coefficienten von z und u in den vorstehenden Gleichungen lehrt, die Ungleichförmigkeit der Eigenbewegung zu wenig hervor und vermischt sich zu sehr mit den geradlinigen und gleichförmigen Eigenbewegungen der Vergleichsterne, so dass die beiden Arten von Bewegungen nicht scharf von einander getrennt werden können.

Für den constanten Unterschied zwischen den registrirten und Gehörbeobachtungen ergiebt sich aus den beiden Gleichungssystemen für $P-d$ und $P-b$ fast genau derselbe Werth, nämlich $\frac{1}{10}(x_d - x'_d) = + 0^s{,}044 \pm 0^s{,}009$ und $\frac{1}{10}(x_b - x'_b) = + 0^s{,}056 \pm 0^s{,}018$, im Mittel also $+ 0^s{,}047$, welches Resultat, wie mir Herr Wagner mitgetheilt hat, wenigstens hinsichtlich des Vorzeichens durch seine absoluten Bestimmungen bestätigt zu werden scheint. Genaueres lässt sich hierüber jetzt nichts sagen, indem Herrn Wagner's Untersuchung nur für die Sterne der ersten vier Grössenklassen durchgeführt ist und gezeigt hat, dass diese Differenz, welche bei der Art, wie sie abgeleitet ist, für die Fundamentalsterne verschwindet, für schwächere Sterne mit demselben Zeichen wächst, wie hier.

Was endlich den wahrscheinlichen Fehler einer Gleichung vom Gewichte 1 anbelangt, so zeigen die verschiedenen Resultate eine geradezu wunderbare Uebereinstimmung. Nur der aus den Rectascensionsdifferenzen $P-c$ abgeleitete Werth ist etwas kleiner, als der aus den übrigen erhaltene, doch auch nur sehr unbedeutend, und es ist dabei zu bemerken, dass er aus einer kleineren, sich über einen kürzeren Zeitraum erstreckenden Beobachtungsreihe abgeleitet ist, wie die anderen. Im Mittel wird der wahrscheinliche Fehler der Gewichtseinheit, wofür, wie gesagt, das Gewicht eines Durchgangs von Procyon an 10 Fäden bei den Bildern I angenommen ist, $= 0^s{,}0168$; aus der oben (pag. 13) gegebenen Tafel ergiebt sich aber hierfür $0^s{,}0116$, wonach also beide Werthe erheblich von einander abweichen. Die Annahme $\zeta = 0$ ist demnach nicht richtig, es wird vielmehr $\zeta = \sqrt{(0{,}0168)^2 - (0{,}0116)^2} = 0^s{,}0145$ und der wahrscheinliche Fehler einer Rectascensionsdifferenz wird daher, wenn man annimmt, dass ζ vom Zustande der Bilder unabhängig ist, $e = \sqrt{(0{,}0145)^2 + \frac{\varepsilon_1^2}{n_1} + \frac{\varepsilon_2^2}{n_2}}$. Hiermit müssten nun die Gewichte der Gleichungen von Neuem berechnet und dieselben dann wieder aufgelöst werden, doch glaube ich nicht, dass damit etwas an Genauigkeit gewonnen würde, da gerade die gute Uebereinstimmung der aus allen vier Rechnungen erhaltenen wahrscheinlichen Fehler der Gewichtseinheit ein sicheres Anzeichen ist für die nahe Richtigkeit der angewandten relativen Gewichte der Gleichungen, wie es ja auch der Fall ist, wenn ζ in ähnlicher Weise, wie die ε, vom Zustande der Bilder abhängt.

Die bisher erzielten Resultate sind auf solche Weise erhalten worden, dass ein und derselbe Durchgang von Procyon bei den Vergleichungen mit allen an demselben Tage beobachteten Vergleichsternen in Anwendung kam und daher auch zur Aufstellung je einer Gleichung in den entsprechenden Gleichungssystemen beitrug. Man kann daher die verschiedenen oben erhaltenen Werthe der Unbekannten nicht als unabhängig von einander ansehen,

und ohne vage Hypothesen lassen sich dieselben nicht streng unter einander verbinden. Indem ich daher von dem Versuche, die vorstehenden Resultate nach strengen Principien zu Mittelwerthen zu vereinigen, abstand, bot sich mir als Auskunftsmittel zunächst die Vergleichung von Procyon mit dem Mittel der vier kleinen Sterne. Da aber bei weitem nicht an allen Tagen alle Vergleichsterne beobachtet waren, so mussten entweder sämmtliche unvollständige Beobachtungen ausgeschlossen werden oder es mussten die Relationen zwischen den kleinen Sternen unter einander gesucht werden. Indem ich aus den vorstehenden Beobachtungen die Relationen zwischen dem Sterne d und den drei anderen Vergleichsternen ableitete, erhielt ich:

$$a-d = +2^m\, 37^s{,}415\ (\pm 0^s{,}002) - 0^s{,}00055\ (\pm 0^s{,}00085)\ (t-1867{,}0)$$
$$b-d = +1\ \ 30{,}276\ (\pm 0{,}003) + 0{,}00207\ (\pm 0{,}00073)\ (t-1867{,}0)$$
$$c-d = +2\ \ 17{,}984\ (\pm 0{,}004) + 0{,}00458\ (\pm 0{,}00123)\ (t-1867{,}0)$$

woraus sich für die Reduction der Beobachtungen der einzelnen Sterne auf die Mitte aller ergiebt:

$$d-M = -1^m\, 36^s{,}419 - 0^s{,}00152\ (t-1867{,}0)$$
$$b-M = -0\ \ \ 6{,}143 + 0{,}00054\ (t-1867{,}0)$$
$$c-M = +0\ \ 41{,}565 + 0{,}00305\ (t-1867{,}0)$$
$$a-M = +1\ \ \ 0{,}996 - 0{,}00207\ (t-1867{,}0)$$

Um mich von einer immerhin möglichen Aenderung der Beobachtungsweise im Laufe der Jahre für die Ableitung der Parallaxe möglichst frei zu halten, leitete ich dieselbe ausschliesslich aus den Beobachtungen von 1863 bis 1868 ab, die speciell zu diesem Zweck angestellt waren, und nahm dabei die von der Ungleichförmigkeit der Eigenbewegung abhängige Correction nach Auwers' Elementen an, deren eventuelle Ungenauigkeit in diesem Falle wegen des in Frage kommenden kürzeren Zeitraums gewiss von keiner Bedeutung ist, während sie durch Hinzuziehung der ausgeschlossenen 85 Registrirbeobachtungen aus der späteren Zeit, die alle bis auf fünf zur Zeit des negativen Maximums der Parallaxe angestellt sind, das Resultat für die Parallaxe hätten stark beeinträchtigen können. Der Ausschluss der Gehörbeobachtungen rechtfertigt sich hier einerseits durch ihr geringes Gewicht, andererseits wegen des Bestehens der constanten Differenz, deren vorstehend gegebene Bestimmung ich nicht für genügend verbürgt erachte.

Nachdem alle bei dieser Rechnung in Betracht kommenden Beobachtungen der Durchgänge der kleinen Sterne mit Hülfe der soeben gegebenen Reductionsformeln auf das Mittel reducirt waren, wurden aus den an ein und demselben Tage beobachteten Durchgängen mit Berücksichtigung der Gewichte Mittel gezogen und dann die Rectascensionsdifferenzen zwischen diesen Mitteln und Procyon gebildet. Letztere sind in nachstehender Tafel zusammengestellt. Die Berechnung der Gewichte geschah ganz ebenso wie früher, indem ich auch hier $\zeta = 0$ annahm, da die unter dieser Voraussetzung berechneten Gewichte sich,

wie erwähnt, als im Allgemeinen richtig erwiesen haben. Als Einheit des Gewichts wurde das Gewicht eines Durchgangs von Procyon durch 6 Fäden bei den Bildern I angenommen.

		$P-M$	p	$O-C$			$P-M$	p	$O-C$
1	1863.13	+18^s.256	0.7	+0^s.015	42	1865.11	+18^s.295	0.7	+0^s.035
2	14	263	0.4	+0.022	43	13	295	0.5	+0.037
3	14	198	1.1	−0.042	44	15	209	0.7	−0.047
4	15	189	0.9	−0.051	45	17	251	1.1	−0.004
5	16	265	0.9	+0.026	46	19	256	1.1	+0.003
6	17	236	0.8	−0.002	47	20	271	1.1	+0.018
7	19	296	1.0	+0.059	48	20	297	1.1	+0.045
8	19	199	1.0	−0.038	49	21	280	0.8	+0.028
9	19	244	1.0	+0.007	50	22	243	1.1	−0.009
10	20	250	1.1	+0.013	51	23	256	1.1	+0.005
11	20	225	1.0	−0.011	52	24	231	0.7	−0.020
12	22	234	0.7	−0.001	53	86	236	0.8	−0.057
13	26	230	0.6	−0.005	54	86	287	0.3	−0.006
14	80	168	0.2	−0.111	55	87	289	1.1	−0.004
15	80	260	1.1	−0.019	56	89	266	0.7	−0.025
16	82	278	1.1	0.000	57	91	264	0.5	−0.026
17	82	265	0.8	−0.013	58	91	347	1.1	+0.058
18	85	284	0.7	+0.007	59	92	304	0.8	+0.016
19	91	294	0.8	+0.020	60	1866.08	281	1.1	+0.010
20	95	293	0.5	+0.022	61	12	284	1.1	+0.017
21	99	289	0.8	+0.024	62	15	249	1.0	−0.015
22	1864.07	190	0.5	−0.064	63	18	253	0.8	−0.009
23	13	273	0.8	+0.034	64	19	288	0.7	+0.026
24	13	188	0.5	−0.061	65	19	244	0.7	−0.017
25	17	239	1.1	−0.008	66	20	278	1.0	+0.017
26	18	230	1.1	−0.016	67	22	276	1.1	+0.016
27	19	260	1.1	+0.015	68	23	280	0.9	+0.021
28	22	235	0.6	−0.009	69	23	229	0.7	−0.030
29	22	254	0.8	+0.010	70	92	227	0.6	−0.070
30	23	246	0.5	+0.003	71	95	326	0.5	+0.032
31	24	261	1.1	+0.018	72	1867.16	197	0.8	−0.075
32	78	317	0.5	+0.030	73	18	224	0.8	−0.046
33	79	276	0.7	−0.021	74	19	273	0.7	+0.004
34	80	335	1.1	+0.048	75	21	235	0.8	−0.034
35	80	292	0.9	+0.005	76	21	229	0.8	−0.039
36	82	238	0.7	−0.048	77	78	340	0.6	+0.029
37	83	267	0.7	−0.019	78	78	354	0.7	+0.043
38	84	265	0.8	−0.020	79	78	292	1.0	−0.019
39	86	316	1.0	+0.031	80	81	312	1.0	+0.001
40	1865.08	202	0.5	−0.060	81	82	302	1.0	−0.009
41	09	275	0.7	+0.013	82	83	294	1.0	−0.016

		P — M	p	O — C			P — M	p	O — C
83	1867.88	+ 18ˢ340	0.6	+ 0ˢ032	91	1868.20	+ 18ˢ277	0.8	0ˢ000
84	96	313	1.1	+ 0.012	92	21	253	1.1	— 0.024
85	1868.12	264	0.7	— 0.019	93	22	294	1.1	+ 0.018
86	14	279	0.8	— 0.002	94	24	300	0.7	+ 0.025
87	16	251	1.0	— 0.029	95	24	255	0.7	— 0.020
88	16	297	1.0	+ 0.017	96	25	313	0.7	+ 0.038
89	17	290	0.8	+ 0.011	97	25	294	0.7	+ 0.019
90	20	294	1.1	+ 0.017					

Die Behandlung der sich unter Annahme $\Delta\alpha_0 = + 18^s\!,265$ für *P—M* aus diesen Beobachtungen ergebenden Gleichungen führt zu folgenden Normalgleichungen:

$$+ 80{,}500x - 22{,}776y - 11{,}226z - 2{,}176 = 0$$
$$- 22{,}776x + 55{,}540y + 3{,}484z - 9{,}434 = 0$$
$$- 11{,}226x + 3{,}484y + 3{,}879z - 1{,}638 = 0$$

woraus:

$$x = + 0^s\!,1968 \pm 0^s\!,0265$$
$$y = + 0{,}1996 \pm 0{,}0253$$
$$z = + 0{,}8126 \pm 0{,}1175$$

w. F. einer Gleichung vom Gew. 1 $= \pm 0^s\!,0177$

In Bogenmaass ausgedrückt, erhalten wir also für die relative Parallaxe von Procyon gegen das Mittel der vier Vergleichsterne:

$$\pi = + 0''\!,299 \pm 0''\!,038$$

Dieser Werth der Parallaxe stimmt mit den oben aus den Rechnungen für die einzelnen Sterne erhaltenen Werthen genügend überein. Dass er nicht innerhalb der Grenzen der obigen Werthe liegt, ist offenbar eine Folge der beschränkteren Auswahl der Beobachtungen. Auch die von Auwers erhaltene Parallaxe (pag. 3) stimmt hiermit gut überein; eine Vereinigung beider Werthe nach den Gewichten, wie sie die beiderseits angegebenen wahrscheinlichen Fehler bedingen, würde $\pi = + 0''\!,259 \pm 0''\!,023$ ergeben, doch halte ich diese Vereinigung nicht für statthaft in Anbetracht der von Auwers selbst für illusorisch erklärten Sicherheit seiner Bestimmung, wogegen ich keine Ursache habe, die von mir berechnete Parallaxe für weniger sicher zu halten, als ihr wahrscheinlicher Fehler es andeutet[1]). Die Entfernung des Procyon von der Sonne erhält man hieraus zu 10,9 ± 1,4 Lichtjahren.

Endlich ist noch zu erwähnen, dass der hier gefundene wahrscheinliche Fehler der Gewichtseinheit $= 0^s\!,0177$ auf einen beträchtlich kleineren Werth von ζ führt, nämlich $\zeta = 0^s\!,0094$, was darauf hindeutet, dass die Beobachtungsweise nicht nur von Tag zu Tag wechselt, sondern auch kleinen Schwankungen im Laufe der Jahre unterworfen ist.

---

1) Eine im Sommer 1868 von Herrn Wagner angestellte vorläufige Berechnung der Parallaxe aus denselben Beobachtungen, wie hier, ergab $\pi = + 0''\!,32 \pm 0''\!,04$, ein Resultat, das, wie man sieht, mit dem von mir erhaltenen sehr gut übereinstimmt.

Bei der Besprechung der aus den einzelnen Sternen erhaltenen Resultate sahen wir, dass sich bei der Kürze des hier in Betracht kommenden Zeitraums die Bahnbewegung von Procyon nicht scharf genug von den gleichförmigen Eigenbewegungen der Vergleichsterne trennen lässt. Um daher zu entscheiden, ob die Ungleichförmigkeit in den vorliegenden Beobachtungen merklich ist oder nicht, musste gesucht werden, die Eigenbewegungen der Vergleichsterne unabhängig zu bestimmen.

Da der im Fundamentalcataloge für die Zonenbeobachtungen gegebene Werth der Eigenbewegung des Schwerpunkts des Procyon-Systems in Rectascension $= -0^s\!,0474$, der hier zur Reduction der Beobachtungen auf die Epoche 1867,0 benutzt worden, gewiss innerhalb sehr enger Fehlergrenzen richtig ist, so ist offenbar die Grösse $\frac{z}{100}$ nichts anderes, als die mit entgegengesetztem Vorzeichen genommene jährliche Eigenbewegung der einzelnen Vergleichsterne. Dieselbe liesse sich aber auch unabhängig bestimmen, wenn eine genügende Anzahl sich über einen grossen Zeitraum erstreckender Meridianbeobachtungen der kleinen Sterne vorhanden wäre. Dies ist leider für die Sterne *b*, *c* und *d* nicht der Fall; dagegen gehört der Stern *a* (= Br. 1107 = Σ 1126) zu den am häufigsten beobachteten Sternen, und lässt sich seine Eigenbewegung mit grosser Schärfe aus den vorhandenen Catalogen berechnen. Ueber die Ableitung der für die beabsichtigte Rechnung benutzten Oerter dieses Sterns aus den verschiedenen Catalogen habe ich die folgenden Bemerkungen zu machen.

1. Bradley. Da der definitive Catalog der von Prof. Auwers ausgeführten neuen Reduction der Bradley'schen Beobachtungen noch nicht erschienen ist, so entnahm ich den Ort des Sterns dem bis jetzt allein veröffentlichten zweiten Bande dieser Neubearbeitung, worin für 1755,0 als Mittel aus 10 Beobachtungen gegeben ist:

$$\alpha = 7^h\,27^m\,5^s\!,693 \qquad \text{Mittlere Epoche } 1756{,}6$$

Für die Reduction auf das System des Fundamentalcatalogs benutzte ich, da im genannten zweiten Bande die Positionen der Fundamentalsterne nicht aufgeführt sind, die Sterne λ Geminorum, β Canis min., β Cancri und Br. 1197, deren Mittel von dem Orte des gesuchten Sterns nur um $0^h\!,2$ und $2^\circ\!,4$ abweicht. Die Vergleichung der Oerter dieser Sterne mit dem Fundamental-Cataloge ergiebt:

	Beob.	Corr.
λ Geminorum . . .	$59^s\!.863$	$+ 0^s\!.023$
β Canis min. . . .	51.143	+ 0.052
β Cancri	12.586	+ 0.044
Br. 1197	24.571	+ 0.112

im Mittel also $d\alpha = +0^s\!,058$. Nach Anbringung dieser Correction und Reduction auf 1875,0 wird:

$$\alpha = 7^h\,33^m\,28^s\!,937.$$

2. Lalande. Die Ableitung der an den Ort dieses Catalogs anzubringenden Correction geschah mit Hülfe der sechs von Auwers zur Ableitung der relativen Rectascensionen von Procyon benutzten Fundamentalsterne α Tauri, β Orionis, α Orionis, β Geminorum, α Hydrae und α Leonis. Nachdem die Oerter dieser sechs Sterne, wie sie in dem von Baily bearbeiteten Cataloge der Lalande'schen Sterne für alle Beobachtungstage einzeln aufgeführt sind, in Mittel vereinigt waren[1]), wurden dieselben mittelst der Eigenbewegungen nach Auwers von den der *Histoire céleste* entlehnten Beobachtungsdaten auf die Epoche 1800,0 reducirt und darauf mit den aus dem Fundamentalcataloge auf dieselbe Epoche reducirten Oertern verglichen.

	T	Beob. Æ	Corr.
α Tauri...	1795.9	27^{s}304	+ 0^{s}305
β Orionis..	1797.8	56.021	— 0.034
α Orionis..	1794.6	20.887	+ 0.007
β Gemin...	1796.1	3.609	+ 0.086
α Hydrae..	1797.4	45.709	— 0.206
α Leonis..	1796.9	42.535	— 0.054
Mittl. Corr.			+ 0^{s}017.
Beob. Æ von *a*	1797.2	29.45	

In gleicher Weise sind die Correctionen für die übrigen angewandten Positionen abgeleitet, mit dem Unterschiede, dass keine besonderen Reductionen für Eigenbewegung von den Beobachtungstagen auf die Epoche der Cataloge erforderlich war, da für alle Fundamentalsterne diese Reduction schon im Cataloge berücksichtigt ist.

	3. Piazzi II[2])		4. W. Struve		5 Taylor[3])	
	Æ 1800	Corr.	Æ 1830	Corr.	Æ 1835	Corr.
α Tauri....	27^{s}36	+ 0^{s}263	10^{s}44	+ 0^{s}041	27^{s}58	+ 0^{s}052
β Orionis...	55.83	+ 0.154	22.35	— 0.044	36.71	— 0.014
α Orionis ..	20.83	+ 0.068	58.22	+ 0.010	14.46	— 0.007
β Gemin....	3.11	+ 0.397	54.11	+ 0.045	12.61	— 0.037
α Hydrae ..	45.35	+ 0.148	13.99	— 0.007	28.85	— 0.122
α Leonis...	42.23	+ 0.195	18.62	+ 0.022	34.77	— 0.098
Mittl. Corr.		+ 0^{s}196		+ 0^{s}011		— 0^{s}038
Beob. Æ von *a*	29.10	(1800.6)	4.99	(1823 7)	21.03	(1835.0)

1) Hierbei wurden die folgenden über 1^s von den übrigen abweichenden Beobachtungen ausgeschlossen: α Tauri 1797 Oct. 6, β Orionis 1799 Jan. 24, β Gemin. 1797 Febr. 17, α Hydrae 1794 Mz. 17.

2) Alle 6 Beobachtungen von *a* sind am einfachen Fadenkreuze des Palermer Verticalkreises angestellt.

3) Die Epochen der Beobachtungen sind im Cataloge von Taylor nicht gegeben. In dem aus den Beobach-

	6. Robinson[1]		7. Radcliffe II		8. Yarnall	
	Æ 1840	Corr.	Æ 1860	Corr.	Æ 1860	Corr.
α Tauri....	$44^s.724$	+ $0^s.065$	$53^s.43$	+ $0^s.005$	$53^s.42$	+ $0^s.015$
β Orionis...	51.014	+ 0.074	48.62	+ 0.044	48.67	— 0.006
α Orionis...	30.646	+ 0.034	35.58	+ 0.006	35.60	— 0.014
β Gemin....	30.907	+ 0.094	44.64	+ 0.029	44.77	— 0.101
α Hydrae...	43.363	+ 0.113	42.43	+ 0.026	42.47	— 0.014
α Leonis...	50.615	+ 0.080	54.71	+ 0.058	54.84	— 0.072
Mittl. Corr.		+ $0^s.077$		+ $0^s.028$		— $0^s.032$
Beob. Æ von a	36.87	(1840.2)	40.68	(1860.9)	40.71	(1864.8)

	9. Greenwich. New Sevenyear Cat.		10. Greenwich. Nineyear Cat.	
	Æ 1864.	Corr.	Æ 1872.	Corr.
α Tauri	$7^s.15$	+ $0^s.020$	$34^s.638$	+ $0^s.006$
β Orionis...	0.15	+ 0.030	23.203	+ 0.014
α Orionis...	48.56	+ 0.008	14.519	+ 0.016
β Gemin....	59.38	+ 0.018	28.828	+ 0.019
α Hydrae...	54.22	+ 0.031	17.827	+ 0.013
α Leonis ...	7.55	+ 0.030	33.182	+ 0.015
Mittl. Corr.		+ $0^s.023$		+ $0^s.014$
Beob. Æ von a	$53^s.50$	(1867.2)	$19^s.008$	(1868.1)

Ausser diesen Catalogen sind noch die in Pulkowa bestimmten Positionen dieses Sterns benutzt. Von den beiden noch nicht publicirten, aber im Manuscript grösstentheils fertigen Catalogen der am Meridiankreise beobachteten Sterne ist der, die Neubestimmung der Bradley'schen Sterne für 1855,0 enthaltende, auf das System Pulkowa 1845 gegründet und giebt für unsern Stern im Mittel aus 3 Beobachtungen:

$$\alpha = 7^h\ 32^m\ 24^s.83 \qquad \text{Mittlere Epoche } 1861{,}5.$$

Bei der Reduction auf 1855 ist hier die Eigenbewegung $-0^s.0029$ angewandt worden; wird dieselbe wieder abgezogen und dann an den Ort des Sterns die Correction $+0^s.042$ angebracht, welche erforderlich ist, um ihn auf das System von Pulkowa 1865 oder, was auf dasselbe herauskommt, auf das System des Fundamentalcatalogs zu reduciren, so ergiebt sich für 1875,0:

---

tungen von 1834 u. 1835 abgeleiteten Cataloge in Vol. III der Res. of astr. obs. made at Madras findet sich dieselbe Anzahl der Beobachtungen, wie im General Catalogue, dem die obigen Positionen entnommen sind, nämlich 6, so dass die angesetzte Epoche innerhalb eines Jahres richtig sein muss.

1) Die Oerter der Fundamentalsterne sind die der Tabulae Regiomontanae für 1840.0, auf die der Catalog gegründet ist. Selbständige Positionen der Fundamentalsterne sind im Cataloge nicht gegeben.

$$\alpha = 7^h\ 33^m\ 28^s{,}677.$$

Der andere Catalog, welcher die von Herrn Romberg ausgeführte Neubestimmung der Sterne der *Positiones mediae* enthält, ist unmittelbar auf das System von Pulkowa 1865 basirt und giebt im Mittel aus 4 sehr gut unter einander übereinstimmenden Beobachtungen für 1875,0:

$$\alpha = 7^h\ 33^m\ 28^s{,}655 \qquad \text{Mittlere Epoche } 1875{,}4$$

Von den am Pulkowaer Passageninstrumente angestellten Beobachtungen waren vor allen Dingen die in Vol. XI und XII der Observations de Poulkova gegebenen zu berücksichtigen. Der mittlere Ort für den Stern a ist zwar aus den Beobachtungen noch nicht abgeleitet, die angeführten Bände geben jedoch das hierzu nöthige Material vollständig an die Hand. Die dort in der Columne C gegebenen Uhrcorrectionen sind für die Vergleichsterne von Procyon so angesetzt, wie sie aus den Beobachtungen von Procyon allein folgen. Um auch auf die anderen Zeitsterne Rücksicht zu nehmen, habe ich daher nicht diese Uhrcorrectionen benutzt, sondern habe sie in derselben Weise, wie es für die anderen Sterne geschehen ist, zwischen den für die verschiedenen Gruppen der Fundamentalsterne gebildeten Mittelwerthen interpolirt. Ausgeschlossen wurden dabei nur die Beobachtungstage, an denen ausser Procyon innerhalb 3 Stunden vorher oder nachher kein Zeitstern beobachtet war. Die so erhaltenen mittleren Oerter, welche ganz ebenso abgeleitet sind wie die übrigen des vorläufigen Catalogs von Pulkowa 1865, habe ich darauf in Jahresmittel vereinigt. Die Beobachtungen von 1872 bis 1880 habe ich nicht angewandt, da sie noch nicht vollständig reducirt sind und ausserdem grösstentheils nur an die Beobachtungen von Procyon und höchstens noch α und β Geminorum angeschlossen werden könnten. Dagegen habe ich die Beobachtungen, welche im Sommer 1880 zur Herstellung des Catalogs der Pulkowaer Hauptsterne für 1885 begonnen wurden, so weit es hier nöthig war, reducirt, indem ich die Beobachtungen von a an dieselben sechs Fundamentalsterne anschloss, die zur Vergleichung der erwähnten Cataloge benutzt waren. Die definitiven, an die Ablesungen der Miren anzubringenden Azimuthcorrectionen sind noch nicht vollständig berechnet, soviel ist aber bekannt, dass sie sehr klein sind und die relativen Rectascensionen von a gegen die Vergleichsterne nur um wenige Tausendstel der Zeitsecunde ändern können; ich habe sie also nicht berücksichtigt.

In dem nachstehenden Verzeichnisse, das zwar nicht vollständig ist, aber gewiss die wichtigsten Bestimmungen enthält, habe ich die zur Ableitung der Eigenbewegung von a benutzten Rectascensionen, reducirt auf 1875,0, zusammengestellt. Die beigefügten Gewichte sind theils nach dem Vorgange von Newcomb[1]), theils nach eigener Schätzung der relativen Genauigkeit der angewandten Oerter angesetzt.

---

1) Catalogue of 1098 Standard Clock and Zodacal Stars. pag. 157.

	T	Æ	Anzahl der Beob.	p	$O-C$
Bradley	1756.6	$7^h33^m28^s.937$	10	1	$+0^s.077$
Lalande...........	1797.2	28.864	1	0.25	+0.108
Piazzi II	1800.6	28.694	6	0.5	—0.054
W. Struve.........	1823.7	28.628	6	2	—0.061
Taylor.............	1835.0	28.656	6	1	—0.004
Robinson..........	1840.2	28.650	9	1	+0.003
Radcliffe II	1860.9	28.575	6	1	—0.019
Pulkowa (Mer.-Kr.)..	1861.5	28.677	3	2	+0.084
» (Pass.-Instr.)	1863.2	28.594	13	7	+0.006
» »	1864.0	28.596	18	8	+0.010
Yarnall	1864.8	28,545	4	3	—0.039
Pulkowa (Pass.-Instr.)	1865.0	28.554	19	8	—0.030
» »	1866.1	28.546	10	7	—0.035
» »	1867.1	28.584	7	5	+0.006
Greenwich.........	1867.2	28.624	2	2	+0.046
Pulkowa (Pass.-Instr.)	1868.1	28.556	18	8	—0.020
Greenwich.........	1868.1	28.595	2	2	+0.019
Pulkowa (Pass.-Instr.)	1869.2	28.567	11	7	—0.006
» »	1870.2	28.576	13	7	+0.005
» »	1871.2	28.599	4	3	+0.031
» »	1872.2	28.650	1	1	+0.085
» (Mer.-Kr.)..	1875.4	28.655	4	3	+0.096
» (Pass.-Instr.)	1881.1	28.561	10	7	+0.018
» »	1882.2	28.514	9	6	—0.026

Aus diesen Daten ergiebt sich die Rectascension von a für 1875,0:

$$\alpha = 7^h\,33^m\,28^s.558 \pm 0^s.006$$

und die jährliche Eigenbewegung in Rectascension:

$$n = -\,0^s.00255 \pm 0^s.00030.$$

Die Uebereinstimmung der Rechnung mit den Beobachtungen ist eine genügende zu nennen, ausgenommen für die beiden am Pulkowaer Meridiankreise gemachten Bestimmungen, welche beide übereinstimmend um fast $+\,0^s.1$ abweichen. Das Ausschliessen dieser beiden Positionen würde den Betrag der Eigenbewegung nur unbedeutend vergrössern, dagegen den wahrscheinlichen Fehler desselben erheblich verkleinern. Da sich aber ausser ihren

starken Abweichungen kein Einwand gegen diese beiden Bestimmungen erheben lässt, so hielt ich mich nicht berechtigt, sie auszuschliessen. Da nach dem Obigen $z_a = -100n$, so hat uns diese Untersuchung den sehr sicheren Werth $z_a = + 0\overset{s}{.}255$ geliefert. Setzt man diesen Werth in die oben (pag. 20—22) gegebenen Gleichungen zur Berechnung der Parallaxe und des Halbmessers der Procyon-Bahn aus den Rectascensionsdifferenzen $P-a$ ein, so werden die Normalgleichungen:

$$+ 54.100x_a - 27.628y - 21.278u + 3.160 = 0$$
$$- 27.628x_a + 38.913y + 15.486u - 8.342 = 0$$
$$- 21.278x_a + 15.486y + 17.526u - 2.773 = 0$$

woraus:

$$x_a = + 0\overset{s}{.}0900 \pm 0\overset{s}{.}0385$$
$$y = + 0.2650 \pm 0.0407$$
$$u = + 0.0334 \pm 0.0670$$

w. F. einer Gleichung vom Gew. 1 = $\pm 0\overset{s}{.}0193$

oder, in Bogenmaass ausgedrückt,

$$\pi = + 0''\!.398 \pm 0''\!.061$$
$$\delta a = + 0.050 \pm 0.100$$
$$\text{also} \quad a = + 1.030.$$

Wie zu erwarten stand, ist durch Einführung dieses Werthes von z_a die Parallaxe nur wenig geändert, dagegen hat sich für die Correction der Axe ein wesentlich anderes Resulsat ergeben. Während die vorigen Bestimmungen für diese Grösse Werthe ergaben, welche der Ungleichförmigkeit der Eigenbewegung von Procyon entweder direct widersprachen, oder doch ihren Betrag auf die Hälfte reducirten, zeigt diese Bestimmung, welche unstreitig ein viel höheres Gewicht besitzt sowohl wegen des kleineren wahrscheinlichen Fehlers, als hauptsächlich wegen ihrer Unabhängigkeit von der Eigenbewegung des Vergleichsterns, eine vollständige Uebereinstimmung mit der Auwers'schen Bahn, indem die nach dieser Rechnung an die Axe noch anzubringende Correction halb so gross ist wie ihr wahrscheinlicher Fehler.

Um diese Uebereinstimmung noch deutlicher zu zeigen, habe ich alle Beobachtungen von $P-a$ für die (pag. 27) gefundene Parallaxe $\pi = + 0''\!.299$ corrigirt und dann nach Anbringung der Eigenbewegung von a in Jahresmittel vereinigt, aus denen darauf die Grösse u abgeleitet wurde. Die Einheit der angesetzten Gewichte entspricht ungefähr einem Durchgange von Procyon an 40 Fäden bei den Bildern I.

	$P-a$	p	$O-C$	$P'-a$	$O-C$
1863.2	$-42^s\!.744$	1	$-0^s\!.018$	$-42^s\!.721$	$+0^s\!.031$
1864.0	748	1	-0.022	734	$+0.018$
1865.0	711	1.5	$+0.015$	705	$+0.047$
1866.1	707	1	$+0.019$	714	$+0.038$
1867.1	750	0.4	-0.023	768	-0.016
1868.1	698	1.5	$+0.029$	725	$+0.027$
1869.2	703	1	$+0.024$	728	$+0.024$
1870.2	711	1	$+0.016$	756	-0.004
1871.2	715	0.4	$+0.012$	767	-0.015
1872.2	777	0.4	-0.050	835	-0.083
1873.2	733	0.5	-0.006	795	-0.043
1875.2	714	1	$+0.013$	780	-0.028
1876.2	727	0.3	0.000	793	-0.041
1879.2	803	0.1	-0.076	857	-0.105
1880.2	803	0.4	-0.076	851	-0.099
1881.2	755	1	-0.028	795	-0.043
1882.2	732	1	-0.005	763	-0.011

Indem nun $\Delta\alpha_0 = -42^s\!.723$ gesetzt wurde, ergab die Behandlung der vorstehenden Daten nach der Methode der kleinsten Quadrate:

$$+13.500x_a - 5.256u + 0.499 = 0$$
$$-5.256x_a + 4.372u - 0.225 = 0$$

woraus:

$$x_a = +0^s\!.0318 \pm 0^s\!.0608$$
$$u = +0.0132 \pm 0.1069$$

also:

$$\delta a = +0''\!.020 \pm 0''\!.160$$
$$a + +1,000$$

Die Bestimmung von δa hat hier ein etwas ungünstigeres Resultat geliefert, als vorhin, insofern der wahrscheinliche Fehler grösser geworden ist, doch ist die Uebereinstimmung der Rechnung mit den Beobachtungen im Allgemeinen eine befriedigende zu nennen. Die Columne $P'-a$ giebt die Rectascensionsdifferenzen zwischen dem Sterne Procyon selbst und a, und ist gebildet worden durch Abziehen der vorhin an die Beobachtungen angebrachten Reduction auf den Schwerpunkt. Diese Rectascensionsdifferenzen geben im Mittel mit Rücksicht auf die Gewichte $P'-a = -42^s\!.752$. Die Abweichungen der einzelnen Beobachtungen von diesem Mittel sind in der nebenstehenden Columne gegeben. Da die gleichförmige Eigenbewegung von Procyon sowohl wie von a vorher angebracht war, so spricht sich auch in dem in dieser Zusammenstellung hervortretenden Gange der nachblei-

benden Fehler mit Evidenz das Bestehen der ungleichförmigen Bewegung aus, in naher Uebereinstimmung mit den von Auwers für dieselbe abgeleiteten Resultaten.

Ehe wir zu den Declinationsdifferenzen übergehen, will ich noch kurz über die von O. Struve beobachteten Rectascensionsdifferenzen referiren. Die Beobachtungen sind von meinem Vater an den beiden einander parallelen und an den einzelnen Abenden beliebig in bequeme Distanz von einander gestellten Mikrometerfäden des grossen Refractors der Pulkowaer Sternwarte nach der Auge- und Ohr-Methode angestellt. Jede Bestimmung beruht auf je 8 Durchgängen von Procyon und den Vergleichsternen *b* und *c* durch beide Fäden. Der wahrscheinliche Fehler einer aus einem Durchgange je zweier Sterne durch einen jeden Faden folgenden Rectascensionsdifferenz findet sich beiläufig $= 0\overset{s}{,}1$ und folglich wäre der wahrscheinliche Fehler des Mittels aus den 16 Vergleichungen jedes Tages ungefähr $= 0\overset{s}{,}025$. Die Ungleichförmigkeit in Rectascension von Maximum bis Minimum beträgt nach Auwers $0\overset{s}{,}131$, also mehr als das Fünffache des so bestimmten wahrscheinlichen Fehlers und müsste daher auch in diesen Beobachtungen, da sie drei Viertel der Periode umfassen, deutlich hervortreten, obgleich dieselben von vornherein sich nicht zur Aufgabe gestellt hatten, die Ungleichförmigkeit der Eigenbewegung von Procyon zu bestimmen, sondern nur zur Herstellung genauer Relationen zwischen Procyon und den beiden schwachen Sternen gelegentlich der Messungen der Declinationsdifferenzen mitgenommen wurden.

Die Reduction geschah genau auf dieselbe Weise wie für die Beobachtungen am Passageninstrumente; es war hier nur noch die Refraction zu berücksichtigen, welche übrigens bei den kleinen Stundenwinkeln, unter denen die Beobachtungen angestellt sind und den kleinen Declinationsdifferenzen nirgends mehr als $0\overset{s}{,}001$ betrug. Da ferner alle Beobachtungen nahezu in denselben Monat fallen, konnte die Parallaxe füglich vernachlässigt werden. Das folgende Verzeichniss giebt eine Zusammenstellung der Beobachtungen zugleich mit den nach Auwers sowohl für gleichförmige wie für ungleichförmige Bewegung von Procyon auf 1867,0 reducirten Rectascensionsdifferenzen.

		Beobachtet		Reducirt auf 1867.0					
	Sternzeit	$P-b$	$P-c$	$P-b$	$P-c$	$P-\frac{b+c}{2}$	$\Delta(P-b)$	$\Delta(P-c)$	$\Delta\left(P-\frac{b+c}{2}\right)$
1851.12	$7^h 47^m$	$+25\overset{s}{.}294$	$-21\overset{s}{.}269$	$+24\overset{s}{.}482$	$-22\overset{s}{.}072$	$+1\overset{s}{.}205$	$-0\overset{s}{.}107$	$+0\overset{s}{.}228$	$+0\overset{s}{.}061$
1853.26	7 54	25.197	21.600	473	314	079	−0.103	−0.014	−0.058
1854.19	7 58	25.262	21.609	580	282	149	+0.069	+0.018	+0.014
1855.25	8 16	25.188	21.638	556	261	148	−0.005	+0.039	+0.017
1857.22	8 5	25.006	21.710	470	238	116	−0.080	+0.063	−0.008
1859.20	8 2	24.928	21.969	496	394	051	−0.041	−0.093	−0.067
1860.26	9 35	25.128	22.046	753	414	169	+0.223	−0.113	+0.055
1861.25	8 48	24.916	22.094	598	405	096	+0.074	−0.104	−0.015
1863.21	7 26	24.653	22.109	447	310	068	−0.064	−0.009	−0.036

		Beobachtet		Reducirt auf 1867.0.					
	Sternzeit	$P-b$	$P-c$	$P-b$	$P-c$	$P-\frac{b+c}{2}$	$\Delta(P-b)$	$\Delta(P-c)$	$\Delta\left(P-\frac{b+c}{2}\right)$
1864.21	$7^h 31^m$	$+24^s.638$	$-22^s.147$	$+24^s.490$	$-22^s.290$	$+1^s.100$	$-0^s.015$	$+0^s.012$	$-0^s.001$
1864.26	8 55	24.757	22.193	610	334	138	+0.105	−0.032	+0.037
1866.23	8 15	24.522	22.269	491	295	098	−0.001	+0.007	+0.003
1868.24	8 40	24.334	22.390	419	301	059	−0.060	+0.001	−0.029
1868.27	9 27	24.325	22.440	412	349	031	−0.067	−0.047	−0.057
1869.21	8 18	24.441	22.450	582	306	138	+0.109	−0.004	+0.053
1869.23	8 1	24.306	22.409	448	264	092	−0.025	+0.038	+0.007
1870.21	7 28	24.297	22.438	494	239	127	+0.028	+0.063	+0.046
1870.24	8 21	24.275	22.425	473	224	124	+0.007	+0.078	+0.043
1874.17	7 45	24.053	22.738	459	331	064	+0.016	−0.028	−0.006
1876.23	8 40	23.947	22.825	453	319	067	+0.026	−0.016	+0.005
1877.19	7 50	23.853	22.928	403	379	012	−0.018	−0.075	−0.047
1878.23	8 39	23.891	22.772	485	178	153	+0.070	+0.126	+0.098
1879.18	7 12	23.744	22.938	380	303	038	−0.028	+0.001	−0.014
1881.24	8 48	23.644	23.091	363	373	0.995	−0.032	−0.069	−0.050
1881.25	9 6	23.672	23.003	392	284	1.054	−0.003	+0.020	+0.010
1882.25	9 22	23.647	23.100	407	342	032	+0.018	−0.038	−0.009
1882.25	9 24	23.578	23.112	338	354	0.992	−0.051	−0.050	+0.050

Wie diese Zusammenstellung zeigt, ist die Sicherheit der Beobachtungen weit geringer, als sich *a priori* aus der Uebereinstimmung der an den einzelnen Tagen beobachteten Durchgänge erwarten liess. Ich habe daher nicht den Versuch gemacht, aus ihnen eine Correction für die Axe der Bahn abzuleiten, sondern sie nur für eigene Bewegung ausgeglichen. Es ergab sich:

$$P-b = +24^s.487 - 0^s.00645\,(t-1867.0) \qquad \text{w. F. einer Beob.} = \pm 0.050$$
$$P-c = -22.302 - 0.00015\,(t-1867.0) \qquad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} = \pm 0.048$$
$$P-\frac{b+c}{2} = +1.092 - 0.00330\,(t-1867.0) \qquad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} = \pm 0.028$$

Die Uebereinstimmung der Rechnung mit den Beobachtungen ist für die Vergleichungen mit den einzelnen Sternen b nnd c als eine sehr ungenügende zu bezeichnen. Viel günstiger ist das für die Differenzen zwischen Procyon und dem Mittel von b und c erhaltene Resultat, weit besser, als sich aus den für die einzelnen Beobachtungen dieser Sterne gefundenen wahrscheinlichen Fehlern ergeben würde. Da sich überdies gezeigt hat, dass die Beobachtungen von $P-b$ noch etwas unsicherer sind, als die von $P-c$, so ist damit angedeutet, dass die Sicherheit der Bestimmungen mit zunehmender Rectascensionsdifferenz abnimmt, und es liegt nahe, diese Erscheinung der Zeit proportionalen kleinen Verstellungen des Instruments in Rectascension zuzuschreiben. Ist dies der Fall, so müssen die Differenzen zwischen den kleinen Sternen noch grössere Abweichungen von einander zeigen und der wahrscheinliche Fehler einer Bestimmung derselben entsprechend grösser sein. Die Ausgleichung dieser Differenzen giebt:

$$c-b = +46^s.789 - 0^s.00631\,(t-1867.0)$$

und lässt folgende Fehler nach:

	$c-b$	$\Delta(c-b)$	t	$c-b$	$\Delta(c-b)$
1851.12	$+46^{s}.554$	$-0^{s}.335$	1869.21	$+46^{s}.888$	$+0^{s}.113$
1853.26	46.787	−0.089	1869.23	46.712	−0.063
1854.19	46.862	−0.008	1870.21	46.733	−0.036
1855.25	46.817	−0.046	1870.24	46.697	−0.072
1857.22	46.708	−0.143	1874.17	46.790	+0.046
1859.20	46.890	+0.052	1876.23	46.772	+0.041
1860.26	47.167	+0.335	1877.19	46.782	+0.057
1861.25	47.003	+0.178	1878.23	46.663	−0.053
1863.21	46.757	−0.056	1879.18	46.683	−0.029
1864.21	46.780	−0.027	1881.24	46.736	+0.036
1864.26	46.944	+0.138	1881.25	46.676	−0.023
1866.23	46.786	−0.008	1882.25	46.749	+0.056
1868.24	46.720	−0.061	1882.25	46.692	−0.001
1868.27	46.761	−0.020			

Diese Vergleichung erhebt die Vermuthung, dass das Instrument in Rectascension nicht genügend stabil gewesen ist, zur Gewissheit, indem sie den wahrscheinlichen Fehler einer Beobachtung der Differenz $c-b$ zu $0^{s}.080$ giebt.

Eine Ausgleichung mit Annahme gleichförmiger Eigenbewegung ändert nicht wesentlich die Uebereinstimmung zwischen Rechnung und Beobachtung; sie giebt nämlich:

$$P-b = +24^{s}.485 - 0^{s}.01176\,(t-1867.0) \qquad \text{w. F. einer Beob.} = \pm 0^{s}.048$$
$$P-c = -22.303 - 0.00544\,(t-1867.0) \qquad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} = \pm 0.044$$
$$P-\frac{b+c}{2} = +\ 1.091 - 0.00860\,(t-1867.0) \qquad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} = \pm 0.028$$

Die nahe Gleichheit der hier gefundenen wahrscheinlichen Fehler mit denen unter Berücksichtigung der ungleichförmigen Eigenbewegung abgeleiteten lehrt, dass sich letztere in diesen Beobachtungen nicht ausspricht, was, wie es scheint, zum grossen Theil kleinen Verstellungen des Instruments während der Beobachtungen zugeschrieben werden muss. Unter Annahme der nach dem Vorstehenden vorwiegend bestehenden Proportionalität mit der Zeit haben diese Verstellungen einen verschwindend kleinen Einfluss auf die Differenzen $P-\frac{b+c}{2}$, und es steht daher zu erwarten, dass auch durch diese Beobachtungen, wenn sie noch längere Zeit fortgesetzt werden, ein werthvoller Beitrag zur näheren Bestimmung der ungleichförmigen Eigenbewegung in Rectascension geliefert werden wird.

Zweiter Abschnitt.

Die Declinationsdifferenzen.

Im Gegensatz zu den Beobachtungen der Rectascensionsdifferenzen, hatten die von meinem Vater angestellten Messungen der Declinationsdifferenzen unmittelbar die Aufgabe, die von W. Struve in seinen *Études d'astronomie stellaire* (pag. 47, Note 62 und Note finale 1) ausgesprochene Ansicht, dass die Unregelmässigkeit der Eigenbewegung von Procyon in Declination durch Bessel noch nicht über alle Zweifel erhoben sei, einer sorgfältigen Prüfung zu unterziehen. Bei den ausgezeichneten Resultaten, die mein Vater schon bei anderen Gelegenheiten, wie bei der Bestimmung der Parallaxe von Groombridge 1830 durch Beobachtungen von Declinationsdifferenzen am hiesigen grossen Refractor erlangt hatte, durfte erwartet werden, dass diese Messungen die in Rede stehende Frage in einer verhältnissmässig kurzen Zeit mit grosser Sicherheit beantworten würden. Ehe aber hierzu ein genügender Zeitraum verstrichen war, veröffentlichte Prof. Auwers seine erste Abhandlung über unregelmässige Eigenbewegungen, in welcher er durch eine erschöpfende Behandlung des ganzen seit Bradley's Zeiten an Meridianbeobachtungen von Procyon gesammelten Materials die Ungleichförmigkeit der Eigenbewegung dieses Sterns ausser Frage setzte und möglichst genaue Kreis-Elemente für die Bahn desselben lieferte. Die von ihm ausgeführte Vergleichung der von 1851 bis 1861 von meinem Vater beobachteten Declinationsdifferenzen zeigte schon damals, dass letztere sich etwas besser unter Annahme der von ihm ermittelten Unregelmässigkeit der Eigenbewegung darstellen liessen, als bei gleichförmig angenommener Bewegung, doch war die Lage des in dieser Zeit von Procyon durchlaufenen Theiles der Bahn nicht günstig zur Trennung der beiden verschiedenen Bewegungsarten. Auch die zweite Abhandlung, vom Jahre 1873, in welcher Prof. Auwers mit Berücksichtigung der neueren, bis 1870 erhaltenen Meridianbeobachtungen von den früheren nur wenig abweichende Elemente abgeleitet hat, giebt am Schlusse eine Vergleichung der gewonnenen Resultate mit den Differentialbeobachtungen und speciell mit den von O. Struve bestimmten Declinationsdifferenzen, die bis zum Frühjahre 1873 reichten. Eine Darstellung dieser Beobachtungen durch gleichförmige Eigenbewegung erschien damals bereits ganz unmöglich, dagegen zeigte sich eine nahezu befriedigende Uebereinstimmung unter Annahme der Auwers'schen Elemente V. Es verdient aber hier hervorgehoben zu werden, dass ein

Versuch, bei angenommener Richtigkeit der übrigen Elemente, den Bahnhalbmesser aus den Declinationsdifferenzen unabhängig zu bestimmen, auf den kleineren Werth 0,"796 ± 0,"069 führte, während das Hinzuziehen einiger Messungen anderer Astronomen den noch kleineren Werth 0,"710 lieferte. Mit Rücksicht auf das zu jener Zeit viel sicherer erscheinende Resultat, welches die zahlreichen Meridianbeobachtungen in den 120 Jahren seit Bradley für diese Grösse ergeben hatten, konnte die durch die Differentialbeobachtungen angedeutete Verkleinerung des Halbmessers der Bahn nicht als verbürgt angesehen werden, indem die Uebereinstimmung zwischen Rechnung und Beobachtung durch dieselbe kaum merklich verbessert wurde. Seitdem sind wieder zehn Jahre verflossen, in denen mein Vater seine Beobachtungen von Procyon regelmässig fortgesetzt hat, so dass dieselben jetzt zwar noch keinen ganzen Umlauf, aber doch schon etwas mehr als drei Viertel eines solchen um den Schwerpunkt des Systems umfassen. Dieser verhältnissmässig kurze Zeitraum hat genügt, um darzuthun, dass die Beobachtungen nicht mehr mit den Auwers'schen Elementen befriedigend vereinbar sind, und diese Bemerkung war, wie gesagt, die ursprüngliche Veranlassung zu vorliegender Arbeit.

Von Mikrometermessungen der Declinationsdifferenzen zwischen Procyon und benachbarten Sternen sind mir ausser den hiesigen nur die wenigen von Auwers in seinen erwähnten Abhandlungen angeführten bekannt geworden. Da die letzteren mit genügend zahlreichen Beobachtungen meines Vaters zusammenfallen und im Allgemeinen ein kleineres Gewicht besitzen als diese, habe ich dieselben, um nicht mögliche kleine constante Unterschiede schädlich einwirken zu lassen, nur zuletzt bei der Vergleichung der Beobachtungen mit den erlangten Resultaten mit berücksichtigt und mich bei meinen Untersuchungen auf die Pulkowaer Beobachtungen allein beschränkt. Dass die wenigen Beobachtungen derselben Differenzen, wie sie an Meridianinstrumenten gelegentlich erhalten sind, zu Untersuchungen von so subtiler Natur keinen Beitrag von irgend erheblichem Gewichte gegenüber den Mikrometermessungen liefern können, ist wohl selbstverständlich.

Die von meinem Vater bei den Beobachtungen der Declinationsdifferenzen befolgte Methode ist von ihm in seiner Schrift *Détermination de la parallaxe de l'étoile de Groombridge 1830*[1]) beschrieben und wird über die im vorliegenden Falle gemachten Abweichungen in dem im Druck befindlichen Vol X der Observations de Poulkova eingehender die Rede sein. Ich brauche daher hier nicht auf eine Beschreibung der Beobachtungen einzugehen und bemerke nur, dass sie durchweg mit 207facher Vergrösserung angestellt sind und dass eine vollständige Bestimmung immer auf je vier Vergleichungen von Procyon mit den beiden Sternen *b* und *c* in zwei entgegengesetzten Lagen des Mikrometers beruht. Von dieser Regel ist in der ganzen Zeit nur ein Mal, 1861 Apr. 1, wegen Wolken bei Stern *b* abgewichen. Die Beobachtungen 1873 Mz. 19 und 26 ergänzen sich gegenseitig, indem die eine der-

---

1) Recueil de Mémoires présentés par les Astronomes de Poulkova. I. pag. 269—275.

selben nur in der ersten und die zweite nur in der zweiten Lage des Mikrometers angestellt ist und können daher zusammen als ein den anderen Bestimmungen gleichwerthiges Resultat angesehen werden. Auch über die Reduction der Beobachtungen ist nur wenig zu bemerken. Die Refraction berechnete ich nach den von Bessel[1]) gegebenen Formeln und Tafeln und die Reduction auf das mittlere Aequinoctium geschah mit Hülfe der folgenden Unterschiede der Sternconstanten von Procyon und seinen Vergleichsternen:

	$\Delta a'$		$\Delta b'$		$\Delta c'$		$\Delta d'$	
	1850.0	1880.0	1850.0	1880.0	1850.0	1880.0	1850.0	1880.0
Stern *b*	+ 0.03408	+ 0.03175	— 0.00072	— 0.00068	— 0.00041	— 0.00055	+ 0.00003	— 0.00004
» *c*	— 0.02850	— 0.03085	+ 0.00060	+ 0.00066	— 0.00007	— 0.00020	— 0.00019	— 0.00026

Nachdem die Beobachtungen so auf das mittlere Aequinoctium für den Anfang des Beobachtungsjahres gebracht waren, wurden sie mit Rücksicht auf Präcession auf die gemeinschaftliche Epoche 1867,0 reducirt. Da der Coefficient der Parallaxe in Declination immer sehr klein ist und überdies die Beobachtungen alle in derselben Jahreszeit, vorwiegend im Monat März, angestellt sind, so brauchte auf die Parallaxe keine Rücksicht genommen zu werden.

Die nachfolgende Tafel enthält die Zusammenstellung sämmtlicher von meinem Vater angestellten Beobachtungen mit den sich aus ihnen ergebenden Declinationsdifferenzen für 1867,0, zu denen ich in der letzten Columne die nach den Auwers'schen Elementen berechneten Reductionen auf den Schwerpunkt hinzugefügt habe. Bei der Verwandlung der ursprünglich in Mikrometertheilen ausgedrückten Declinationsdifferenzen in Bogenwerthe ist der definitiv von meinem Vater ermittelte Werth eines Umgangs der Mikrometerschraube[2]) $r = 9''{,}7091 - 0''{,}00022\, t$, wo t die Temperatur in Graden Réaumur bedeutet, angewandt.

		Beobachtet.					Reducirt auf 1867.0.			Red. auf den Schwerp. nach Auwers.
		$P-b$		$P-c$		Temp. Reaum.	$P-b$	$P-c$	$P-\frac{b+c}{2}$	
1	1851 Febr. 14	$7^{m}13^{h}$	— 74″30	$7^{h}20^{m}$	— 29″65	— 8°0	— 75″01	— 29″08	— 52″04	— 0″60
		7 36	74.50	7 28	29.43					
2	1852 Jan. 14	7 11	75.05	7 18	30.10	— 8.2	75.81	29.81	52.81	— 0.50
		7 30	75.44	7 24	30.35					
3	1853 Apr. 3	8 23	76.49	8 28	31.86	— 4.9	77.15	31.42	54.28	— 0.35
		8 40	76.78	8 33	31.73					
4	1854 Mz. 12	7 22	77.44	7 32	32.36	— 5.3	78.11	32.34	55.22	— 0.21
		7 46	77.81	7 40	33.00					
5	1855 Apr. 1	7 40	78.63	7 48	34.21	— 1.9	79.27	33.75	56.51	— 0.03
		8 2	78.99	7 55	33.91					
6	1857 Mz. 24	7 24	80.74	7 32	36.35	— 0.8	81.46	35.99	58.72	+ 0.28
		7 48	81.40	7 40	36.14					
7	1859 Mz. 15	7 16	82.98	7 25	37.85	— 6.5	83.48	37.89	60.68	+ 0.56
		7 45	83.34	7 37	38.28					

1) Astronomische Untersuchungen. I. pag. 168.

2) Observ. de Poulkova. Vol. IX. pag. (18) und (24).

		Beobachtet					Reducirt auf 1867.0			Red. auf den Schwerp. nach Auwers.
		$P-b$		$P-c$		Temp. Reaum.	$P-b$	$P-c$	$P-\frac{b+c}{2}$	
8	1860 Apr. 2	8^h12^m	— 84″50	8^h22^m	—39″32	+3°0	— 84″74	—39″06	—61″90	+0″67
		9 8	84.43	8 58	39.11					
9	» » 6	8 57	84.59	9 3	39.41	—1.8	84.85	39.22	62.03	+0.67
		9 17	84.54	9 10	39.35					
10	1861 Mz. 15	8 38	85.87	8 48	40.65	—5.3	86.25	40.37	63.31	+0.77
		9 4	86.14	8 56	40.36					
11	» Apr. 1	8 2	85.33	8 12	39.99	+2.7		39.83		+0.78
				8 21	39.93					
12	» » 2	8 5	85.91	8 15	40.54	+1.3	86.04	40.08	63.06	+0.78
		8 30	85.69	8 22	39.89					
13	1862 Mz. 17	6 40	86.64	6 54	40.78	—6.5	86.51	40.93	63.72	+0.86
		7 10	85.93	7 3	41.27					
14	1863 Mz. 16	6 45	87 97	6 53	42.40	—0.6	88.15	42.41	65 28	+0.92
		7 8	87.95	7 1	42.56					
15	1864 Mz. 17	6 53	88.59	7 0	43.93	—6.5	88.88	43.81	66.34	+0.96
		7 15	88.87	7 15	43.77					
16	» Apr. 6	8 20	88 54	8 28	43.56	—3.6	89.05	43.44	66.24	+0.96
		8 42	89.25	8 34	43.41					
17	1866 Mz. 25	7 40	90.82	7 46	45.44	—5.8	91.02	45.29	68.15	+0.97
		8 4	91.02	7 56	45.10					
18	1868 Mz. 30	8 6	92.84	8 13	47.46	+0.7	92.85	47.30	70.07	+0.88
		8 32	92.80	8 22	46.99					
19	» Apr. 9	8 52	92.80	8 58	47.08	—1.4	92.87	47.03	69.95	+0.88
		9 13	92.85	9 6	46.82					
20	1869 Mz. 18	7 37	94.26	7 47	48.68	—1.2	93.89	48.41	71.15	+0.81
		8 4	93.50	7 56	47.90					
21	» » 25	7 27	93.91	7 36	48.30	—2.3	93.90	48.54	71.22	+0.81
		7 50	93.87	7 43	48.55					
22	1870 Mz. 19	6 53	94.64	6 57	49.11	—6.6	94.80	49.36	72.08	+0.71
		7 12	94.99	7 5	49.31					
23	» » 29	7 46	94.89	7 52	48.82	+1.4	94.86	49.30	72.08	+0.71
		8 8	94.86	8 0	49 47					
24	1873 Mz. 19	7 14	97.52	7 26	51.56	—2.2	96.96	51.89	74.42	+0.32
	» » 26	8 34	96.64	8 21	51.75	—0.3				
25	1874 Mz. 5	6 25	98.49	6 36	52.59	—9.5	98.37	52.91	75.64	+0.18
		6 56	98.57	6 46	52.67					
26	1876 Mz. 26	7 54	99.61	8 3	53.78	—4.2	99.67	54.41	77.04	—0.13
		8 27	100.18	8 19	54.38					
27	1877 Mz. 19	6 50	101.42	7 4	55.17	—7.8	101.27	55.53	78.40	—0.28
		7 27	101.64	7 15	55.17					
28	1878 Mz. 27	7 59	102.24	8 7	56.01	—6.0	101.92	56.34	79.13	—0.43
		8 24	102.16	8 16	55.89					
29	1879 Mz. 9	6 33	103.17	6 43	57.00	—2 3	102.91	57.28	80 09	—0.55
		7 2	103.28	6 52	56.73					
30	1881 Mz. 27	7 52	105.13	8 5	59.11	—7.5	105.12	59.53	82.32	—0.78
		8 29	105.89	8 18	58.95					
31	» Apr. 1	8 17	105.28	8 30	58.49	—3.9	104.98	59.24	82.11	—0.78
		8 53	105.47	8 40	59.00					
32	1882 Apr. 1	8 22	105.83	8 34	59.68	+0.9	105.65	60.05	82.85	—0.87
		8 55	106.33	8 46	59.37					
33	» » 3	8 31	105.86	8 41	60.11	+1.2	105.63	60.49	83.06	—0.87
		9 4	106.25	8 54	59.83					

Ein constanter Unterschied zwischen den Beobachtungen in beiden Lagen des Mikrometers, wie ihn mein Vater für seine Beobachtungen von Groombridge 1830 [1]) erhalten hatte, zeigt sich auch bei den Messungen von *P—b*, aber nicht bei denen von *P—c*. Man

1) Recueil de Mémoires. I. pag. 283.

erhält nämlich im Mittel für die Beobachtungen des Sterns b I — II = + 0''17 ± 0''04, für die des Sterns c I — II = 0''00 ± 0''04. Eine Erklärung dieser Erscheinung liegt vermuthlich in dem Umstande, dass bei den Messungen von $P—b$ der bewegliche Faden auf den hellen Procyon, bei denen von $P—c$ dagegen auf den kleinen Stern c einzustellen war. Wegen der Existenz dieses, im einzelnen Falle doch erheblich variirenden Unterschiedes habe ich es vorgezogen, die eine unvollständige Beobachtung von $P—b$, 1861 Apr. 1, bei den folgenden Rechnungen ganz auszuschliessen, wodurch ich gleichzeitig den Vortheil erlangte, dass ich nur mit Beobachtungen von gleichem Gewichte zu thun hatte, indem bei schlechten Bildern Beobachtungen gar nicht unternommen wurden. Eine Ausgleichung der vorstehenden Beobachtungen mit Annahme gleichförmiger Eigenbewegung führte zu den Formeln:

$$\text{I}\quad\begin{cases} P-b = -91''23 - 0''9789\,(t-1867.0) \\ P-c = -45.64 - 0.9905\,(t-1867.0) \\ P-\frac{b+c}{2} = -68.43 - 0.9847\,(t-1867.0) \end{cases}$$

Berücksichtigt man dagegen die Unregelmässigkeit der Eigenbewegung, wie sie nach Auwers' Berechnung stattfindet, so erhält man für die Differenz zwischen Procyon-Schwerpunkt und den Vergleichsternen

$$\text{II}\quad\begin{cases} P-b = -91''00 - 1''0030\,(t-1867.0) \\ P-c = -45.41 - 1.0160\,(t-1867.0) \\ P-\frac{b+c}{2} = -68.21 - 1.0087\,(t-1867.0) \end{cases}$$

Die Vergleichung dieser Formeln mit den Beobachtungen ist in nachstehender Tabelle gegeben (im Sinne Beobachtung — Rechnung).

	I			II		
	$\Delta(P-b)$	$\Delta(P-c)$	$\Delta\left(P-\frac{b+c}{2}\right)$	$\Delta(P-b)$	$\Delta(P-c)$	$\Delta\left(P-\frac{b+c}{2}\right)$
1	+ 0''68	+ 0''83	+ 0''76	— 0''54	— 0''41	— 0''45
2	+ 0.78	+ 1.01	+ 0.90	— 0.31	— 0.10	— 0.19
3	+ 0.63	+ 0.61	+ 0.62	— 0.28	— 0.31	— 0.28
4	+ 0.58	+ 0.59	+ 0.58	— 0.16	— 0.15	— 0.14
5	+ 0.46	+ 0.25	+ 0.36	— 0.07	— 0.30	— 0.16
6	+ 0.21	— 0.04	+ 0.08	+ 0.01	— 0.23	— 0.09
7	+ 0.12	+ 0.02	+ 0.07	+ 0.26	+ 0.16	+ 0.22
8	— 0.12	— 0.11	— 0.12	+ 0.16	+ 0.17	+ 0.17
9	— 0.23	— 0.26	— 0.24	+ 0.06	+ 0.02	+ 0.05
10	— 0.70	— 0.48	— 0.59	— 0.30	— 0.09	— 0.18
11		+ 0.11			+ 0.52	
12	— 0.44	— 0.14	— 0.29	— 0.02	+ 0.27	— 0.12
13	+ 0.03	— 0.04	0.00	+ 0.54	+ 0.47	+ 0.52
14	— 0.63	— 0.53	— 0.58	— 0.03	+ 0.07	+ 0.03

	I			II		
	$\Delta(P-b)$	$\Delta(P-c)$	$\Delta\left(P-\frac{b+c}{2}\right)$	$\Delta(P-b)$	$\Delta(P-c)$	$\Delta\left(P-\frac{b+c}{2}\right)$
15	−0″.38	−0″.93	−0″.66	+0″.29	−0″.27	+0″.02
16	−0.50	−0.52	−0.51	+0.17	+0.16	+0.17
17	−0.54	−0.41	−0.48	+0.18	+0.31	+0.25
18	−0.40	−0.43	−0.42	+0.27	+0.24	+0.27
19	−0.40	−0.13	−0.26	+0.28	+0.54	+0.42
20	−0.50	−0.58	−0.54	+0.14	+0.05	+0.10
21	−0.49	−0.69	−0.59	+0.15	−0.06	+0.05
22	−0.43	−0.54	−0.48	+0.13	+0.03	+0.08
23	−0.46	−0.45	−0.46	+0.10	+0.10	+0.11
24	+0.36	−0.09	+0.14	+0.60	+0.16	+0.39
25	−0.12	−0.17	−0.14	0.00	−0.04	−0.02
26	+0.60	+0.37	+0.48	+0.46	+0.25	+0.35
27	−0.06	+0.20	+0.07	−0.33	−0.05	−0.20
28	+0.31	+0.42	+0.36	−0.09	+0.05	−0.03
29	+0.24	+0.42	+0.33	−0.24	−0.05	−0.14
30	+0.05	+0.21	+0.13	−0.62	−0.43	−0.53
31	+0.20	+0.51	+0.36	−0.47	−0.13	−0.31
32	+0.51	+0.69	+0.60	−0.22	−0.01	−0.12
33	+0.53	+0.25	+0.39	−0.20	−0.45	−0.33

Man erkennt aus dieser Vergleichung sofort, dass keine der beiden gemachten Hypothesen befriedigt. Bei Annahme der Auwers'schen Elemente werden die nachbleibenden Fehler zwar beträchtlich kleiner, doch zeigt sich in ihnen ein deutlich ausgesprochener Gang, der im entgegengesetzten Sinne, wie bei der Hypothese der gleichförmigen Bewegung, verläuft. Daraus lässt sich nun unmittelbar der Schluss ziehen, dass die Ungleichförmigkeit der Eigenbewegung von Procyon sich in den Beobachtungen zwar sehr deutlich ausspricht, dass aber ihr Betrag um ein Bedeutendes kleiner ist, als ihn die Berechnung von Auwers ergeben hat.

Die vorliegenden Beobachtungen liefern also schon jetzt ein brauchbares Material zur Correction der Elemente. Mit Rücksicht darauf, dass die Resultate, welche Prof. Auwers aus den Rectascensionen von Procyon erhalten hatte, ihren wahrscheinlichen Fehlern nach zu urtheilen, einen beträchtlich grösseren Genauigkeitsgrad besitzen, als die aus den Declinationen abgeleiteten[1]), und meine Rechnungen über die Rectascensionsdifferenzen des einzigen Vergleichsterns *a*, für welchen die Eigenbewegung unabhängig abgeleitet werden konnte, damit gut übereinstimmen, deuten die hier auftretenden Abweichungen eine

1) Berliner Monatsbericht. Mai 1873. pag. 389. Auwers findet aus den

	Rectascensionen	Declinationen
a	0″.9793 ± 0″.0323	0″.9937 ± 0″.0407
T	1795.664 ± 0ʲ.567	1795.640 ± 0ʲ.762
n	8°.9854 ± 0°.1000	9°.1720 ± 0°.1839

Ellipticität der scheinbaren Bahn an. Versuche, aus den Messungen der Declinationsdifferenzen allein ganz selbständig eine elliptische Bahn abzuleiten, führten zu durchaus unbefriedigenden Resultaten. Bei den weiteren Untersuchungen über die Declinationsdifferenzen bin ich daher bei der Auwers'schen Hypothese einer Kreisbahn stehen geblieben.

Bezeichnet man die mit Präcession auf das Aequinoctium von 1867,0 reducirte Declinationsdifferenz zur Zeit t mit $\Delta\delta$, diejenige des Schwerpunkts in Bezug auf den Vergleichstern für 1867,0 mit $\Delta\delta_0$ und die relative jährliche Eigenbewegung in Declination zwischen Procyon-Schwerpunkt und dem Vergleichsterne mit m, so ist:

$$\Delta\delta = \Delta\delta_0 + m\,(t - 1867{,}0) + a \sin n\,(t - T).$$

Jede Beobachtung von $\Delta\delta$ liefert eine solche Gleichung zur Berechnung von $\Delta\delta_0$, m, a, n, T. Hat man schon angenäherte Werthe für diese Unbekannten, so erhält man hiernach zur Berechnung der an dieselben anzubringenden Verbesserungen:

$$d\Delta\delta_0 + (t - 1867{,}0)\,dm + \sin n\,(t-T)\,da - an\cos n\,(t-T)\,\mathrm{arc}\,1^\circ dT +$$
$$a\,(t-T)\cos n\,(t-T)\,\mathrm{arc.}\,1^\circ dn + \Delta\delta_0 - \Delta\delta = 0.$$

Da die vorliegenden Beobachtungen noch keinen vollen Umlauf von Procyon um den Schwerpunkt des Systems umfassen, so wäre eine Berechnung der Umlaufszeit oder, was auf dasselbe herauskommt, der mittleren jährlichen Bewegung in der Bahn aus ihnen gegenwärtig noch verfrüht, und könnte die Umlaufszeit leicht auf mehrere Jahre falsch erhalten werden. Ich nahm daher diese Grösse als nach Auwers bekannt an und setzte demnach in obiger Gleichung $dn = 0$. Setzt man ferner zur Abkürzung:

$$d\Delta\delta_0 = x \qquad da = z \qquad \Delta\delta_0 - \Delta\delta = \nu \qquad \sin n\,(t-T) = c$$
$$10\,dm = y \qquad 10\,\mathrm{arc}\,1^\circ dT = u \qquad \tfrac{1}{10}\,(t - 1867{,}0) = b \qquad -\tfrac{an}{10}\cos n\,(t-T) = d,$$

so liefert jede Beobachtung eine Gleichung von der Form:

$$x + by + cz + du + \nu = 0.$$

Als erste Annäherung für m benutzte ich die im Fundamentalcataloge für die Zonenbeobachtungen gegebene mittlere Eigenbewegung von Procyon in Declination $= -1''\!,027$ und für a und T die Auwers'schen Elemente V. Indem ich diese Werthe in die vorstehende Formel einsetzte und $\Delta\delta_0 = -68''\!,20$ annahm, erhielt ich aus den Beobachtungen von $P - \frac{b+c}{2}$ die folgenden 32 Gleichungen:

1	x	$-1.59y$	$+0.63z$	$+0.69u$	$+0.75 = 0$
2		-1.50	$+0.51$	$+0.76$	$+0.47$
3		-1.37	$+0.34$	$+0.83$	$+0.54$
4		-1.28	$+0.19$	$+0.87$	$+0.38$
5		-1.18	$+0.03$	$+0.89$	$+0.39$
6		-0.98	-0.28	$+0.85$	$+0.28$

7	x	$-0.78y$	$-0.56z$	$+0.73u$	$-0.07=0$
8		-0.68	-0.69	$+0.64$	-0.04
9		-0.67	-0.69	$+0.64$	$+0.08$
10		-0.58	-0.79	$+0.54$	$+0.30$
11		-0.58	-0.79	$+0.54$	-0.02
12		-0.48	-0.88	$+0.43$	-0.42
13		-0.38	-0.94	$+0.30$	$+0.05$
14		-0.28	-0.98	$+0.16$	$+0.04$
15		-0.27	-0.98	$+0.16$	-0.11
16		-0.08	-0.99	-0.12	-0.23
17		$+0.12$	-0.90	-0.38	-0.28
18		$+0.13$	-0.90	-0.39	-0.43
19		$+0.22$	-0.82	-0.50	-0.13
20		$+0.22$	-0.82	-0.50	-0.08
21		$+0.32$	-0.73	-0.61	-0.13
22		$+0{\cdot}32$	-0.72	-0.61	-0.16
23		$+0.62$	$-0{,}33$	-0.84	-0.49
24		$+0.72$	-0.20	-0.87	-0.10
25		$+0.92$	$+0.14$	-0.88	-0.51
26		$+1.02$	$+0.29$	-0.85	$+0.02$
27		$+1.12$	$+0.44$	-0.80	-0.17
28		$+1.22$	$+0.57$	-0.73	-0.07
29		$+1.42$	$+0.80$	-0.53	$+0.28$
30		$+1.42$	$+0.80$	-0.53	$+0.06$
31		$+1.52$	$+0.88$	-0.41	-0.15
32		$+1.52$	$+0.88$	-0.41	$+0.06$

Die Behandlung dieser Gleichungen nach der Methode der kleinsten Quadrate führte zu folgenden Endgleichungen:

$$
\begin{aligned}
+32.000x + 0.150y - 7.490z - 0.930u + 0.110 &= 0\\
+0.150x + 27.890y + 6.608z - 16.898u - 4.755 &= 0\\
-7.490x + 6.608y + 15.575z - 1.802u + 2.530 &= 0\\
-0.930x - 16.898y - 1.802z + 12.862u + 3.745 &= 0,
\end{aligned}
$$

deren Auflösung für die Unbekannten ergiebt:

$$
\begin{aligned}
x &= -0\overset{''}{.}0737 \pm 0.0219\\
y &= +0.1677 \pm 0.0548\\
z &= -0.2825 \pm 0.0354\\
u &= -0.1157 \pm 0.0769
\end{aligned}
$$

also: $dT = -0^{s}.663 \pm 0^{s}.440$

w. F. einer Beobachtung $= \pm 0\overset{''}{.}116$

Die Elemente der Procyon-Bahn werden demnach:

$$a = +0''.6980 \pm 0''.0354$$
$$T = 1794.966 \pm 0^{J}.440$$
$$n = 9^{\circ}.02993 \pm 0^{\circ}.08072 \quad \text{(Auwers' Elemente V).}$$

Für die Darstellung der Declinationsdifferenzen erhält man also:

$$\text{III.} \quad P - \frac{b+c}{2} = -68''.274 - 1''.0102\,(t - 1867.0) + 0''.6980 \sin n\,(t - T).$$

Reducirt man ferner die Beobachtungen der Declinationsdifferenzen zwischen Procyon und den beiden einzelnen Sternen b und c mit Hülfe der eben gefundenen Elemente auf den Schwerpunkt des Systems und gleicht sie darauf für Eigenbewegung aus, so erhält man zur Darstellung derselben die Formeln:

$$\text{III}_a \begin{cases} P - b = -91''.101 - 1''.0062\,(t - 1867.0) + 0''.6980 \sin n\,(t - T) \\ P - c = -45.468 - 1.0150\,(t - 1867.0) + 0.6980 \sin n\,(t - T). \end{cases}$$

Die Vergleichung dieser Formeln mit den Beobachtungen ergiebt folgende nachbleibende Fehler (im Sinne Beobachtung — Rechnung):

	$\Delta(P-b)$	$\Delta(P-c)$	$\Delta\left(P-\frac{b+c}{2}\right)$		$\Delta(P-b)$	$\Delta(P-c)$	$\Delta\left(P-\frac{b+c}{2}\right)$
1	— 0″.27	— 0″.11	— 0″.21	18	+ 0″.09	+ 0″.01	+ 0″.05
2	— 0.05	+ 0.19	+ 0.06	19	+ 0.10	+ 0.31	+ 0.20
3	— 0.03	— 0.06	— 0.05	20	— 0.03	— 0.17	— 0.11
4	+ 0.05	+ 0.07	+ 0.05	21	— 0.02	— 0.28	— 0.16
5	+ 0.07	— 0.15	— 0.04	22	— 0.02	— 0.18	— 0.11
6	+ 0.06	— 0.18	— 0.06	23	— 0.05	— 0.09	— 0.08
7	+ 0.22	+ 0.11	+ 0.15	24	— 0.44	+ 0.05	+ 0.30
8	+ 0.10	+ 0.09	+ 0.09	25	0.00	— 0.11	— 0.06
9	0.00	— 0.06	— 0.03	26	+ 0.55	+ 0.26	+ 0.39
10	— 0.40	— 0.20	— 0.30	27	— 0.18	+ 0.01	— 0.19
11		+ 0.41		28	+ 0.11	+ 0.15	+ 0.12
12	— 0.12	+ 0.16	0.00	29	0.00	+ 0.10	+ 0.04
13	+ 0.41	+ 0.32	+ 0.36	30	— 0.19	— 0.21	— 0.26
14	— 0.18	— 0.10	— 0.16	31	— 0.14	+ 0.09	— 0.04
15	+ 0.12	— 0.47	— 0.19	32	+ 0.15	+ 0.26	+ 0.18
16	0.00	— 0.05	— 0.04	33	+ 0.17	— 0.18	— 0.03
17	— 0.01	+ 0.08	+ 0.02				

Die Uebereinstimmung der Rechnug mit den Beobachtungen ist durchweg als eine überaus befriedigende zu bezeichnen und es zeigt sich in den nachbleibenden Fehlern kein regelmässiger Gang, wie es die häufigen Zeichenwechsel beweisen. Eine Vergleichung mit

den von anderen Astronomen angestellten mikrometrischen Messungen der Declinationsdifferenzen zwischen Procyon und den Sternen *b* und *c* führte zu folgenden Resultaten:

P — b:

		Beob.	1867.0	O — C
Auwers...	1861.20	—85″.70	—85″.87	—0″.02
» ..	1862.23	86.58	86.74	+ 0.16
Adolph...	1863.12	87.82	87.91	—0.03
Auwers ..	1863.14	88.10	88.21	—0.31
» ..	1868.21	92.77	92.72	+0.20
» ..	1869.19	93.84	93.76	+0.07
» ..	1872.20	96.48	96.32	+0.32
» ..	1873.23	98.64	98.43	—0.90

P — c:

		Beob.	1867.0	O — C
Morton...	1857.19	—36″.23	—35″.97	—0″.20
Auwers...	1863.14	43.17	43.10	—0.87
» ..	1868.21	46.89	46.94	+0.36
» ..	1869.19	48.84	48.96	—0.74
» ..	1872.20	50.75	50.94	+0.12
» ..	1873.23	51.69	51.93	+0.02

Die Uebereinstimmung ist hier allerdings eine weniger befriedigende, doch kann dieselbe nicht den gefundenen Elementen zur Last gelegt werden, sondern muss, wie auch hier der häufige Zeichenwechsel zeigt, auf grössere zufällige Fehler der einzelnen Beobachtungen geschoben werden.

Nach dem Vorstehenden lässt sich also annehmen, dass die hier aus den Declinationsdifferenzen abgeleiteten Elemente der Procyon-Bahn nicht sehr weit von der Wahrheit entfernt sein können, und es ist zu erwarten, dass nach ungefähr zehn Jahren, wenn mein Vater inzwischen seine Beobachtungen regelmässig fortgesetzt haben wird, man noch viel sicherere Resultate wird erlangen können, indem dann auch die Umlaufszeit aus ihnen unabhängig wird bestimmt werden können. Eine Vergleichung der hier gefundenen Werthe für die Epoche und den Bahnhalbmesser mit den Elementen V von Auwers zeigt, dass die Epoche nach beiden Rechnungen innerhalb der Grenzen der wahrscheinlichen Fehler übereinstimmt; dagegen zeigt der Halbmesser der Bahn eine überraschend starke Abweichung, indem er gegen den Auwers'schen Werth nach meiner Rechnung fast um seinen dritten Theil verkleinert werden muss. Der gefundene Unterschied ist 7 Mal so gross, als der wahrscheinliche Fehler des Radius der Bahn, wie ihn Auwers aus den Declinationen allein

abgeleitet hat, und 8 Mal so gross, als der von mir für denselben gefundene wahrscheinliche Fehler. Nach der Theorie der Wahrscheinlichkeit dürfte ein solcher Unterschied nicht stattfinden, und ich halte es daher nicht für erlaubt, beide Werthe nach ihren berechneten wahrscheinlichen Fehlern zu vereinigen. Es muss vielmehr angenommen werden, dass eine der beiden Bestimmungen unter dem Einflusse constanter oder systematischer Beobachtungsfehler gelitten hat. Dass Differenzen von absoluten Bestimmungen der Declinationen an Meridianinstrumenten viel mehr derartigen Fehlern ausgesetzt sein können, wie unmittelbare mikrometrische Verbindungen, darf als in der Natur der beiden Bestimmungsmethoden begründet angesehen werden. Im vorliegenden Fall tritt zu Gunsten der mikrometrischen Bestimmungen noch der wichtige Umstand hinzu, dass sämmtliche Beobachtungen an ein und demselben Instrumente von ein und demselben Beobachter nach streng derselben Methode angestellt sind. Der von mir gefundene Werth des Halbmessers der Bahn in der Richtung des Declinationskreises würde sich immerhin mit allen von Auwers benutzten Beobachtungen vereinigen lassen, ohne dass dieselben Abweichungen zeigten, die sich nicht einfach aus der Unvollkommenheit der angewandten Beobachtungen erklären liessen. Umgekehrt dagegen lässt, wie vorstehend gezeigt worden, der Auwers'sche Werth des Halbmessers, auf die hiesigen Mikrometermessungen angewandt, Fehler zurück, die nicht den Beobachtungen allein zugeschrieben werden dürfen und in ihrem Gange einen deutlichen Beweis für die Ungenauigkeit des angewandten Halbmessers bieten.

Andererseits bieten die hiesigen Differentialbeobachtungen in Rectascension, wie oben gezeigt worden, bis jetzt keine Veranlassung, eine Verbesserung an den von Auwers aus den Rectascensionen abgeleiteten Werth des Bahnhalbmessers anzubringen. Wir werden daher zunächst zu der Annahme geführt, dass die scheinbare Bahn des Procyon um seinen Schwerpunkt eine Ellipse sei, deren halbe grosse Axe parallel zum Aequator $= 0\overset{''}{,}9793 \pm 0\overset{''}{,}0323$ und deren halbe kleine Axe in der Richtung des Declinationskreises $= 0\overset{''}{,}6980 \pm 0\overset{''}{,}0354$ ist. Indem unter dieser Annahme der Schwerpunkt des Systems mit dem Mittelpunkte der Ellipse zusammenfällt, würden wir noch zu der weiteren Annahme geführt, dass die wirkliche Bahn eine Kreisbahn ist, welche senkrecht steht zur Ebene des Declinationskreises und gegen unsere Gesichtslinie um $45° 28' \pm 3° 31'$ geneigt ist.

Ouvrages astronomiques et géodésiques publiés dans la VII. Série des Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences:

T. I, № 1. **Struve, O.** Nouvelle détermination de la parallaxe annuelle des étoiles α Lyrae et 61 Cygni. 1859. Pr. 45 K. = 1 Mk. 50 Pf.

№ 6. **Schubert, T. F.** Essai d'une détermination de la véritable figure de la terre. Avec 1 pl. 1859. Pr. 35 K. = 1 Mk. 20 Pf.

T. II, № 1. **Struve, O. u. Winnecke, Dr. A.** Pulkowaer Beobachtungen des grossen Cometen von 1858. Erste Abtheilung: Beobachtungen am Refractor, angestellt von O. Struve, Mitgliede der Akademie. Zweite Abtheilung: Beobachtungen am Heliometer nebst Untersuchungen über die Natur des Cometen von Dr. A. Winnecke, Adjunct-Astronomen der Hauptsternwarte. Mit 6 Taf. 1859. Pr. 1 R. 50 K. = 5 Mk.

№ 4. **Struve, O.** Beitrag zur Feststellung des Verhältnisses von Keppler zu Wallenstein. 1860. Pr. 30 K. = 1 Mk.

T. III, № 5. **Baeyer, J. J.** Ueber die Strahlenbrechung in der Atmosphäre. Avec 1 pl. lith. 1860. Pr. 65 K. = 2 Mk. 20 Pf.

T. IV, № 1. **Struve, O.** Beobachtung der totalen Sonnenfinsterniss vom 18. (6.) Juli 1860 in Pobes. Nach den Berichten der einzelnen Theilnehmer zusammengestellt. Mit 3 Taf. 1861. Pr. 85 K. = 2 Mk. 80 Pf.

T. V, № 4. **Struve, O.** Observations de la grande nébuleuse d'Orion, faites à Cazan et à Poulkova. I[e] Partie: Mémoire de M. Liapounov sur les observations de Cazan. II[e] Partie: O. Struve, Additions au mémoire de M. Liapounov et Observations de Poulkova. Avec 4 pl. lith. 1862. Pr. 1 R. 35 K. = 4 Mk. 50 Pf.

T. VI, № 7. **Winnecke, A.** Beobachtungen des Mars um die Zeit der Opposition 1862. 1863. Pr. 40 K. = 1 Mk. 30 Pf.

№ 11. **Sawitsch, A.** Opposition des Mars im Jahre 1862, beobachtet auf der kleinen akademischen Sternwarte zu St. Petersburg. 1863. Pr. 25 K. = 80 Pf.

T. VII, № 7. **Winnecke, A.** Pulkowaer Beobachtungen des hellen Cometen von 1862, nebst einigen Bemerkungen. Mit 6 lith. Taf. 1864. Pr. 90 K. = 3 Mk.

T VIII, № 2. **Linsser, C.** Vier von De l'Isle beobachtete Plejaden-Bedeckungen, bearbeitet und mit Hansen's Mond-Tafeln verglichen. 1864. Pr. 25 K. = 80 Pf.

T. X, № 1. **Gyldén, H.** Untersuchungen über die Constitution der Atmosphäre und die Strahlenbrechung in derselben. Erste Abhandlung. 1866. Pr. 70 K. = 2 Mk. 30 Pf.

T. XII, № 4. **Gyldén, H.** Untersuchungen über die Constitution der Atmosphäre und die Strahlenbrechung in derselben. Zweite Abhandlung. 1868. Pr. 45 K. = 1 Mk. 50 Pf.

№ 5. **Struve, O.** Beobachtungen des grossen Cometen von 1861. Mit 1 lith. Taf. 1868. Pr. 50 K. = 1 Mk. 70 Pf.

T. XVI, № 10. **Gyldén, H.** Studien auf dem Gebiete der Störungstheorie. I. Entwickelung einiger Verbindungen elliptischer Functionen. 1871. Pr. 1 R. 5 K. = 3 Mk. 50 Pf.

T. XVII, № 1. **Kortazzi, J.** Bestimmung der Längen-Differenz zwischen Pulkowa, Helsingfors, Åbo, Lowisa und Wiborg. 1871. Pr. 60 K. = 2 Mk.

№ 10. **Fuss, V. u. Nyrén, M.** Bestimmung der Längen-Differenz zwischen den Sternwarten Stockholm und Helsingfors, ausgeführt im Sommer 1870. 1871. Pr. 35 K. = 1 Mk. 20 Pf.

T. XVIII, № 3. **Fuss, V.** Beobachtungen und Untersuchungen über die astronomische Strahlenbrechung in der Nähe des Horizontes. 1872. Pr. 40 K. = 1 Mk. 30 Pf.

№ 5. **Asten, E. v.** Resultate aus Otto von Struve's Beobachtungen der Uranustrabanten. 1872. Pr. 25 K. = 80 Pf.

№ 10. **Asten, E. v.** Untersuchungen über die Theorie des Encke'schen Cometen. I. Berechnung eines wichtigen Theiles der absoluten Jupitersstörungen des Encke'schen Cometen. 1872. Pr. 65 K. = 2 Mk. 20 Pf.

T. XIX, № 2. **Nyrén, M.** Bestimmung der Nutation der Erdachse. 1872. Pr. 55 K. = 1 Mk. 80 Pf.

№ 10. **Nyrén, M.** Die Polhöhe von Pulkowa. 1873. Pr. 35 K. = 1 Mk. 20 Pf.

T. XXIII, № 3. **Nyrén, M.** Das Aequinoctium für 1865,0, abgeleitet aus den am Passageninstrumente und am Verticalkreise in den Jahren 1861 — 70 in Pulkowa angestellten Sonnenbeobachtungen. 1876. Pr. 30 K. = 1 Mk.

T. XXVI, № 2. **Asten, E. v.** Untersuchungen über die Theorie des Encke'schen Cometen. II. Resultate aus den Erscheinungen 1819—1875. 1878. Pr. 1 R. = 3 Mk. 30 Pf.

№ 4. **Hasselberg, Dr. B.** Studien auf dem Gebiete der Absorbtionsspectralanalyse. Avec 4 pl. 1878. Pr. 1 R. = 3 Mk. 30 Pf.

T. XXVII, № 1. **Hasselberg, Dr. B.** Ueber das durch electrische Erregung erzeugte Leuchten der Gaze bei niedriger Temperatur. 1879. Pr. 25 K. = 80 Pf.

№ 11. **Struve, O.** Études sur le mouvement relatif des deux étoiles du système de 61 Cygni. 1880. Pr. 35 K. = 1 Mk. 20 Pf.

T. XXVIII, № 6. **Backlund, O.** Zur Theorie des Encke'schen Cometen. 1881 Pr. 70 K. = 2 Mk. 30 Pf.

T. XXX, № 4. **Lindemann, Ed.** Zur Beurtheilung der Veränderlichkeit rother Sterne. 1882. Pr. 15 K. = 50 Pf.

№ 7. **Hasselberg, Dr. B.** Untersuchungen über das zweite Spectrum des Wasserstoffs. Avec 1 pl. 1882. Pr. 30 K. = 1 Mk.

№ 8. **Struve, Hermann.** Ueber den Einfluss der Diffraction an Fernröhren auf Lichtscheiben. 1882. Pr. 90 K. = 3 Mk.

T. XXXI, № 1. **Struve, Hermann.** Zur Theorie der Talbot'schen Linien. 1883. Pr. 15 K. = 50 Pf.

Imprimé par ordre de l'Académie Impériale des sciences. Mars, 1883. C. Vessélofski, Secrétaire perpétuel.

Imprimerie de l'Académie Impériale des sciences. (Vass.-Ostrow., 9 ligne, № 12.)

MÉMOIRES
DE
L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES DE ST.-PÉTERSBOURG, VIIE SERIE.
TOME XXXI, N° 3.

RECHERCHES

SUR LA

CONSTANTE G, ET SUR LES INTÉGRALES EULÉRIENNES

PAR

E. Catalan,
Membre-Correspondant de l'Académie.

7116

(*Lu le 7 décembre 1882.*)

ST.-PÉTERSBOURG, 1883.
Commissionnaires de l'Académie Impériale des sciences:

à St.-Pétersbourg: MM. Eggers et Cie et J. Glasounof;
à Riga: M. N. Kymmel;
à Leipzig: Voss' Sortiment (G. Haessel).

Prix: 45 Kop. = 1 Mk. 50 Pf.

MÉMOIRES
DE
L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES DE ST.-PÉTERSBOURG, VII[E] SERIE.
TOME XXXI, N° 3.

RECHERCHES

SUR LA

CONSTANTE G, ET SUR LES INTÉGRALES EULÉRIENNES

PAR

E. Catalan,
Membre-Correspondant de l'Académie.

(Lu le 7 décembre 1882.)

ST.-PÉTERSBOURG, 1883.
Commissionnaires de l'Académie Impériale des sciences:

à St.-Pétersbourg:	à Riga:	à Leipzig:
MM. Eggers et C[ie] et J. Glasounof;	M. N. Kymmel;	Voss' Sortiment (G. Haessel).

Prix: 45 Kop. = 1 Mk. 50 Pf.

Imprimé par ordre de l'Académie Impériale des sciences.

Mai 1883. C. Vessélofski, Secrétaire perpétue.l

Imprimerie de l'Académie Impériale des sciences.
(Vass.-Ostr., 9 ligne, № 12.)

Avant-Propos.

Dans le *Mémoire sur la transformation des séries,* la lettre G représente

$$1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \ldots;$$

savoir

$$G = 0,\ 915\ 965\ 594\ 177\ 21\ldots$$

Par une méthode autre que la mienne, M. Bresse a trouvé

$$G = 0,\ 915\ 965\ 594\ 177\ 219\ 054\ 603\ 57\ldots$$

(*Comptes rendus*, tome LXIV, p. 1139). Très probablement, les vingt-deux premières décimales sont exactes. Ainsi, la valeur numérique de la constante G est, pour le moins, aussi bien connue que celle de la *Constante C,* d'Euler.

De même qu'on l'a tenté pour C, j'ai essayé depuis longtemps, mais en vain, de ramener l'autre constante à une forme simple, par exemple à celle-ci:

$$G = a\,.\,\mathrm{L}2 + b\,.\,\pi,$$

a et b étant commensurables. Peut-être le problème est-il impossible. Quoiqu'il en soit, j'ai rencontré, chemin faisant, un certain nombre de formules, peut-être nouvelles, et qui, je l'espère du moins, pourront intéresser les Géomètres. En voici quelques-unes:

$$\frac{B\,(p,\,q+m)}{B\,(q,\,p+m)} = \prod_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{(q+\lambda)\,(p+m+\lambda)}{(p+\lambda)\,(q+m+\lambda)},$$

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right]^4 = 8\pi^2\cdot\frac{3}{1}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{7}{5}\cdot\frac{7}{9}\cdot\frac{11}{9}\cdot\frac{11}{13}\cdot\frac{15}{13}\cdots,$$

$$\frac{\Gamma\left(\frac{a}{2a+2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2a+1}{2a+1}\right)} = \sqrt{\pi}\,\frac{1+a}{a}\cdot\frac{1+2a}{2+2a}\cdot\frac{3+3a}{2+3a}\cdot\frac{3+4a}{4+4a}\cdots,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{q-1}\varphi d\varphi = \frac{\pi}{2}\prod_1^{\infty}\frac{(2n-1)(2n-1+q)}{2n(2n-2+q)},$$

$$G = \frac{\pi}{4}\,\mathrm{L}\,.\left[\frac{8}{\pi}\left(\frac{9}{8}\right)^3\left(\frac{24}{25}\right)^5\left(\frac{49}{48}\right)^7\left(\frac{80}{81}\right)^9\cdots\right],$$

etc.

Il y a bientôt un an, l'illustre Académie de Saint-Pétersbourg m'a fait l'honneur de me nommer Membre Correspondant: je la prie de vouloir bien agréer le petit Mémoire que je lui dédie aujourd'hui, en témoignage de ma reconnaissance.

Liège, 20 novembre 1882.

E. Catalan.

I.

Représentation de G, par des intégrales définies.

1. Il est visible que

$$G = \int_0^1 \frac{\text{arc tg}\, x}{x}\, dx. \tag{1}$$

L'intégration par parties, ou des transformations fort simples, donnent, au lieu de cette première expression :

$$G = -\int_0^1 \frac{\text{L}.x}{1+x^2}\, dx, \tag{2}$$

$$G = -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{L}.\,\text{tg}\,\frac{x}{2}\, dx, \tag{3}$$

$$G = \int_0^{\infty} \frac{x dx}{e^x + e^{-x}}, \tag{4}$$

$$G = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\sin x}\, dx, \tag{5}$$

$$G = \frac{\pi^2}{8}\int_0^1 \frac{\alpha d\alpha}{\sin\frac{\pi}{2}\alpha},\ ^{1)} \tag{6}$$

2. A ces premières formules, nous en ajouterons d'autres, qui résultent, immédiatement, des intégrales données dans le *Mémoire sur la transformation* .... (pp. 32, 33); savoir:

$$G = \int_0^\infty \frac{L.(1+x)}{1+x^2}dx - \frac{\pi}{8}L.2, \tag{7}$$

---

1) Dans le *Bulletin de Darboux* (1877, p. 375), le facteur α a été omis. De même, le *Messenger mathematic, de Glaisher*, (tome VII, p. 140), mentionne deux formules d'où il résulte

$$G = \frac{\pi^3 E_2}{16},\quad E_2 = 16\int_0^\infty \frac{x^2dx}{e^{\pi x}+e^{-\pi x}};$$

puis

$$G = \int_0^\infty \frac{x^2dx}{e^x+e^{-x}},$$

c'est-à-dire

$$G = \frac{\pi^3}{16},$$

résultat inadmissible.

Enfin, dans sa *Théorie nouvelle des Nombres de Bernoulli et d'Euler*, M. Édouard Lucas donne (p. 23) la relation suivante, qui serait bien remarquable si elle était exacte:

$$\frac{1}{1^{2n}} - \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{5^{2n}} - \dots = \frac{1}{2^{2n+2}}\frac{\pi^{2n+1}}{\Gamma(2n+1)}(-1)^n E_{2n}.$$

Malheureusement, il en résulte, à cause de $E_2 = -1$ (p. 19):

$$G = \frac{1}{16}\frac{\pi^3}{2} = \frac{\pi^3}{32} = 0,\ 968\ 946\dots,$$

au lieu de

$$G = 0,\ 915\dots$$

La formule qui doit remplacer la précédente est

$$\frac{1}{1^{2n+1}} - \frac{1}{3^{2n+1}} + \frac{1}{5^{2n+1}} - \dots = \frac{\pi^{2n+1}}{4^{n+1}}\frac{E_{2n}}{\Gamma(2n+1)}.$$

Dans celle-ci, E_{2n} est *positif:* $E_0 = 1$, $E_2 = 1$, $E_4 = 5, \dots$

$$G = \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x(1+x)}\, dx + \frac{\pi}{8} \mathrm{L}.2, \tag{8}$$

$$G = \frac{\pi}{4} \mathrm{L}.2 + 2\int_0^1 \frac{x \operatorname{arctg} x}{1+x^2}\, dx, \tag{9}$$

$$G = \frac{3\pi}{4} \mathrm{L}.2 - 2\int_0^1 \frac{x \operatorname{arc\,cot} x}{1+x^2}\, dx, \tag{10}$$

$$G = \frac{\pi}{2} \mathrm{L}.2 - \int_0^1 \frac{\mathrm{L}.(1+x^2)}{1+x^2}\, dx, \tag{11}$$

$$G = -\frac{\pi}{4} \mathrm{L}.2 + 2\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x(1+x^2)}\, dx, \tag{12}$$

$$G = -\frac{\pi}{4} \mathrm{L}.2 + 2\int_0^1 \frac{\frac{\pi}{4} - x \operatorname{arctg} x}{1-x^2}\, dx, \tag{13}$$

$$G = 2\int_0^1 \frac{\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} x}{1-x^2}\, dx, \tag{14}$$

$$G = \int_0^1 \frac{\mathrm{L}.\frac{1+x}{1-x}}{1+x^2}\, dx, \tag{15}$$

$$G = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{L}.\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) dx. \tag{16}$$

3. Si, dans la formule

$$G = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\theta}{\sin\theta}\, d\theta, \tag{5}$$

on fait $\sin\theta = x$, elle devient

$$G = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\arcsin x}{x} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}; \tag{17}$$

puis, au moyen de l'intégration par parties,

$$G = \frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{4}\int_0^1 \left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^2 dx. \tag{18}$$

4. La combinaison des formules (1), (8) donne encore:

$$G = \frac{\pi}{4} \text{L}.2 + \int_0^1 \frac{1-x}{1+x} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx. \tag{19}$$

5. On sait que:

$$\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2}\alpha} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{e^{(1-\alpha)x} + e^{-(1-\alpha)x}}{e^x + e^{-x}} dx; \text{ [1]} \tag{20}$$

donc l'expression (6) devient

$$G = \frac{\pi}{4}\int_0^\infty \frac{dx}{e^x + e^{-x}} \int_0^1 \left[e^{(1-\alpha)x} + e^{-(1-\alpha)x}\right] \alpha d\alpha. \tag{21}$$

D'ailleurs:

$$\int e^{(1-\alpha)x} \alpha d\alpha = e^x \int e^{-\alpha x} \alpha d\alpha = e^x \left[-\frac{\alpha}{x} e^{-\alpha x} + \frac{1}{x}\int e^{-\alpha x} d\alpha\right]$$

$$= e^x \left[-\frac{\alpha}{x} e^{-\alpha x} - \frac{1}{x^2} e^{-\alpha x} + c\right];$$

$$\int_0^1 e^{(1-\alpha)x} \alpha d\alpha = -\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{e^x}{x^2};$$

$$\int_0^1 e^{-(1-\alpha)x} \alpha d\alpha = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{e^{-x}}{x^2}.$$

---

1) Poisson, *Journal de l'École polytechnique*, 18e Cahier, p. 298.

On a ainsi

$$\int_0^1 [e^{(1-\alpha)x} + e^{-(1-\alpha)x}]\,\alpha d\alpha = \frac{e^x - 2 + e^{-x}}{x^2}; \tag{22}$$

puis, au lieu de la formule (21),

$$G = \frac{\pi}{4}\int_0^\infty \frac{\left(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}\right)^2}{x^2(e^x + e^{-x})}\,dx. \tag{23}$$

6. *Remarque.* Si l'on intègre par parties, on transforme cette égalité en celle-ci:

$$G = \frac{\pi}{2}\int_0^\infty \frac{e^x - e^{-x}}{(e^x + e^{-x})^2}\frac{dx}{x}. \text{ [1]} \tag{24}$$

7. *Suite.* Soit

$$e^x = \cot\tfrac{1}{2}\theta;$$

et, par conséquent:

$$e^x - e^{-x} = \frac{\cos\frac{1}{2}\theta}{\sin\frac{1}{2}\theta} - \frac{\sin\frac{1}{2}\theta}{\cos\frac{1}{2}\theta} = 2\cot\theta,\quad e^x + e^{-x} = \frac{2}{\sin\theta},$$

$$x = \mathrm{L}.\cot\tfrac{1}{2}\theta,\quad dx = -\frac{1}{2}\frac{d\theta}{\sin^2\frac{1}{2}\theta\,.\,\cot\frac{1}{2}\theta} = -\frac{d\theta}{\sin\theta};$$

puis, après un changement de lettre:

$$G = \frac{\pi}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\,dx}{\mathrm{L}.\cot\frac{1}{2}x}. \tag{25}$$

8. Nous avons donné (21) une valeur de G, sous forme d'intégrale double. En voici une autre.

Reprenons la formule

$$G = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\sin x}\,dx. \tag{5}$$

---

1) *Mélanges mathématiques*, pp. 230, 231.

Or,

$$\frac{x}{\sin x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dy}{1 + \cos x \cos y} \text{ [1]};$$

donc

$$G = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx\,dy}{1 + \cos x \cos y}. \tag{26}$$

II.

Intégrales culériennes.

9. On doit, à M. Kummer, l'importante relation:

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-qx} - e^{-px}}{1 + e^{-x}} \frac{dx}{x} = \mathrm{L} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{q}{2}\right) \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right) \Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)}. \text{ [2]} \tag{27}$$

Voici comment on peut la démontrer.
Pour toutes les valeurs positives de a et de b:

$$\int_0^{\infty} (e^{-bx} - e^{-ax}) \frac{dx}{x} = \mathrm{L} \cdot \frac{a}{b} \text{ [3]} \tag{28}$$

Soit A l'intégrale (27). Il est visible que

$$A = \sum_0^{\infty} (-1)^n \int_0^{\infty} (e^{-qx} - e^{-px}) e^{-nx} \frac{dx}{x};$$

ou, par l'application de la formule (28),

$$A = \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n \mathrm{L} \cdot \frac{p+n}{q+n};$$

---

1) *Cours d'Analyse de l'Université de Liège*, p. 595.
2) *Journal de Crelle*, tome XVII, p. 224.
3) Cette égalité, dont la vérification est facile, se trouve déjà dans le *Cours d'Analyse*, de Cauchy.

ou encore

$$A = \mathrm{L}\left[\frac{\frac{p}{q}\cdot\frac{p+2}{q+2}\cdot\frac{p+4}{q+4}\cdots\cdots}{\frac{p+1}{q+1}\cdot\frac{p+3}{q+3}\cdot\frac{p+5}{q+5}\cdots\cdots}\right]; \qquad (29)$$

pourvu que chacun des produits soit convergent.

Dans le numérateur, le produit des λ premiers facteurs est

$$P_\lambda = \frac{\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2}+1\right)\left(\frac{p}{2}+2\right)\cdots\left(\frac{p}{2}+\lambda-1\right)}{\frac{q}{2}\left(\frac{q}{2}+1\right)\left(\frac{q}{2}+2\right)\cdots\left(\frac{q}{2}+\lambda-1\right)} = \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}+\lambda\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)} : \frac{\Gamma\left(\frac{q}{2}+\lambda\right)}{\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)},$$

ou

$$P_\lambda = \frac{\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}\,\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}+\lambda\right)}{\Gamma\left(\frac{q}{2}+\lambda\right)}.$$

De même, dans le dénominateur, le produit des λ premiers facteurs est

$$Q_\lambda = \frac{\Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}\,\frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}+\lambda\right)}{\Gamma\left(\frac{q+1}{2}+\lambda\right)}.$$

Conséquemment

$$\frac{P_\lambda}{Q_\lambda} = \frac{\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}+\lambda\right)\Gamma\left(\frac{q+1}{2}+\lambda\right)}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}+\lambda\right)\Gamma\left(\frac{q}{2}+\lambda\right)}. \qquad (30)$$

Pour trouver la limite de la quantité

$$\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}+\lambda\right)\Gamma\left(\frac{q+1}{2}+\lambda\right)}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}+\lambda\right)\Gamma\left(\frac{q}{2}+\lambda\right)},$$

nous ferons usage du beau théorème de Gauss, exprimé par l'équation

$$\frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\,\Gamma(\gamma-\beta)} = 1 + \frac{\beta}{1}\,\frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta(\beta+1)}{1.2}\,\frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)} + \ldots \qquad (31)$$

Si l'argument γ, supérieur à $\beta+\alpha$, croît indéfiniment, il est clair que

$$lim\cdot\frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\,\Gamma(\gamma-\beta)} = 1. \qquad (32)$$

Dans le cas actuel, pour appliquer cette proposition, il suffit de prendre:

$$\alpha = -\frac{1}{2},\quad \beta = \frac{p-q}{2},\quad \gamma = \frac{p}{2}+\lambda.$$

La limite cherchée est 1. On a donc

$$lim \cdot \frac{P_\lambda}{Q_\lambda} = \frac{\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)};$$ [1])

et, par conséquent,

$$\int_0^\infty \frac{e^{-qx} - e^{-px}}{1 + e^{-x}} \frac{dx}{x} = \mathrm{L} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)}. \tag{27}$$

10. *Remarques.* I. La formule (32) équivant à

$$lim \cdot \frac{B(\gamma, \gamma - \alpha - \beta)}{B(\gamma - \alpha, \gamma - \beta)} = 1. \tag{33}$$

II. Si, dans l'équation (31), on suppose

$$\alpha = -\frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{p-q}{2}, \quad \gamma = \frac{p}{2},$$

on trouve

$$\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)} = 1 - \frac{1}{2}\frac{p-q}{p} - \frac{1}{2.4}\frac{(p-q)(p-q+2)}{p(p+2)} - \ldots;$$

développement connu.

Dans cette égalité, changeons p en q, q en p: le premier membre est remplacé par son inverse; donc

$$1 = \left[1 - \frac{1}{2}\frac{p-q}{p} - \frac{1}{2.4}\frac{(p-q)(p-q+2)}{p(p+2)} - \ldots\right]\left[1 + \frac{1}{2}\frac{p-q}{q} - \frac{1}{2.4}\frac{(p-q)(p-q-2)}{q(q+2)} - \ldots\right].$$

Cette relation est également connue. [2])

II. En modifiant la démonstration précédente, on peut généraliser la formule de M. Kummer.

On a

$$\mathrm{L} \,.\, \Gamma(p) = \varphi(p) = \int_0^\infty \left[p - 1 - \frac{1 - e^{-(p-1)x}}{1 - e^{-x}}\right] \frac{dx}{x} e^{-x}.$$ [3]) (34)

1) Cette démonstration me paraît beaucoup plus satisfaisante que celle qu'emploie Binet (*Intégrales eulériennes*, p. 156). Elle est préférable, d'ailleurs, à celle dont j'ai fait usage dans le *Mémoire sur la constante d'Euler et la fonction de Binet* (p. 235).

2) *Mélanges mathématiques*, p. 161. Voir aussi la Note intitulée: *Sur quelques formules relatives aux intégrales eulériennes;* etc.

3) Voir, par exemple, le *Calcul intégral* de M. Bertrand, p. 264. Plus loin, nous reviendrons sur la fonction φ.

Par conséquent,

$$\mathrm{L}\cdot\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}=\int_0^\infty\left[-1-\frac{1-e^{-(p-1)x}-e^{-(q-1)x}+e^{-(p+q-1)x}}{1-e^{-x}}\right]\frac{dx}{x}e^{-x}.$$

Le premier membre égale $\mathrm{L}\,.\,B(p,q)$. Dans le second membre, la quantité entre perenthèses est réductible à

$$\frac{-2+e^{-x}+e^{-(p-1)x}+e^{-(q-1)x}-e^{-(p+q-1)x}}{1-e^{-x}};$$

donc l'intégrale devient

$$\int_0^\infty\frac{-2e^{-x}+e^{-2x}+e^{-px}+e^{-qx}-e^{-(p+q)x}}{1-e^{-x}}\frac{dx}{x};$$

ou, plus simplement :

$$\int_0^\infty\frac{(1-e^{-x})^2-(1-e^{-px})(1-e^{-qx})}{1-e^{-x}}\frac{dx}{x}.$$

Nous arrivons ainsi à cette formule :

$$\mathrm{L}\,.\,B(p,q)=\int_0^\infty\frac{(1-e^{-x})^2-(1-e^{-px})(1-e^{-qx})}{1-e^{-x}}\frac{dx}{x},\qquad(35)$$

que nous croyons nouvelle et remarquable.

12. On en conclut d'abord la généralisation annoncée :

$$\mathrm{L}\cdot\frac{B(p,q)}{B(p',q')}=\int_0^\infty\frac{(1-e^{-p'x})(1-e^{-q'x})-(1-e^{-px})(1-e^{-qx})}{1-e^{-x}}\frac{dx}{x}.\qquad(36)$$

Mais, pour obtenir un résultat plus intéressant, changeons

$$q,\quad p',\quad q'$$

respectivement, en

$$q+m,\quad p+m,\quad q.$$

Le premier membre devient

$$\mathrm{L}\cdot\frac{B(p,q+m)}{B(q,p+m)}.$$

Dans le second membre, le numérateur se réduit à

$$-e^{-(p+m)x} - e^{-qx} + e^{-px} + e^{-(q+m)x} = (e^{-px} - e^{-qx})(1 - e^{-mx}).$$

Donc

$$\mathrm{L}\ \frac{B(p,\,q+m)}{B(q,\,p+m)} = \int_0^\infty \frac{(e^{-px} - e^{-qx})(1 - e^{-mx})}{1 - e^{-x}} \frac{dx}{x}. \tag{37}$$

13. *Remarques.* I. Si, dans la relation (36), on suppose $q = p' = m$, $q' = q$, le numérateur de la seconde fraction se réduit encore à

$$(e^{-px} - e^{-qx})(1 - e^{-mx}).$$

Par conséquent, on retombe sur le théorème d'Euler, exprimé par l'égalité

$$\frac{B(p,\,q+m)}{B(q,\,p+m)} = \frac{B(p,\,m)}{B(q,\,m)}. \tag{38}$$

II. Dans la même relation (36), changeons

$$p,\quad q,\quad p',\quad q'$$

en

$$\frac{q}{2},\quad \frac{p+1}{2},\quad \frac{p}{2},\quad \frac{q+1}{2}:$$

le numérateur égale

$$e^{-\frac{q}{2}x} + e^{-\frac{p+1}{2}x} - e^{-\frac{p}{2}x} - e^{-\frac{q+1}{2}x} = \left(e^{-\frac{q}{2}x} - e^{-\frac{p}{2}x}\right)\left(1 - e^{-\frac{x}{2}}\right).$$

Donc

$$\mathrm{L}\cdot\frac{B\left(\frac{q}{2},\,\frac{p+1}{2}\right)}{B\left(\frac{p}{2},\,\frac{q+1}{2}\right)} = \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{q}{2}x} - e^{-\frac{p}{2}x}}{1 + e^{-\frac{x}{2}}} \frac{dx}{x};$$

ou, par le changement de x en $2x$:

$$\mathrm{L}\cdot\frac{B\left(\frac{q}{2},\,\frac{p+1}{2}\right)}{B\left(\frac{p}{2},\,\frac{q+1}{2}\right)} = \int_0^\infty \frac{e^{-qx} - e^{-px}}{1 + e^{-x}} \frac{dx}{x};$$

ce qui est la formule de Kummer.

III. Enfin, si l'on prend

$$p = \gamma,\quad q = \gamma - \alpha - \beta,\quad p' = \gamma - \alpha,\quad q' = \gamma - \beta,$$

la formule (36) se change en

$$\mathrm{L}\cdot\frac{B(\gamma,\gamma-\alpha-\beta)}{B(\gamma-\alpha,\gamma-\beta)}=\int_0^\infty\frac{(e^{\alpha x}-1)(e^{\beta x}-1)}{1-e^{-x}}e^{-\gamma x}\frac{dx}{x}.\quad(\gamma>\alpha+\beta)\tag{39}$$

Ainsi :

1°. *Le premier membre de l'équation de Gauss* (31) *est transformé en intégrale définie;*

2°.

$$\int_0^\infty\frac{(e^{\alpha x}-1)(e^{\beta x}-1)}{1-e^{-x}}e^{-\gamma x}\frac{dx}{x}=1+\frac{\beta}{1}\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\beta(\beta+1)}{1.2}\frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)}+\ldots\tag{40}$$

14. L'intégrale (37) est, très facilement, développable en une série dont *tous les termes sont des logarithmes;* et, en conséquence, la quantité

$$\frac{B(p,q+m)}{B(q,p+m)}$$

peut être remplacée par un produit indéfini.

On a, en effet,

$$\frac{(e^{-px}-e^{-qx})(1-e^{-mx})}{1-e^{-x}}=\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty}(e^{-px}-e^{-qx})(1-e^{-mx})e^{-\lambda x}$$

$$=\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty}\left[e^{-(p+\lambda)x}-e^{-(q+\lambda)x}-e^{-(p+m+\lambda)x}+e^{-(q+m+\lambda)x}\right].$$

Donc

$$\int_0^\infty\frac{(e^{-px}-e^{-qx})(1-e^{-mx})}{1-e^{-x}}\frac{dx}{x}=$$

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty}\left\{\int_0^\infty\left[e^{-(p+\lambda)x}-e^{-(q+\lambda)x}\right]\frac{dx}{x}-\int_0^\infty\left[e^{-(p+m+\lambda)x}-e^{-(q+m+\lambda)x}\right]\frac{dx}{x}\right\}.$$

D'après la formule (28), ces deux intégrales ont pour valeur, respectivement,

$$\mathrm{L}\cdot\frac{q+\lambda}{p+\lambda},\quad\mathrm{L}\cdot\frac{q+m+\lambda}{p+m+\lambda};$$

donc leur différence égale

$$\mathrm{L}\cdot\frac{(q+\lambda)(p+m+\lambda)}{(p+\lambda)(q+m+\lambda)}.$$

Par suite, l'égalité (37) devient

$$\mathrm{L}\cdot\frac{B(p,q+m)}{B(q,p+m)}=\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty}\mathrm{L}\cdot\frac{(q+\lambda)(p+m+\lambda)}{(p+\lambda)(q+m+\lambda)},\tag{41}$$

ou

$$\frac{B(p, q+m)}{B(q, p+m)} = \prod_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{(q+\lambda)(p+m+\lambda)}{(p+\lambda)(q+m+\lambda)}. \text{ }^{1)} \tag{42}$$

15. Les conséquences de cette nouvelle formule sont fort nombreuses. Elle donne d'abord

$$\frac{B(\gamma, \gamma-\alpha-\beta)}{B(\gamma-\alpha, \gamma-\beta)} = \prod_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{(\gamma-\alpha+\lambda)(\gamma-\beta+\lambda)}{(\gamma+\lambda)(\gamma-\alpha-\beta+\lambda)}. \tag{43}$$

Ainsi, *la série de Gauss est développée en produit indéfini.*

En second lieu, si p, q, m sont des *nombres entiers*, la relation (42) permet de *développer, en produit indéfini, une quantité rationnelle.* [2)]

Soient, par exemple:

$$p=2, \quad q=1, \quad m=3.$$

On a

$$\frac{\Gamma(p)\Gamma(q+m)}{\Gamma(q)\Gamma(p+m)} = \frac{1.2.3}{1.2.3.4} = \frac{1}{4}.$$

---

1) Le raisonnement employé ci-dessus (9) montre que le produit est convergent. Voici d'ailleurs une seconde démonstration, plus simple que la précédente.

On sait que

$$\mathrm{L}.\Gamma(p) = \sum_{k=1}^{k=\infty}\left[(p-1)\mathrm{L}.\left(1+\frac{1}{k}\right) - \mathrm{L}.\frac{k+p-1}{k}\right].$$

Il résulte immédiatement, de cette relation,

$$\mathrm{L}.\frac{\Gamma(p)\Gamma(q+m)}{\Gamma(q)\Gamma(p+m)} =$$

$$\sum_{k=1}^{k=\infty}\left[-\mathrm{L}.\frac{k+p-1}{k} - \mathrm{L}.\frac{k+q+m-1}{k} + \mathrm{L}.\frac{k+q-1}{k} + \mathrm{L}.\frac{k+p+m-1}{k}\right]$$

$$= \sum_{1}^{\infty}\mathrm{L}.\frac{(k+q-1)(k+p+m-1)}{(k+p-1)(k+q+m-1)},$$

ou, par le changement de k en $\lambda+1$:

$$\frac{\Gamma(p)\Gamma(q+m)}{\Gamma(q)\Gamma(p+m)} = \prod_{\lambda=0}^{\lambda=\infty}\frac{(q+\lambda)(p+m+\lambda)}{(p+\lambda)(q+m+\lambda)},$$

etc.

2) Cette quantité est le rapport entre les deux *nombres combinatoires:*

$$C_{m+p+q-2,\ p-1}, \qquad C_{m+p+q-2,\ q-1}.$$

Donc

$$\frac{1}{4} = \frac{1.5}{2.4} \cdot \frac{2.6}{3.5} \cdot \frac{3.7}{4.6} \cdot \frac{4.8}{5.7} \cdots,$$

ou

$$\frac{1}{4} = \frac{5}{8} \cdot \frac{12}{15} \cdot \frac{21}{24} \cdot \frac{32}{35} \cdot \frac{45}{48} \cdots.$$

De même, en prenant

$$p = 5, \quad q = 3, \quad m = 2,$$

on trouve

$$\frac{2}{5} = \frac{21}{25} \cdot \frac{32}{36} \cdot \frac{45}{49} \cdot \frac{60}{64} \cdot \frac{77}{81} \cdots.$$

16. *Suite.* Dans diverses publications[1]), j'ai indiqué des moyens d'obtenir une infinité de développements, en séries, de π et de $\frac{1}{\pi}$. La formule (42) remplace ces séries par des produits indéfinis.

Soient, par exemple, $p = \frac{3}{2}$, $q = 1$, $m = \frac{1}{2}$. Le premier membre devient $\left[\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\right]^2 = \frac{\pi}{4}$. En conséquence,

$$\frac{\pi}{4} = \frac{2.4}{3.3} \cdot \frac{4.6}{5.5} \cdot \frac{6.8}{7.7} \cdot \frac{8.10}{9.9} \cdots,$$

ou

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots;$$

formule de Wallis.

Si l'on prend $p = m = \frac{1}{2}$, $q = 2$, on trouve

$$\frac{3\pi}{4} = \frac{4}{1} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{6}{3} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{8}{5} \cdot \frac{6}{9} \cdot \frac{10}{7} \cdot \frac{8}{11} \cdots.$$

Soient, enfin:

$$p = \frac{1}{4}, \quad q = \frac{3}{4}, \quad m = \frac{1}{2}.$$

Le premier membre de l'égalité (42) devient

$$\frac{1}{4}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}\right]^2.$$

Le second membre égale $\frac{3}{1} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{5} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{11}{9} \cdot \frac{11}{13} \cdot \frac{15}{13} \cdot \frac{15}{17} \cdots$ Donc

$$\left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}\right]^2 = 4 \cdot \frac{3}{1} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{5} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{11}{9} \cdot \frac{11}{13} \cdot \frac{15}{13} \cdot \frac{15}{17} \cdots \tag{44}$$

---

1) *Comptes rendus*, tome XLVII; *Mélanges mathématiques*, p. 150; etc.

17. *Remarque.* En vertu d'un théorème d'Euler:

$$\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = \pi\sqrt{2}.$$

Par conséquent, la dernière égalité peut être écrite ainsi:

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right]^4 = 8\pi^2 \cdot \frac{3}{1} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{5} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{11}{9} \cdot \frac{11}{13} \cdot \frac{15}{13} \cdot \frac{15}{17} \cdots \qquad (45)$$ [1]

III.

Remarques sur la fonction de Binet. [2]

18. Si l'on pose

$$L.\Gamma(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)L.x - x + \frac{1}{2}L.(2\pi) + \varpi(x), \qquad (46)$$

on a, comme l'on sait, soit

$$\varpi(x) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{e^\alpha - 1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha}\right)\frac{e^{-\alpha x}}{\alpha}\,d\alpha, \qquad (47)$$

soit

$$\varpi(x) = 2\int_0^\infty \frac{d\beta}{e^{2\pi\beta} - 1}\,\mathrm{arctg}\,\frac{\beta}{x}: \qquad (48)$$ [3]

$\varpi(x)$ est la fonction de Binet.

Dans son célèbre Mémoire, Binet forme, très-péniblement, l'équation

$$2L.\Gamma(2x) = (-1 + 4x)\,L(2x) + L(2\pi) - 4x + 2\varpi(2x); \qquad (49)$$ [4]

d'où il aurait pu conclure

$$\varpi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}L.2. \qquad (50)$$

---

1) Nous reviendrons, plus loin, sur la formule (44).

2) Elles ne font pas double emploi avec le Mémoire sur le même sujet.

3) Il est visible que cette seconde expression peut être remplacée par

$$\varpi(x) = 2x\int_0^\infty \frac{dt}{e^{2\pi t x} - 1}\,\mathrm{arctg}\,t.$$

(*Mémoire sur les intégrales définies eulériennes*, pp. 240 et 241.)

4) P. 243 et suivantes. A la caractéristique μ, employée par le savant Géomètre, nous avons substitué ϖ.

M. Bertrand, par un procédé tout autre, a déterminé cette valeur; mais sa méthode est un peu longue.[1]) Voici celle que j'expose dans mon cours.

Soit, comme précédemment (**11**),

$$\varphi(x) = \mathrm{L}.\Gamma(x). \tag{51}$$

On a, par une formule connue, dont la vérification est facile:

$$\varphi'(x+1) = \mathrm{L}.x + \frac{1}{2x} + \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{e^{\alpha}-1} - \frac{1}{2}\right) e^{-\alpha x}\, dx; \tag{52}$$

et, en conséquence,

$$\varphi(x+1) = k + x\mathrm{L}.x - x + \frac{1}{2}\mathrm{L}.x + \varpi(x);$$

ou, plus simplement,

$$\varphi(x) = k + \left(x - \frac{1}{2}\right)\mathrm{L}.x - x + \varpi(x): \tag{53}$$

k est la constante d'intégration, qu'il s'agit de déterminer.

La formule de Legendre:

$$\frac{\Gamma(2x)}{\Gamma(x)} = \frac{2^{2x-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

équivaut à

$$\varphi(2x) - \varphi(x) - \varphi\left(x+\frac{1}{2}\right) = (2x-1)\mathrm{L}.2 - \frac{1}{2}\mathrm{L}.\pi. \tag{54}$$

Or:

$$\varphi\left(x+\frac{1}{2}\right) = k + x\mathrm{L}.\left(x+\frac{1}{2}\right) - x - \frac{1}{2} + \varpi\left(x+\frac{1}{2}\right),$$

$$\varphi(2x) = k + \left(2x - \frac{1}{2}\right)\mathrm{L}.(2x) - 2x + \varpi(2x);$$

donc le premier membre de l'égalité (54) a pour valeur:

$$-k + \left(2x - \frac{1}{2}\right)\mathrm{L}.2 + x\mathrm{L}\cdot\frac{x}{x+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} + \varpi(2x) - \varpi(x) - \varpi\left(x+\frac{1}{2}\right).$$

Après quelques réductions, cette égalité se transforme en

$$-k - x\mathrm{L}.\left(1+\frac{1}{2x}\right) + \frac{1}{2} + \varpi(2x) - \varpi(x) - \varpi\left(x+\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}\mathrm{L}.(2\pi).$$

Si l'on fait croître x indéfiniment, le premier membre tend vers $(-k)$.[2])

---

1) *Calcul intégral*, pp. 265, 266.

2) A cause de

$$x\mathrm{L}.\left(1+\frac{1}{2x}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{8x} + \ldots$$

Ainsi
$$k = \frac{1}{2} \mathrm{L}.(2\pi);$$

et enfin, au lieu des égalités (49) et (53):

$$\mathrm{L}.\Gamma(x) = \varphi(x) = \frac{1}{2}\mathrm{L}.(2\pi) + \left(x - \frac{1}{2}\right)\mathrm{L}.x - x + \varpi(x). \quad (55)$$

19. *Remarques I.* Quand $x = 1$, cette équation se réduit à

$$0 = \frac{1}{2}\mathrm{L}.(2\pi) - 1 + \varpi(1).$$

Donc

$$\varpi(1) = 1 - \frac{1}{2}\mathrm{L}.(2\pi). \quad (56)$$

II. D'après les formules (47) et (48):

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{e^\alpha - 1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha}\right)\frac{e^{-\frac{1}{2}\alpha}}{\alpha}\,d\alpha = \int_0^\infty \frac{dt}{e^{\pi t}-1}\,\mathrm{arctg}\,t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{L}.2, \quad (57)$$

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{e^\alpha - 1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha}\right)\frac{e^{-\alpha}}{\alpha}\,d\alpha = 2\int_0^\infty \frac{dt}{e^{2\pi t}-1}\,\mathrm{arctg}\,t = 1 - \frac{1}{2}\mathrm{L}.(2\pi). \quad (58)$$

III. Il résulte, des deux dernières valeurs,

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{arctg}\,t}{e^{\pi t} - e^{-\pi t}}\,dt = \frac{1}{4}\mathrm{L}.\left(\frac{\pi}{2}\right). \quad (59)$$ [1]

IV. Au moyen de la formule (55), l'égalité (54) se transforme en

$$\varpi(2x) - \varpi(x) - \varpi\left(x + \frac{1}{2}\right) = x\mathrm{L}.\left(1 + \frac{1}{2x}\right) - \frac{1}{2}. \quad (60)$$ [2]

1) Dans les *Tables* de M. Bierens de Haan, je ne trouve pas cette intégrale.

2) A la p. 224 du Mémoire de Binet, on lit:

$$«2\mu\left(p + \frac{1}{2}\right) + 2\mu(p) - 2\mu(2p) = \frac{1}{2(2p+1)} + \frac{1}{2.3(2p+1)^2} + \frac{1}{3.4(2p+1)^3} + \text{etc.}»$$

Avec notre notation, cette égalité devient

$$\varpi(2x) - \varpi(x) - \varpi\left(x + \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2(2x+1)} + \frac{1}{2.3(2x+1)^2} + \frac{1}{3.4(2x+1)^3} + \ldots\right].$$

La somme de la série est

$$1 + 2x\mathrm{L}.\left(1 - \frac{1}{2x+1}\right),$$

ou

$$1 - 2x\mathrm{L}.\left(1 + \frac{1}{2x}\right).$$

Ainsi, la formule (60) ne diffère pas, au fond, de celle de Binet.

Cette relation, assez remarquable, à une grande analogie avec celle-ci:

$$2C_{2x} - C_x - C_{x+\frac{1}{2}} = -2\mathrm{L}.2.\ ^{1)} \qquad (61)$$

Pour passer de la première à la seconde, il suffit de se rappeler que

$$C_x = \frac{1}{2x} - \mathrm{L}.x - \varpi'(x).\ ^{2)}$$

En effet, l'égalité (61) se réduit à

$$-\frac{1}{2x+1} + \mathrm{L}.\frac{2x+1}{2x} = 2\varpi'(2x) - \varpi'(x) - \varpi'\left(x+\frac{1}{2}\right);$$

et, en vertu de la relation (60), le second membre égale

$$\mathrm{L}.\frac{2x+1}{2x} - \frac{1}{2x+1}.$$

20. Si, dans la formule (55), on change x en $x+1$, et que l'on retranche, on obtient

$$\mathrm{L}.x = \left(x+\frac{1}{2}\right)\mathrm{L}.(x+1) - \left(x-\frac{1}{2}\right)\mathrm{L}.x - 1 + \varpi(x+1) - \varpi(x),$$

ou

$$\varpi(x) - \varpi(x+1) = \left(x+\frac{1}{2}\right)\mathrm{L}.\frac{x+1}{x} - 1; \qquad (62)$$

relation connue.

21. Si, dans la même formule (55), on change x en $2x$, on trouve, par une combinaison aussi simple que la précédente,

$$\mathrm{L}\,\Gamma(x) - \frac{1}{2}\mathrm{L}.\Gamma(2x) = \frac{1}{4}\mathrm{L}.(2\pi) - \frac{1}{4}\mathrm{L}.(x) - \left(x-\frac{1}{4}\right)\mathrm{L}.2 + \varpi(x) - \frac{1}{2}\varpi(2x).$$

D'après le théorème de Legendre, la valeur du premier membre est

$$\frac{1}{2}\mathrm{L}.\Gamma(x) - \frac{1}{2}\mathrm{L}.\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right) - \left(x-\frac{1}{2}\right)\mathrm{L}.2 + \frac{1}{4}\mathrm{L}.\pi.$$

Par suite,

$$\varpi(x) - \frac{1}{2}\varpi(2x) = \frac{1}{2}\mathrm{L}.\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(x)}{\Gamma(x+\frac{1}{2})}. \qquad (63)$$

En particulier,

$$\varpi\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\varpi(1) = \frac{1}{4}\mathrm{L}.\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Ce résultat donne une vérification de la formule (59).

---

1) *Sur la Constante d'Euler*, ... p. 221.

2) *Loc. cit.* p. 223.

22. Nous avons trouvé

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{e^\alpha - 1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha}\right) \frac{e^{-\frac{1}{2}\alpha}}{\alpha} d\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \text{ L.}(2); \tag{57}$$

ou, ce qui est équivalent,

$$\int_0^\infty \left(\frac{2}{e^{2\alpha} - 1} + 1 - \frac{1}{\alpha}\right) \frac{e^{-\alpha}}{\alpha} d\alpha = 1 - \text{L}.2. \text{ (}^1\text{)}$$

Mais (28):

$$\text{L}.2 = \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha} - e^{-2\alpha}}{\alpha} d\alpha = \int_0^\infty (1 - e^{-\alpha}) \frac{e^{-\alpha}}{\alpha} d\alpha.$$

Donc

$$\int_0^\infty \left[\frac{2}{e^{2\alpha} - 1} + 2 - e^{-\alpha} - \frac{1}{\alpha}\right] \frac{e^{-\alpha}}{\alpha} d\alpha = 1,$$

ou

$$\int_0^\infty \left[\frac{2e^{2\alpha}}{e^{2\alpha} - 1} - e^{-\alpha} - \frac{1}{\alpha}\right] \frac{e^{-\alpha}}{\alpha} d\alpha = 1. \tag{64}$$

Pour simplifier le premier membre, on peut employer la relation

$$\int_0^\infty \left[\frac{2e^{2\alpha}}{e^{2\alpha} - 1} - \frac{2 - e^{-\alpha}}{\alpha} - 1 + e^{-\alpha}\right] \frac{e^{-\alpha}}{\alpha} d\alpha = 0. \text{ }^2\text{)}$$

La soustraction donne

$$\int_0^\infty \left[\frac{1 - e^{-\alpha}}{\alpha} + 1 - 2e^{-\alpha}\right] \frac{e^{-\alpha}}{\alpha} d\alpha = 1. \tag{65}$$

---

1) Par le changement de α en 2α.

2) Bierens de Haan, T. 94 (seconde édition). La première renferme une faute de signe indiquée, du reste, dans *l'errata*.

IV.

Sur la fonction $\varphi(x)$.

23. La formule

$$L.\Gamma(x) = \varphi(x) = \int_0^\infty \left[x - 1 - \frac{1 - e^{-(x-1)\alpha}}{1 - e^{-\alpha}}\right] \frac{e^{-\alpha}}{\alpha}\, d\alpha \tag{34}$$

résulte, par intégration, de celle-ci:

$$\varphi'(x) = \int_0^\infty \left[\frac{e^{-\alpha}}{\alpha} - \frac{e^{-\alpha x}}{1 - e^{-\alpha}}\right] d\alpha, \tag{66}$$

conséquence, presque immédiate, de *l'équation de définition:*

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \varphi'(x) = \int_0^\infty \left[e^{-\beta} - (1 + \beta)^{-x}\right] \frac{d\beta}{\beta}.$$ [1]

Soit $x = 1$. Alors

$$\varphi'(1) = \int_0^\infty \left[\frac{e^{-\alpha}}{\alpha} - \frac{1}{e^{\alpha} - 1}\right] d\alpha = -C, \tag{67}$$

C étant la *constante d'Euler*. Par suite,

$$\varphi'(x) - \varphi'(1) = \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha} - e^{-\alpha x}}{1 - e^{-\alpha}}\, d\alpha; \tag{68}$$

ou, si l'on pose $e^{-\alpha} = t$:

$$\varphi'(x) - \varphi'(1) = \int_0^1 \frac{1 - t^{x-1}}{1 - t}\, dt. \tag{69}$$

---

1) La formule

$$\varphi'(x + 1) = L.x + \frac{1}{2x} + \int_0^\infty \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{e^{\alpha} - 1} - \frac{1}{2}\right) e^{-\alpha x}\, d\alpha, \tag{52}$$

rappelée ci-dessus, est une *transformée* de la relation (66).

Il est clair que: *Si x est commensurable, la différence $\varphi'(x) - \varphi'(1)$ est réductible à l'intégrale d'une différentielle rationnelle.* [1])

Quant à la quantité $\varphi'(1) = - C$, on n'a pu, jusqu'à présent, l'exprimer sous forme finie.

24. La fraction $\frac{1 - t^{x-1}}{1-t}$ est la limite de la série

$$1 - t^{x-1} + t - t^x + t^2 - t^{x+1} + t^3 - t^{x+2} + \ldots$$

Par conséquent,

$$\varphi'(x) - \varphi'(1) = \sum_1^{\infty} \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x-1}\right]; \tag{70}$$

formule connue. [2])

25. Il résulte, de cette formule,

$$\varphi(x) - x\varphi'(1) = \sum_1^{\infty} \left[\frac{x}{n} - \mathrm{L}.(n+x-1)\right] + const.$$

Pour déterminer la constante, prenons $x = 1$: le terme $\varphi(1) = \mathrm{L}.\Gamma(1)$ s'annule; donc

$$-\varphi'(1) = \sum_1^{\infty} \left[\frac{1}{n} - \mathrm{L}.(n)\right] + const.;$$

et, finalement,

$$\varphi(x) = -(x-1)\,C + \sum_1^{\infty} \left[\frac{x-1}{n} - \mathrm{L}.\frac{x+n-1}{n}\right]. \text{ [3])} \tag{71}$$

26. La série contenue dans le second membre serait peu propre au calcul de $\varphi(x)$; mais on la transforme aisément.

A cet effet, rappelons que

$$C = 1 + \left(\frac{1}{2} - \mathrm{L}.\frac{2}{1}\right) + \left(\frac{1}{3} - \mathrm{L}.\frac{3}{2}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \mathrm{L}.\frac{n}{n-1}\right) + \ldots,$$

ou

$$C = 1 + \sum_2^{\infty} \left[\frac{1}{n} - \mathrm{L}.\frac{n}{n-1}\right]. \text{ [4])} \tag{72}$$

Si, après avoir *mis à part* le terme $(x-1) - \mathrm{L}.x$, on remplace C par l'expression précédente, on obtient, au lieu de la formule (71):

---

1) *Sur la constante d'Euler*, ... p. 214.
2) Henri Limbourg, *Théorie de la fonction gamma*, p. 70.
3) Nous avons remplacé $\varphi'(1)$ par $-C$.
4) *Mélanges mathématiques*, p. 164.

$$\varphi(x) = (x - 1) - L.x - (x - 1) - \sum_2^\infty \left[(x - 1) L.\frac{n-1}{n} + L.\frac{x+n-1}{n}\right];$$

ou, plus simplement,

$$\varphi(x) = L.\left\{\frac{1}{x}\prod_1^\infty \frac{(n+1)^x}{n^{x-1}(n+x)}\right\}. \tag{73}$$

Ainsi, *la fonction $\varphi(x)$ est égale au logarithme népérien d'un produit indéfini.*

27. Ce n'est pas tout: comme $\varphi(x) = L.\Gamma(x)$, on a, en passant des logarithmes aux nombres,

$$\Gamma(x + 1) = \prod_1^\infty \frac{(n+1)^x}{n^{x-1}.(n+x)}. \tag{74}$$

Cette nouvelle formule équivaut à

$$\Gamma(x + 1) = lim.\left[(n + 1)^x \frac{1.2.3\ldots n}{(1+x)(2+x)\ldots(n+x)}\right] (n = \infty). \tag{75}$$ [1])

V.

Développements en séries.

28. Si, dans l'égalité

$$\varpi(x) - \varpi(x + 1) = \left(x + \frac{1}{2}\right) L.\frac{x+1}{x} - 1, \tag{68}$$

on change x en $x + 1$, $x + 2$, ... et que l'on ajoute, on trouve

$$\varpi(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \left[\left(x + n + \frac{1}{2}\right) L.\frac{x+n+1}{x+n} - 1\right]. \tag{76}$$ [2])

Le second membre est la *Série de Gudermann.* Il est facile d'en vérifier la convergence. [3])

En particulier,

$$\varpi\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_0^\infty \left[(n + 1) L.\frac{2n+3}{2n+1} - 1\right];$$

---

1) Celle-ci s'accorde avec la définition de $\Gamma(x)$, adoptée par Gauss.

2) Il ne faut pas oublier que $\varpi(x + n) = 0$, pour n *infini.*

3) Dans les Notes placées à la suite du *Calcul intégral* de Lacroix (tome II, p. 348), M. Serret démontre la formule de Gudermann pour le cas où x est un *nombre entier.* Cette restriction, on le voit, est inutile.

ou, sous une forme un peu plus simple,

$$\varpi\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_1^{\infty}\left[n\,\mathrm{L}\,.\,\frac{2n+1}{2n-1} - 1\right]. \tag{77}$$

29. Reprenons la relation (62) et celles qui s'en déduisent:

$$\varpi(x) - \varpi(x+1) = \left(x+\frac{1}{2}\right)\mathrm{L}\,.\,\frac{x+1}{x} - 1,$$

$$\varpi(x+1) - \varpi(x+2) = \left(x+\frac{3}{2}\right)\mathrm{L}\,.\,\frac{x+2}{x+1} - 1,$$

. . . .

$$\varpi(x+n-1) - \varpi(x+n) = \left(x+\frac{2n-1}{2}\right)\mathrm{L}\,.\,\frac{x+n}{x+n-1} - 1,$$

. . . .

Il en résulte, si l'on ajoute $\varpi(x)$ aux deux membres de la première,

$$2\left[\varpi(x) - \varpi(x+1) + \varpi(x+2) - \ldots\right] = \varpi(x)$$
$$+ \left[\left(x+\frac{1}{2}\right)\mathrm{L}\,.\,\frac{x+1}{x} - 1\right] - \left[\left(x+\frac{3}{2}\right)\mathrm{L}\,.\,\frac{x+2}{x+1} - 1\right] + \ldots,$$

$$2\left[\varpi(x) - \varpi(x+1) + \varpi(x+2) - \ldots\right] = \varpi(x)$$
$$+ \sum_1^{\infty}(-1)^{n-1}\left[\left(x+\frac{2n-1}{2}\right)\mathrm{L}\,.\,\frac{x+n}{x+n-1} - 1\right].$$

Pour simplifier le second membre, j'observe que la relation (76) peut être remplacée par

$$\varpi(x) = \sum_1^{\infty}\left[\left(x+\frac{2n-1}{2}\right)\mathrm{L}\,.\,\frac{x+n}{x+n-1} - 1\right].$$

Ainsi, dans la somme cherchée, les termes de rang *pair* se détruisent, et les autres s'ajoutent. Conséquemment,

$$\varpi(x) - \varpi(x+1) + \varpi(x+2) - \ldots = \sum_1^{\infty}\left[\left(x+i-\frac{1}{2}\right)\mathrm{L}\,.\,\frac{x+i}{x+i-1} - 1\right], \tag{78}$$

i étant *impair*.

Par exemple,

$$\varpi\left(\frac{1}{2}\right) - \varpi\left(\frac{3}{2}\right) + \varpi\left(\frac{5}{2}\right) - \ldots = \sum_1^{\infty}\left[i\,\mathrm{L}\,.\,\frac{2i+1}{2i-1} - 1\right].\ (i \textit{ impair}) \tag{79}$$

30. Les premiers membres de ces égalités peuvent, de diverses manières, être transformés en intégrales définies. Pour abréger, considérons seulement la seconde.

La formule

$$\varpi(x) = 2\int_0^\infty \frac{d\beta}{e^{2\pi\beta}-1} \operatorname{arctg}\frac{\beta}{x} \tag{48}$$

donne

$$\varpi\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^\infty \frac{d\beta}{e^{2\pi\beta}-1} \operatorname{arctg} 2\beta;$$

ou, par le changement de 2β en x:

$$\varpi\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty \frac{dx}{e^{\pi x}-1} \operatorname{arctg} x. \tag{80}$$

De même:

$$\varpi\left(\frac{3}{2}\right) = \int_0^\infty \frac{dx}{e^{\pi x}-1} \operatorname{arctg}\frac{x}{3}, \quad \varpi\left(\frac{5}{2}\right) = \int_0^\infty \frac{dx}{e^{\pi x}-1} \operatorname{arctg}\frac{x}{5}, \ldots;$$

puis

$$\varpi\left(\frac{1}{2}\right) - \varpi\left(\frac{3}{2}\right) + \varpi\left(\frac{5}{2}\right) - \ldots = \int_0^\infty \frac{dx}{e^{\pi x}-1}\left[\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg}\frac{x}{3} + \operatorname{arctg}\frac{x}{5} - \ldots\right]. \tag{81}$$

Soit

$$y = \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg}\frac{x}{3} + \operatorname{arctg}\frac{x}{5} - \ldots; \tag{82}$$

et, par conséquent,

$$y' = \frac{1}{1+x^2} - \frac{3}{9+x^2} + \frac{5}{25+x^2} - \ldots$$

D'après une formule connue, [1])

$$y' = \frac{\frac{\pi}{2}}{e^{\frac{\pi x}{2}} + e^{-\frac{\pi x}{2}}}.$$

Donc

$$y = \int_0^x \frac{\frac{\pi}{2}\,dx}{e^{\frac{\pi x}{2}} + e^{-\frac{\pi x}{2}}} = \int_0^x \frac{e^{\frac{\pi x}{2}}\frac{\pi}{2}\,dx}{1+\left[\left(e^{\frac{\pi x}{2}}\right)\right]^2} = \operatorname{arctg}\left(e^{\frac{\pi x}{2}}\right) - \frac{\pi}{4},$$

1) *Traité élémentaire des séries*, p. 36.

ou

$$y = \operatorname{arctg} \frac{e^{\frac{\pi x}{2}} - 1}{e^{\frac{\pi x}{2}} + 1}. \tag{83}$$

Telle est la somme de la série (82).

Au moyen de cette valeur, combinée avec la relation (81), la formule (79) devient

$$\int_0^\infty \frac{dx}{e^{\pi x} - 1} \operatorname{arctg} \frac{e^{\frac{\pi x}{2}} - 1}{e^{\frac{\pi x}{2}} + 1} = \sum_1^\infty \left[i \, \mathrm{L} \cdot \frac{2i+1}{2i-1} - 1 \right], \ (i \text{ impair}) \tag{84}$$

ou

$$\int_0^\infty \frac{dz}{e^{2z} - 1} \operatorname{arctg} \frac{e^z - 1}{e^z + 1} = \frac{\pi}{2} \sum_1^\infty \left[i \, \mathrm{L} \cdot \frac{2i+1}{2i-1} - 1 \right]. \ (i \text{ impair}) \tag{85}$$

31. *Remarques.* I. La formule connue, presque évidente:

$$\int_0^\infty e^{-p\alpha} \cos q\alpha \, d\alpha = \frac{p}{p^2 + q^2},$$

donne

$$\frac{1}{1 + x^2} - \frac{3}{9 + x^2} + \frac{5}{25 + x^2} - \ldots = \int_0^\infty \cos \alpha x (e^{-\alpha} - e^{-3\alpha} + e^{-5\alpha} - \ldots) d\alpha,$$

ou

$$y' = \int_0^\infty \frac{\cos \alpha x}{e^\alpha + e^{-\alpha}} d\alpha.$$

Nous venons de trouver

$$y' = \frac{\frac{\pi}{2}}{e^{\frac{\pi x}{2}} + e^{-\frac{\pi x}{2}}}.$$

Ainsi

$$\int_0^\infty \frac{\cos \alpha x}{e^\alpha + e^{-\alpha}} d\alpha = \frac{\frac{\pi}{2}}{e^{\frac{\pi x}{2}} + e^{\frac{\pi x}{2}}}. \tag{86}$$ [1]

II. A cause de

$$\varpi(x) = 2x \int_0^\infty \frac{dt}{e^{2\pi t x} - 1} \operatorname{arctg} t,$$

---

1) Bierens de Haan, T. 281.

(18), on a aussi

$$\varpi\left(\frac{1}{2}\right)-\varpi\left(\frac{3}{2}\right)+\varpi\left(\frac{5}{2}\right)-\ldots=\int_0^\infty \operatorname{arctg} t\left[\frac{1}{e^{\pi t}-1}-\frac{3}{e^{3\pi t}-1}+\ldots\right]dt. \qquad (87)$$

Si l'on fait

$$e^{\pi t}=\frac{1}{z},$$

la série se transforme en

$$Z=\frac{z}{1-z}-3\,\frac{z^3}{1-z^3}+5\,\frac{z^5}{1-z^5}-\ldots; \qquad (88)$$

d'où, par le développement de chaque fraction:

$$Z=\sum_1^\infty A_n z^n=\sum_1^\infty A_n e^{-n\pi t}. \qquad (89)$$

Évidemment, A_n *égale l'excès de la somme des diviseurs de n, ayant la forme* $4\mu+1$, *sur la somme de ceux qui ont la forme* $4\mu-1$. Je ne pense pas que la fonction Z ait été déterminée. Néanmoins, par les formules (84) et (87):

$$\int_0^\infty Z\operatorname{arctg} t\,dt=\int_0^\infty \frac{dx}{e^{\pi x}-1}\cdot\operatorname{arctg}\frac{e^{\frac{\pi}{2}x}-1}{e^{\frac{\pi}{2}x}+1}. \qquad (90)$$

32. On a vu, ci-dessus (27), un développement de l'intégrale de Kummer:

$$B=\int_0^\infty \frac{e^{-qx}-e^{-px}}{1+e^{-x}}\,\frac{dx}{x}.$$

Nous allons en former un autre, moins simple, mais qui donne lieu à quelques remarques intéressantes.

On a

$$B=\int_0^\infty \frac{e^{-(q-\frac{1}{2})x}-e^{-(p-\frac{1}{2})x}}{e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}}\,\frac{dx}{x}=\int_0^\infty \frac{e^{-(2q-1)x}-e^{-(2p-1)x}}{e^{x}+e^{-x}}\,\frac{dx}{x}.$$

Soit, pour fixer les idées, $p>q$. On a encore

$$B=\int_0^\infty e^{-(2p-1)x}\,\frac{e^{(2p-2q)x}-1}{e^x+e^{-x}}\,\frac{dx}{x}; \qquad (91)$$

puis, en développant $\dfrac{e^{(2p-2q)x}-1}{x}$:

$$B = \int_0^\infty \frac{e^{-(2p-1)x}}{e^x + e^{-x}} dx \left[\frac{2p-2q}{1} + \frac{(2p-2q)^2}{1.2} x + \frac{(2p-2q)^3}{1.2.3} x^2 + \ldots\right];$$

ou enfin

$$B = \sum_1^\infty \frac{(2p-2q)^n}{\Gamma(n+1)} \mathrm{B}_n, \tag{92}$$

en supposant

$$\mathrm{B}_n = \int_0^\infty \frac{e^{-(2p-1)x}}{e^x + e^{-x}} x^{n-1}\, dx. \tag{93}$$

Le dénominateur surpasse e^x; donc

$$\mathrm{B}_n < \int_0^\infty e^{-2px} . x^{n-1}\, dx,$$

ou

$$\mathrm{B}_n < \frac{\Gamma(n)}{(2p)^n}.$$

Par suite, dans la série (92), le terme général est inférieur à $\frac{1}{n}\left(\frac{p-q}{p}\right)^n$; donc *cette série est convergente*. En outre, à cause de

$$\frac{p-q}{p} + \frac{1}{2}\left(\frac{p-q}{p}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{p-q}{p}\right)^3 + \ldots = -\mathrm{L}.\left(1 - \frac{p-q}{p}\right) = \mathrm{L}.\frac{p}{q},$$

on a

$$B < \mathrm{L}.\frac{p}{q}.$$ [1])

33. (*Suite.*) On tire, de la formule (93),

$$\frac{d\mathrm{B}_n}{dp} = -2\int_0^\infty \frac{e^{-(2p-1)x}}{e^x + e^{-x}} x^n\, dx;$$

---

1) On vérifie ce résu tat en partant de la formule de Kummer (27), et en prenant le développement de

$$\frac{\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)};$$

savoir:

$$1 - \frac{1}{2}\frac{q-p}{q} - \frac{1}{2.4}\frac{(q-p)(q-p-2)}{q(q+2)} - \ldots$$

La somme de la série est moindre que $1 - \frac{q-p}{2q} = \frac{p+q}{2q} < \frac{p}{q}$. Donc

$$B < \mathrm{L}\cdot\frac{p}{q}.$$

ou, ce qui revient au même,

$$B_{n+1} = -\frac{1}{2}\frac{dBn}{dp}. \tag{94}$$

Par conséquent, si l'on part de

$$B_1 = \int_0^\infty \frac{dx}{e^{2px} + e^{(2p-2)x}}, \tag{95}$$

on aura:

$$B_2 = -\frac{1}{2}\frac{dB_1}{dp}, \quad B_3 = \frac{1}{2^2}\frac{d^2B_1}{dp^2}, \quad B_4 = -\frac{1}{2^3}\frac{d^3B_1}{dp^3}, \ldots;$$

puis, au lieu de la formule (92):

$$-\frac{1}{2}B = \frac{q-p}{1}B_1 + \frac{(q-p)^2}{1.2}\frac{dB_1}{dp} + \frac{(q-p)^3}{1.2.3}\frac{dB_1}{dp^2} + \ldots \tag{96}$$

Supposons

$$B_1 = F'(p): \tag{97}$$

la série est le développement de $F(q) - F(p)$. Donc

$$B = 2\,[F(p) - F(q)]. \tag{98}$$

34. (*Suite.*) Dans la valeur de B_1 (95), remplaçons e^{2x} par z: l'intégrale devient

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{z^{p-1}}{1+z}\,dz = \frac{1}{4}\left[\varphi'\left(\frac{p+1}{2}\right) - \varphi'\left(\frac{p}{2}\right)\right]\,[1].$$

Ainsi

$$B_1 = \frac{1}{4}\left[\varphi'\left(\frac{p+1}{2}\right) - \varphi'\left(\frac{p}{2}\right)\right]. \tag{99}$$

Cette expression de B_1 donne:

$$F(p) = \frac{1}{2}\left[\varphi\left(\frac{p+1}{2}\right) - \varphi\left(\frac{p}{2}\right)\right] + const.,$$

---

1) Bierens de Haan, T. 3. Pour vérifier cette égalité importante, il suffit, par exemple, d'employer la formule

$$\varphi'(x) - \varphi'(1) = \int_0^1 \frac{1 - t^{x-1}}{1-t}\,dt. \tag{69}$$

On en déduit

$$\varphi'(x) - \varphi'\left(x - \frac{1}{2}\right) = \int_0^1 \frac{t^{x-\frac{3}{2}}\left(1 - t^{\frac{1}{2}}\right)}{1-t}\,dt;$$

ou, par le changement de t en z^2:

$$\varphi'(x) - \varphi'\left(x - \frac{1}{2}\right) = 2\int_0^1 \frac{z^{2(x-1)}}{1+z}\,dz;$$

etc.

$$F(p) - F(q) = \frac{1}{2}\left[\varphi\left(\frac{p+1}{2}\right) - \varphi\left(\frac{p}{2}\right) - \varphi\left(\frac{q+1}{2}\right) + \varphi\left(\frac{q}{2}\right)\right],$$

et enfin

$$B = \int_0^\infty \frac{e^{-qx} - e^{-px}}{1+e^{-x}} \frac{dx}{x} = \text{L} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)}; \tag{27}$$

formule de Kummer.

35. *Remarque.* Le dernier calcul peut être présenté plus simplement. De

$$\text{B}_1 = F'(p) = \int_0^\infty \frac{dx}{e^{2px} + e^{(2p-2)x}},$$

on déduit, en regardant p comme une variable dont q serait la valeur initiale:

$$F(p) - F(q) = \int_q^p dp \int_0^\infty \frac{dx}{e^{2px} + e^{(2p-2)x}},$$

ou

$$F(p) - F(q) = \int_0^\infty \frac{dx}{1+e^{-2x}} \int_q^p e^{-2px}\, dp.$$

L'intégrale relative à p est

$$-\frac{1}{2x}\left[e^{-2px} - e^{-2qx}\right].$$

Donc

$$F(p) - F(q) = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{e^{-2qx} - e^{2px}}{1+e^{-2x}} \frac{dx}{x},$$

ou

$$F(p) - F(q) = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{e^{-qx} - e^{-px}}{1+e^{-x}} \frac{dx}{x} = \frac{1}{2} B.$$

36. Soit, plus généralement,

$$D = \int_0^\infty \frac{e^{-qx} - e^{-px}}{1+e^{-x}} f(x) \frac{dx}{x}, \tag{100}$$

la fonction $f(x)$ étant convenablement choisie.

On trouve, sans nouveaux calculs,

$$D = \sum_1^\infty \frac{(2p-2q)^n}{\Gamma(n+1)} \text{D}_n, \tag{101}$$

en supposant

$$\text{D}_n = \int_0^\infty \frac{e^{-(2p-1)x}}{e^x + e^{-x}} f(x)\, dx. \tag{102}$$

Soit
$$D_1 = \int_0^\infty \frac{e^{-(2p-1)x}}{e^x + e^{-x}} f(x)\,dx = F'(p). \tag{103}$$

Alors
$$F(p) - F(q) = \int_q^p dp \int_0^\infty \frac{e^{-(2p-1)x}}{e^x + e^{-x}} f(x)\,dx = \int_0^\infty \frac{f(x)\,dx}{1+e^{-2x}} \int_q^p e^{-2px}\,dp,$$

ou
$$F(p) - F(q) = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{e^{-2qx} - e^{-2px}}{1+e^{-2x}} \frac{dx}{x} f(x),$$

ou enfin
$$F(p) - F(q) = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{e^{-qx} - e^{-px}}{1+e^{-x}} \frac{dx}{x} f\left(\frac{x}{2}\right). \tag{104}$$

Ainsi, entre D et $F(p) - F(q)$, il existe une analogie simple. C'est ce que nous voulions faire observer.

37. *Remarque.* D'après les valeurs de B_2, B_3, B_4, (**33**), il est clair que
$$B_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \frac{d^{n-1}B_1}{dp^{n-1}}. \tag{105}$$

Or, par les formules (70) et (99):
$$B_1 = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p+2} - \dots\right] \text{[1]} \tag{106}$$

Donc
$$B_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \Gamma(n) \left[\frac{1}{p^n} - \frac{1}{(p+1)^n} + \frac{1}{(p+2)^n} - \dots\right] \text{[2]} \tag{107}$$

38. Soient $n = 2$, $p = \frac{1}{2}$: la dernière égalité se réduit à
$$B_2 = 1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \dots = G.$$

Donc (105)
$$G = -\frac{1}{2} \cdot \frac{d \cdot \int_0^\infty \frac{dx}{e^{2px} + e^{(2p-2)x}}}{dp},$$

pourvu que, dans le résultat, on fasse $p = \frac{1}{2}$. En effet, on retrouve ainsi
$$G = \int_0^\infty \frac{x\,dx}{e^x + e^{-x}}. \tag{4}$$

---

1) Cette expression résulte, aussi, de la transformation effectuée sur la formule (95) [**34**, note].

2) L'intégrale (93), développée, conduit au même résultat.

39. Prenons, comme nouvel exemple de série, l'intégrale

$$E = \int_0^\infty \frac{e^x - 1}{e^{(1+a)x} + 1} \frac{dx}{x}, \tag{108}$$

la constante a étant supposée positive. [1])

On a d'abord, en remplaçant $\frac{e^x - 1}{x}$ par son développement,

$$E = \int_0^\infty \frac{dx}{e^{(1+a)x} + 1} \left[\frac{1}{\Gamma(2)} + \frac{x}{\Gamma(3)} + \frac{x^2}{\Gamma(4)} + \dots\right];$$

puis, en développant la fraction:

$$E = \sum_1^\infty (-1)^{n-1} \int_0^\infty \left[\frac{1}{\Gamma(2)} + \frac{x}{\Gamma(3)} + \dots\right] e^{-(1+a)nx}\, dx.$$

Si l'on effectue les intégrations, cette égalité devient

$$E = \sum_1^\infty (-1)^{n-1} \left[\frac{1}{n(1+a)} + \frac{1}{2n^2(n+a)^2} + \frac{1}{3n^3(n+a)^3} + \dots\right],$$

ou

$$E = \sum_1^\infty (-1)^{n-1}\, \mathrm{L} \cdot \frac{n(1+a)}{n(1+a) - 1}, \tag{109}$$

ou enfin

$$E = \mathrm{L}.\left[\frac{1+a}{a} \cdot \frac{1+2a}{2+2a} \cdot \frac{3+3a}{2+3a} \cdot \frac{3+4a}{4+4a} \dots\right] \text{[2])}. \tag{110}$$

40. Au moyen de la formule de Kummer, l'intégrale E peut être mise sous une autre forme. En effet, cette intégrale est la même chose que

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-(1+a)x}}{1 + e^{-(1+a)x}}\, dx.$$

---

1) Si elle était négative ou nulle, l'intégrale serait infinie.

2) On parvient immédiatement à ce résultat en écrivant ainsi l'intégrale (108):

$$E = \sum_1^\infty (-1)^{n-1} \int_0^\infty \frac{e^x - 1}{x} e^{-n(1+a)x}\, dx,$$

et en appliquant la formule (28). Mais nous avons voulu donner un exemple de la méthode indiquée ci-dessus (**32**).

Donc, si l'on change x en $\frac{x}{1+a}$:

$$E = \int_0^\infty \frac{e^{-\left(\frac{a}{1+a}\right)x} - e^{-x}}{1+e^{-x}} \frac{dx}{x};$$

ou, par la formule citée,

$$E = \mathrm{L} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{a}{2a+2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2a+1}{2a+2}\right)}. \tag{111}$$

A cause de $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, la comparaison avec la valeur (110) donne ce résultat curieux:

$$\frac{\Gamma\left(\frac{a}{2a+2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2a+1}{2a+2}\right)} = \sqrt{\pi}\, \frac{1+a}{a} \cdot \frac{1+2a}{2+2a} \cdot \frac{3+3a}{2+3a} \cdot \frac{3+4a}{4+4a} \cdots \tag{112}$$

En particulier, si $a = 1$:

$$\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} = \sqrt{\pi}\, \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{10}{9} \cdot \frac{11}{12} \cdots [1] \tag{113}$$

41. *Remarques* I. Nous avons trouvé, précédemment,

$$\left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}\right]^2 = 4 \cdot \frac{3}{1} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{5} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{11}{9} \cdot \frac{11}{13} \cdot \frac{15}{13} \cdots \tag{44}$$

Il résulte, de ces deux expressions,

$$\pi = \frac{3}{1} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{7}{5} \cdot \left(\frac{8}{7}\right)^2 \cdot \left(\frac{7}{9}\right) \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^2 \cdot \frac{11}{9} \cdot \left(\frac{12}{11}\right)^2 \cdot \frac{11}{13} \cdots,$$

ou

$$\pi = \frac{4^2}{1.3} \cdot \frac{3.5}{6^2} \cdot \frac{8^2}{5.7} \cdot \frac{7.9}{10^2} \cdot \frac{12^2}{9.11} \cdots \tag{114}$$

II. On obtient encore, par division,

$$\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{3}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{7}{5} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{11}{9} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{11}{13} \cdot \frac{12}{11} \cdots,$$

ou

$$\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{3}{1} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{11}{10} \cdot \frac{12}{13} \cdots \tag{115}$$

---

1) Dans le second membre, les nombres 1, 2, 3, 4,... sont disposés de manière à former *une grecque.*

III. On sait que

$$\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{2}\,F_1\left(\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right).\ ^{1)}$$

Donc

$$\sqrt{2}\,F_1\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = 3\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{11}{10}\cdot\frac{12}{13}\cdot\frac{15}{14}\cdots \tag{116}$$

Ce développement de l'intégrale elliptique, $F_1\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$, me paraît remarquable. [2])

42. La formule (112) peut être écrite autrement.

Par un théorème d'Euler,

$$\frac{\Gamma\left(\frac{a}{2a+2}\right)\Gamma\left(\frac{a+1}{2a+2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2a+1}{2a+2}\right)} = \mathrm{B}\left(\frac{a}{2a+2}, \frac{a+1}{2a+2}\right),$$

ou

$$\frac{\Gamma\left(\frac{a}{2a+2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2a+1}{2a+2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\mathrm{B}\left(\frac{a}{2a+2}, \frac{1}{2}\right).$$

Donc, au lieu de la formule (112),

$$\mathrm{B}\left(\frac{a}{2a+2}, \frac{1}{2}\right) = \pi\,\frac{1+a}{a}\,\frac{1+2a}{2+2a}\,\frac{3+3a}{2+3a}\,\frac{3+4a}{4+4a}\cdots \tag{117}$$

Si l'on fait

$$\frac{a}{2a+2} = p,$$

on trouve :

$$a = \frac{2p}{1-2p},\quad 1+a = \frac{1}{1-2p},\quad 1+2a = \frac{1+2p}{1-2p},\quad 2+2a = \frac{2}{1-2p},$$

$$3+3a = \frac{3}{1-2p},\quad 2+3a = \frac{2+2p}{1-2p},\ \ldots;$$

$$\frac{1+a}{a} = \frac{1}{2p},\quad \frac{1+2a}{2+2a} = \frac{1+2p}{2},\quad \frac{3+3a}{2+3a} = \frac{3}{2+2p},\quad \frac{3+4a}{4+4a} = \frac{3+2p}{4},\ \ldots;$$

puis

$$\mathrm{B}\left(p, \frac{1}{2}\right) = \pi\,\frac{1}{2p}\cdot\frac{1+2p}{2}\cdot\frac{3}{2+2p}\cdot\frac{3+2p}{4}\cdot\frac{5}{4+2p}\cdot\frac{5+2p}{6}\cdots \tag{118}$$

---

1) *Sur quelques formules relatives aux intégrales eulériennes*, p. 15.

2) On pourrait le simplifier encore, du moins en apparence, au moyen de la valeur

$$\sqrt{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{10}{9}\cdot\frac{10}{11}\cdot\frac{14}{13}\cdot\frac{14}{15}\cdots$$

donnée par Euler (*Introduction à l'Analyse*, tome I, p. 141). Relativement à la quantité $F_1(\sqrt{\frac{1}{2}})$, on peut consulter le Compte rendu de la *Session du Hâvre* (*Association française pour l'Avancement des Sciences*).

43. *Remarque.* Ce développement de $B\left(p, \frac{1}{2}\right)$ a été obtenu en supposant *a positif* (**39**); et, par conséquent, p compris entre 0 et $\frac{1}{2}$. Mais *il subsiste pour toutes les valeurs positives de p.* Pour démontrer cette proposition, posons

$$N_\lambda = \frac{1.3.5\ldots(2\lambda-1)}{2.4.6\ldots 2\lambda}\,\frac{(1+2p)(3+2p)\ldots(2\lambda-1+2p)}{2p(2+2p)\ldots(2\lambda-2+2p)},$$

et cherchons vers quelle limite tend cette quantité, lorsque λ croît indéfiniment.

Il est visible que

$$N_\lambda = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)}{1.2.3\ldots\lambda}\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}+p\right)\left(\frac{3}{2}+p\right)\ldots\left(\lambda-\frac{1}{2}+p\right)}{p(1+p)(2+p)\ldots(\lambda-1+p)}$$

$$= \frac{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(\lambda+1)}\cdot\frac{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}+p\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+p\right)}\cdot\frac{\Gamma(p)}{\Gamma(\lambda+p)}$$

$$= \frac{\Gamma(p)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+p\right)}\cdot\frac{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}+p\right)}{\Gamma(\lambda+1)\Gamma(\lambda+p)}.$$

Or,

$$\lambda+\frac{1}{2}+\lambda+\frac{1}{2}+p = \lambda+1+\lambda+p;$$

donc (**9**) la limite du second facteur est 1.

En conséquence,

$$lim.\ N_\lambda = \frac{\Gamma(p)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+p\right)},$$

et

$$\pi\ lim.\ N_\lambda = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(p)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+p\right)} = B\left(p, \frac{1}{2}\right).$$

44. *Suite.* Le premier membre de l'égalité (118) est

$$\int_0^1 \theta^{-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{p-1}\,d\theta.$$

Soient

$$\theta = \sin^2\varphi,\quad p = \frac{q}{2}:$$

l'intégrale se transforme en

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{q-1}\varphi\,d\varphi,$$

et la formule (118) devient

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{q-1}\varphi\, d\varphi = \frac{\pi}{2} \cdot \prod_1^{\infty} \frac{(2n-1)(2n-1+q)}{2n(2n-2+q)} \text{ [1]}. \qquad (119)$$

Celle-ci, que je crois nouvelle, a des conséquences nombreuses, sur lesquelles je reviendrai peut-être, dans une autre occasion. En attendant, je fais observer que, *si q est un nombre entier*, cette formule (119) donne le développement, en produit indéfini, soit de π, soit de la fraction

$$\frac{1.3.5\ldots(q-2)}{2.4.6\ldots(q-1)}.$$

45. Comme dernière application du procédé indiqué ci-dessus (**32**), cherchons le développement de l'intégrale

$$F = \int_0^{\infty} \frac{(e^x-1)^2}{e^{2x}+1}\frac{dx}{x^2}, \qquad (120)$$

ou

$$F = \int_0^{\infty} \frac{e^x+e^{-x}-2}{e^x+e^{-x}}\frac{dx}{x^2}. \text{ [2]}$$

On a

$$\frac{e^x+e^{-x}-2}{x^2} = 2\left[\frac{1}{\Gamma(3)}+\frac{x^2}{\Gamma(5)}+\frac{x^4}{\Gamma(7)}+\ldots\right];$$

donc

$$F = 2\sum_1^{\infty}(-1)^{n-1}\int_0^{\infty}\left[\frac{1}{\Gamma(3)}+\frac{x^2}{\Gamma(5)}+\frac{x^4}{\Gamma(7)}+\ldots\right]e^{-(2n-1)x}dx,$$

ou, si l'on effectue les intégrations:

$$F = 2\sum_1^{\infty}(-1)^{n-1}\left[\frac{1}{1.2(2n-1)}+\frac{1}{3.4(2n-1)^3}+\frac{1}{5.6(2n-1)^5}+\ldots\right]. \qquad (121)$$

Pour $n = 1$, la série entre parenthèses est un développement de L.2. Lorsque n surpasse 1, on prouve, aisément, que la somme de cette série est

---

1) Si q est un grand nombre, les facteurs $\frac{1}{q}, \frac{3}{2+q}, \frac{5}{4+q}, \ldots$ sont fort petits, et les autres sont considérables. De là résultent des écarts excessifs entre les résultats que l'on obtiendrait en prenant un facteur, deux facteurs, trois facteurs,... C'est pour éviter cet inconvénient que, dans la formule (119), nous avons groupé deux facteurs consécutifs.

2) D'après la formule (23),

$$G = \frac{\pi}{4}F.$$

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{L}\cdot\frac{n}{n-1}+\frac{2n-1}{2}\,\mathrm{L}\cdot\frac{4n(n-1)}{(2n-1)^2}.\ ^{1)}$$

Par conséquent,

$$F=2\,\mathrm{L}.2-\sum_2^{\infty}(-1)^n\left[\mathrm{L}\cdot\frac{n}{n-1}+(2n-1)\,\mathrm{L}\cdot\frac{4n(n-1)}{(2n-1)^2}\right],$$

ou

$$F=2\,\mathrm{L}.2-\mathrm{L}.\left[\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdots\right]-\mathrm{L}\cdot\left[\left(\frac{8}{9}\right)^3\left(\frac{25}{24}\right)^5\left(\frac{48}{49}\right)^7\left(\frac{81}{80}\right)^9\cdots\right].$$

Le premier produit a pour limite $\frac{\pi}{2}$. Donc, finalement,

$$F=\mathrm{L}\cdot\left[\frac{8}{\pi}\left(\frac{9}{8}\right)^3\left(\frac{24}{25}\right)^5\left(\frac{49}{48}\right)^7\left(\frac{80}{81}\right)^9\cdots\right].\ ^{2)} \qquad (122)$$

46. *Remarques I.* On vient de voir que

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{L}\cdot\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2x}\,\mathrm{L}.(1-x^2)=\frac{1}{2x}\left[(1+x)\,\mathrm{L}.(1+x)+(1-x)\,\mathrm{L}.(1-x)\right],$$

---

1) Soient, en effet:

$$x=\frac{1}{2n-1},\quad y=\frac{1}{2}\,\mathrm{L}\cdot\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2x}\,\mathrm{L}.(1-x^2).$$

Le développement de y est

$$x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots-\frac{1}{2}\left[\frac{x}{1}+\frac{x^3}{2}+\frac{x^5}{3}+\ldots\right],$$

ou

$$\frac{x}{1.2}+\frac{x^3}{3.4}+\frac{x^5}{5.6}+\ldots\quad C.\,Q.\,F.\,D.$$

D'ailleurs, comme on peut écrire:

$$y=\frac{1}{2x}(1+x)\,\mathrm{L}.(1+x)+\frac{1}{2x}(1-x)\,\mathrm{L}.(1-x),$$

la vraie valeur de cette fonction y, répondant à $x=1$, est L.2. C'est pour éviter toute *introduction de séries divergentes,* que nous avons considéré, *à part,* le cas de $x=1=n$.

2) Chacun des facteurs, ou son inverse, a la forme

$$\left(\frac{k^2}{k^2-1}\right)^k,$$

k étant *impair.* Or,

$$\left(\frac{k^2}{k^2-1}\right)^k=\left(1+\frac{1}{k^2-1}\right)^{\frac{k^2}{k}}$$

a pour limite l'unité. Donc le produit entre parenthèses est convergent.

ou

$$\frac{1}{2}\mathrm{L}\cdot\frac{n}{n-1}+\frac{2n-1}{2}\mathrm{L}\cdot\frac{4n(n-1)}{(2n-1)^2}=\frac{2n-1}{2}\left[\frac{2n}{2n-1}\mathrm{L}\cdot\frac{2n}{2n-1}+\frac{2n-2}{2n-1}\mathrm{L}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\right].^{1)}$$

Il résulte, de cette identité,

$$F=2\mathrm{L}.2-2\sum_2^\infty(-1)^n\left[n\mathrm{L}\cdot\frac{2n}{2n-1}+(n-1)\mathrm{L}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\right]. \tag{123}$$

Mais, avant de passer des logarithmes aux nombres, on doit modifier les deux termes entre parenthèses, attendu qu'*ils n'ont pas pour limite zéro.* [2]).

Or,

$$n\mathrm{L}\cdot\frac{2n}{2n-1}+(n-1)\mathrm{L}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}=n\mathrm{L}\cdot\frac{4n^2-4n}{(2n-1)^2}+\mathrm{L}\cdot\frac{2n-1}{2n-2}.$$

Par conséquent,

$$F=2\mathrm{L}.2-2\mathrm{L}\cdot\left[\left(\frac{8}{9}\right)^2\left(\frac{25}{24}\right)^3\left(\frac{48}{49}\right)^4\left(\frac{81}{80}\right)^5\cdots\right]-2\mathrm{L}\cdot\left[\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{11}{10}\cdots\right];$$

puis

$$F=\mathrm{L}.\left\{2\left[\left(\frac{9}{8}\right)^2\left(\frac{24}{25}\right)^3\left(\frac{49}{48}\right)^4\left(\frac{80}{81}\right)^5\cdots\right]\left[\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{9}{8}\cdot\frac{10}{11}\cdots\right]\right\}^2. \tag{124}$$

II. La comparaison avec la valeur (122) donne

$$\frac{2}{\pi}=\frac{9}{8}\cdot\frac{24}{25}\cdot\frac{49}{48}\cdot\frac{80}{81}\cdots\times\left[\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{9}{8}\cdot\frac{10}{11}\cdots\right]^2. \tag{125}$$

---

1) En passant, mentionnons l'*équivalence* entre trois séries.

On a

$$\mathrm{L}\cdot\frac{1+x}{1-x}=\mathrm{L}\cdot\frac{n}{n-1}=-\mathrm{L}\cdot\frac{n-1}{n},$$

ou

$$2\left[x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots\right]=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{2}\frac{1}{(n-1)^2}+\frac{1}{3}\frac{1}{(n-1)^3}-\cdots$$
$$=\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}+\cdots;$$

ou, à cause de $x=\frac{1}{2n-1}$:

$$\left.\begin{aligned}&2\left[\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{3(2n-1)^3}+\frac{1}{5(2n-1)^5}+\frac{1}{7(2n-1)^7}+\cdots\right]\\&=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{2(n-1)^2}+\frac{1}{3(n-1)^3}-\frac{1}{4(n-1)^4}+\cdots\\&=\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}+\frac{4}{4n^4}+\cdots\end{aligned}\right\}$$

2) Le premier tend vers $\frac{1}{2}$, et le second, vers $-\frac{1}{2}$.

III. Nous avons trouvé

$$\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{3}{1} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{11}{10} \cdots; \tag{115}$$

ou, ce qui est équivalent,

$$\left[\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{10}{11} \cdots\right]^2 = \frac{16}{\pi}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}\right]^2.$$

La formule (125) peut donc être remplacée par celle-ci:

$$\left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}\right]^2 = 8 \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{24}{25} \cdot \frac{49}{48} \cdot \frac{80}{81} \cdot \frac{121}{120} \cdots \tag{126}$$

IV. Nous avons trouvé, aussi,

$$\left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}\right]^2 = 4 \cdot \frac{3}{1} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{5} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{11}{9} \cdot \frac{11}{13} \cdot \frac{15}{13} \cdots \tag{44}$$

Donc: *les produits continus:*

$$8 \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{24}{25} \cdot \frac{49}{48} \cdot \frac{80}{81} \cdot \frac{121}{120} \cdots,$$

$$4 \cdot \frac{3}{1} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{5} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{11}{9} \cdot \frac{11}{13} \cdots$$

ont pour limite commune:

$$\left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}\right]^2 = \frac{8}{\pi}\left[F_1\left(\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right)\right]^2. \text{ [1]}$$

---

1) Au moyen des *tables de la fonction gamma* (*Calcul intégral de Bertrand*), on trouve

$$\left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}\right]^2 = 8,753\ 76\ldots$$

Cela posé, la formule (126) donne, comme valeurs de plus en plus approchées:

8; 9; 8, 64; 8, 82; 8, 711; 8, 783 6; ...,

et la formule (44):

4; 12; 7, 2; 10, 08; 7, 84; 9, 582 2; 8, 108 0 ...

On voit que les premiers produits sont bien plus convergents que les seconds.

V. D'après la dernière relation,

$$\left[\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{9}{8}\cdot\frac{10}{11}\cdots\right]^2=\frac{2}{[F_1(\sqrt{\frac{1}{2}})]^2}.$$

Donc, au lieu de la formule (124), on peut adopter celle-ci:

$$F=\mathrm{L}\,.\left\{2\left[\left(\frac{9}{8}\right)^2\left(\frac{24}{25}\right)^3\left(\frac{49}{48}\right)^4\left(\frac{80}{81}\right)^5\cdots\right]\right\}^2+\mathrm{L}\,.\,2-\mathrm{L}\,.\left[F_1\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)\right]^2,$$

ou

$$F=3\,\mathrm{L}\,.\,2-2\,\mathrm{L}\,.\left\{F_1\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)\cdot\left(\frac{8}{9}\right)^2\left(\frac{25}{24}\right)^3\left(\frac{48}{49}\right)^4\left(\frac{81}{80}\right)^5\cdots\right\}. \tag{127}$$

VI.

Développements de la constante G.

47. Dans le *Mémoire sur la transformation des séries*, et dans les *Mélanges mathématiques*, nous avons donné les formules:

$$G=\frac{19}{18}-32\sum_1^\infty\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2\,(2n+1)^2\,(2n+3)^2}, \tag{128}$$

$$G=\frac{2\,909}{3\,150}-768\sum_1^\infty\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)\,(2n+1)^2\,(2n+3)^2\,(2n+7)}, \tag{129}$$

$$G=\frac{\pi}{16}\left[\frac{S_2}{2.4}+\frac{S_4}{4.5.16}+\frac{S_6}{6.7.16^2}+\frac{S_8}{8.9.16^3}+\ldots\right]-\frac{\pi}{2}\left[\mathrm{L}\cdot\frac{\pi}{2}-1\right],\text{[1]} \tag{130}$$

et quelques autres.

---

1) Celle-ci est une conséquence de la relation

$$G=-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{L}\,.\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}dx=-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{L}\,.\,\mathrm{tg}\,x\,.\,dx. \tag{3}$$

Suivant l'usage, S_2, S_4, S_6, ... représentent, respectivement, les sommes

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{6},$$

$$\frac{1}{1^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\ldots=\frac{\pi^4}{90},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

calculées par Euler et Legendre.

Pour trouver de nouveaux développements de G, il nous suffira d'appliquer, aux expressions contenues dans le premier chapitre, les procédées de calcul indiqués ci-dessus.

48. La formule (3), que nous venons de rappeler, peut être écrite ainsi:

$$G = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{L}\,.\,\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\,dx.$$

Le développement du logarithme est

$$2\left[\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + \frac{1}{5}\cos^5 x + \frac{1}{7}\cos^7 x + \ldots\right].$$

D'ailleurs

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-1} x\,dx = \frac{2.4.6\ldots(2n-2)}{3.5.7\ldots(2n-1)}.$$

Donc

$$G = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{2.4}{3.5} + \frac{1}{7}\cdot\frac{2.4.6}{3.5.7} + \ldots\right]; \tag{131}$$

mais la série, bien que convergente [1]), l'est très peu.

49. Prenons encore la formule (3), mise sous la forme

$$G = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{L}\,.\cot\frac{1}{2}\alpha\,d\alpha. \tag{132}$$

On a [2])

$$\mathrm{L}\,.\cot\frac{\alpha}{2} = \cos\alpha + \frac{1}{2}X_1\cos 2\alpha + \frac{1}{3}X_2\cos 3\alpha + \frac{1}{4}X_3\cos 4\alpha + \ldots,$$

---

1) Le terme général est

$$u_n = \frac{1}{2n-1}\cdot\frac{2.4.6\ldots(2n-2)}{3.5.7\ldots(2n-1)}.$$

On a donc

$$\frac{u_{n+1}}{n_n} = \frac{2n-1}{2n+1}\,\frac{2n}{2n+1},$$

$$(n+1)\frac{u_{n+1}}{u_n} - n = \frac{2n(n+1)(2n-1) - n(2n+1)^2}{(2n+1)^2} = -\frac{n(2n+3)}{(2n+1)^2},$$

puis

$$lim.\left[(n+1)\frac{u_{n+1}}{u_n} - n\right] = -\frac{1}{2}.$$

Ainsi, d'après un théorème connu, *la série est convergente* (*Traité élémentaire des séries*, p. 23).

2) *Sur les fonctions X_n, de Legendre* (second Mémoire, p. 51). Je rappelle que

$$x = \cos\alpha.$$

ou
$$\text{L}.\cot\frac{\alpha}{2} = \sum_1^\infty \frac{1}{n} X_{n-1} \cos n\alpha.$$

Par conséquent

$$G = \frac{1}{2}\sum_1^\infty \frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} X_{n-1} \cos n\alpha\, d\alpha. \tag{133}$$

Ainsi, *la quantité G peut être rattachée aux polynômes* X_n. La manière la plus simple de calculer l'intégrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} X_{n-1} \cos n\alpha\, d\alpha$$

consiste, me semble-t-il, à remplacer X_{n-1} par son développement connu: [1])

$$\frac{1}{2^{n-1}} \sum_{p=0} (-1)^p C_{n-1,p} \cdot C_{2n-2p-2,\,n-1} \cdot \cos^{n-2p-1}\alpha;$$

mais, néanmoins, les calculs se compliquent rapidement.

50. De la formule

$$G = \frac{\pi}{4}\int_0^\infty \frac{(e^x - e^{-x})^2}{e^x + e^{-x}} \frac{dx}{x^2}, \tag{23}$$

on conclut (**45**, **46**):

$$G = \frac{\pi}{4}\text{L}.\left[\frac{8}{\pi}\cdot\left(\frac{9}{8}\right)^3\left(\frac{24}{25}\right)^5\left(\frac{49}{48}\right)^7\left(\frac{80}{81}\right)^9\cdots\right], \tag{134}$$

$$G = \frac{3\pi}{4}\text{L}.2 - \frac{\pi}{2}\text{L}.\left\{F_1\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)\left(\frac{8}{9}\right)^2\left(\frac{25}{24}\right)^3\left(\frac{48}{49}\right)^4\left(\frac{81}{80}\right)^9\cdots\right\}. \tag{135}$$

51. Dans le n° **45**, pour former une expression de l'intégrale

$$F = \int_0^\infty \frac{\left(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}\right)^2}{e^x + e^{-x}} \frac{dx}{x^2} = \frac{4}{\pi} G,$$

nous avons multiplié le développement de $\frac{e^x + e^{-x} - 2}{x^2}$ par le développement de $\frac{1}{e^x + e^{-x}}$. En procédant d'une manière un peu différente, nous pouvons obtenir diverses séries, plus ou moins intéressantes.

---

1) *Mémoire sur les fonctions* X_n (p. 11).

Reprenons l'égalité

$$\frac{e^x + e^{-x} - 2}{x^2} = 2\left[\frac{1}{\Gamma(3)} + \frac{x^2}{\Gamma(5)} + \frac{x^4}{\Gamma(7)} + \ldots\right],$$

ou

$$\frac{e^x + e^{-x} - 2}{x^2} = 2\sum_0^\infty \frac{x^{2n}}{\Gamma(2n+3)}.$$

Il en résulte, immédiatement,

$$G = \frac{\pi}{2}\sum_0^\infty \frac{1}{\Gamma(2n+3)}\int_0^\infty \frac{x^{2n}}{e^x + e^{-x}}\,dx.\ ^{1)} \qquad (136)$$

Au moyen de la formule connue:

$$\int_0^\infty \frac{x^{2n}}{e^x + e^{-x}}\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n+1} \mathrm{E}_{2n},\ ^{2)}$$

la relation (136) devient

$$G = \frac{\pi}{4}\sum_0^\infty \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n+1}}{\Gamma(2n+3)}\mathrm{E}_{2n}. \qquad (137)$$

Ce développement de la constante G, procédant suivant les puissances du nombre π, est absolument inapplicable. On peut le remplacer par un autre.

En effet, il est visible et connu que

$$\int_0^\infty \frac{x^{2n}}{e^x + e^{-x}}\,dx = \Gamma(2n+1)\left[\frac{1}{1^{2n+1}} - \frac{1}{3^{2n+1}} + \frac{1}{5^{2n+1}} - \ldots\right];$$

donc

$$G = \frac{\pi}{2}\sum_0^\infty \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}\left[\frac{1}{1^{2n+1}} - \frac{1}{3^{2n+1}} + \frac{1}{5^{2n+1}} \cdots\right]. \qquad (138)$$

---

1) On a vu que

$$G = \int_0^\infty \frac{x\,dx}{e^x + e^{-x}}. \qquad (4)$$

Donc *l'intégrale définie*

$$\int_0^\infty \frac{x\,dx}{e^x + e^{-x}}$$

est développée en une série dont les termes sont des intégrales définies, d'apparence un peu plus compliquée que la première.

2) *Sur les Nombres de Bernoulli et d'Euler*, p. 10.

52. *Remarque.* Cette nouvelle formule présente, pour ainsi dire, la même particularité que la formule (136): *la série*

$$1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \ldots$$

est la somme d'une infinité de séries analogues à celle-ci. [1]).

53. Reprenons la formule

$$G = \frac{\pi^2}{8}\int_0^1 \frac{xdx}{\sin\frac{\pi}{2}x}. \qquad (6)$$

On sait que

$$\frac{\pi}{\sin \pi x} = \frac{1}{x} + \left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x}\right) - \left(\frac{1}{2-x} - \frac{1}{2+x}\right) + \ldots;$$

d'où, par le changement de x en $\frac{x}{2}$:

$$\frac{x}{\sin\frac{\pi}{2}x} = \frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_1^\infty (-1)^{n-1}\left[\frac{x}{2n-x} - \frac{x}{2n+x}\right].$$

L'expression ci-dessus devient donc

$$G = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\sum_1^\infty (-1)^{n-1}\int_0^1 \left[\frac{x}{2n-x} - \frac{x}{2n+x}\right] dx. \qquad (139)$$

La quantité entre parenthèse égale

$$2\left[\frac{n}{2n-x} + \frac{n}{2n+x} - 1\right].$$

Par conséquent, si l'on fait

$$u_n = n\,\mathrm{L}\cdot\frac{2n+1}{2n-1} - 1, \qquad (140)$$

on a

$$G = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\sum_1^\infty (-1)^{n-1}\,u_n. \qquad (141)$$

54. *Suite.* D'après la relation

$$\varpi(x) - \varpi(x+1) = \left(x + \frac{1}{2}\right)\mathrm{L}\cdot\frac{x+1}{x} - 1, \qquad (62)$$

---

1) Par un calcul que je supprime, on transforme la dernière valeur de G, contenant une *série double*, en

$$G = \frac{\pi}{4}\,\mathrm{L}\cdot\left[\frac{8}{\pi}\left(\frac{9}{8}\right)^3\left(\frac{24}{25}\right)^5\left(\frac{49}{48}\right)^7\left(\frac{80}{81}\right)^9\ldots\right]. \qquad (136)$$

il est visible que

$$u_n = \varpi\left(\frac{2n-1}{2}\right) - \varpi\left(\frac{2n+1}{2}\right). \tag{142}$$

Donc, par un calcul déjà effectué (**29**) :

$$\sum_1^\infty (-1)^{n-1} u_n = -\varpi\left(\frac{1}{2}\right) + 2\left[\varpi\left(\frac{1}{2}\right) - \varpi\left(\frac{3}{4}\right) + \varpi\left(\frac{5}{2}\right) - \ldots\right];$$

puis, à cause de

$$\varpi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,\mathrm{L}.2, \tag{50}$$

et de

$$\varpi\left(\frac{1}{2}\right) - \varpi\left(\frac{3}{2}\right) + \varpi\left(\frac{5}{2}\right) - \ldots = \int_0^\infty \frac{dx}{e^{\pi x}-1}\,\mathrm{arctg}\,\frac{e^{\frac{\pi}{2}x}-1}{e^{\frac{\pi}{2}x}+1}: \tag{83}$$

$$\sum_1^\infty (-1)^{n-1} u_n = \frac{1}{2}(-1 + \mathrm{L}.2) + 2\int_0^\infty \frac{dx}{e^{\pi x}-1}\,\mathrm{arctg}\,\frac{e^{\frac{\pi}{2}x}-1}{e^{\frac{\pi}{2}x}+1}.$$

Au moyen de cette valeur, la formule (141) se transforme en

$$G = \frac{\pi}{4}\mathrm{L}.2 + \pi\int_0^\infty \frac{dx}{e^{\pi x}-1}\,\mathrm{arctg}\,\frac{e^{\frac{\pi}{2}x}-1}{e^{\frac{\pi}{2}x}+1}. \tag{143}$$

55. *Suite.* Pour simplifier cette nouvelle expression de G, posons

$$\frac{e^{\frac{\pi}{2}x}-1}{e^{\frac{\pi}{2}x}+1} = t,$$

ou

$$\frac{\pi}{2}x = \mathrm{L}.(1+t) - \mathrm{L}.(1-t).$$

Il résulte, de ce changement de variable :

$$dx = \frac{4}{\pi}\frac{dt}{1-t^2}, \qquad e^{\pi x} - 1 = \frac{4t}{(1-t)^2};$$

puis

$$\int^\infty \frac{dx}{e^{\pi x}-1}\,\mathrm{arctg}\,\frac{e^{\frac{\pi}{2}x}-1}{e^{\frac{\pi}{2}x}+1} = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{1-t}{1+t}\,\frac{\mathrm{arctg}\,t}{t}\,dt; \tag{144}$$

et, finalement, $$G = \frac{\pi}{4} L.2 + \int_0^1 \frac{1-t}{1+t} \frac{\operatorname{arctg} t}{t}\, dt. \qquad (145)$$

56. *Remarques.* I. La comparaison de cette formule avec celle-ci:

$$G = \frac{\pi}{4} L.2 + 2\int_0^1 \frac{x \operatorname{arctg} x}{1+x^2}\, dx, \qquad (9)$$

donne

$$\int_0^1 \frac{1-x}{1+x} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\, dx = 2\int_0^1 \frac{x \operatorname{arctg} x}{1+x^2}\, dx; \qquad (146)$$

ou, après quelques réductions:

$$\int_0^1 \frac{1-x-x^2-3x^3}{x(1+x)(1+x^2)} \operatorname{arctg} x\, dx = 0. \qquad (147)$$

Ce résultat, qui est connu[1]), sert de vérification aux calculs précédents.[2])

II. L'intégration par parties change la formule (9) en

$$G = \frac{\pi}{4} L.2 + \left[x(\operatorname{arctg} x)^2\right]_0^1 - \int_0^1 (\operatorname{arctg} x)^2\, dx,$$

ou

$$\int_0^1 (\operatorname{arctg} x)^2\, dx = \frac{\pi^2}{16} + \frac{\pi}{4} L.2 - G.\,^{3)} \qquad (148)$$

III. D'après les relations (89) et (90),

$$\int_0^\infty \frac{dx}{e^{\pi x}-1} \operatorname{arctg} \frac{e^{\frac{\pi}{2}x}-1}{e^{\frac{\pi}{2}x}+1} = \sum_1^\infty A_n \int_0^\infty e^{-n\pi t} \operatorname{arctg} t\, dt;$$

---

1) *Mémoire sur la transformation ...*, p. 40.

2) Il y en a une bien plus simple: l'intégrale (145) se décompose en

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} t}{t}\, dt - 2\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} t}{1+t}\, dt = G - 2\cdot\frac{\pi}{8} L.2$$

(*Mémoire sur la transformation* ..., p. 54).

3) Dans les *Tables* de M. Bierens de Haan, je ne trouve pas cette intégrale; mais elle est une conséquence de celle-ci:

$$\int_0^1 (\operatorname{arc\,cot} x)^2\, dx = \frac{\pi^2}{16} + \frac{3\pi}{4} L.2 - G,$$

donnée par le savant Géomètre.

puis, par la formule (143):

$$G = \frac{\pi}{4}\mathrm{L}.\,2 + \pi \sum_1^\infty \mathrm{A}_n \int_0^\infty e^{-n\pi x} \operatorname{arctg} x\, dx. \text{ [1]} \qquad (149)$$

57. Pour trouver d'autres développements de G, il suffit de transformer le premier membre de l'égalité (148). A cet effet, observons que

$$\frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} = \left[x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots\right][1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots];$$

ou

$$\frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} = x - \left(1+\frac{1}{3}\right)x^3 + \left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)x^5 - \left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)x^7 + \ldots;$$

et, par conséquent,

$$(\operatorname{arctg} x)^2 = x^2 - \left(1+\frac{1}{3}\right)\frac{x^4}{2} + \left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)\frac{x^6}{3} - \left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)\frac{x^8}{4} + \ldots \text{ [2]} \qquad (150)$$

D'un autre côté:

$$1 = \int_0^1 d\alpha = \int_0^1 \frac{1-\alpha^2}{1-\alpha^2}\, d\alpha, \quad 1+\frac{1}{3} = \int_0^1 (1+\alpha^2)\, d\alpha = \int_0^1 \frac{1-\alpha^4}{1-\alpha^2}\, d\alpha, \ldots;$$

donc le second membre de l'égalité (150) se transforme en

$$\int_0^1 \frac{d\alpha}{1-\alpha^2}\left[(1-\alpha^2)x^2 - (1-\alpha^4)\frac{x^4}{2} + (1-\alpha^6)\frac{x^6}{3} - \ldots\right].$$

Si maintenant on multiplie par dx les deux membres, et que l'on intègre entre 0 et 1, on trouve

---

1) On ne doit pas oublier que A_n *égale l'excès de la somme des diviseurs de* n, *ayant la forme* $4\mu+1$, *sur la somme de ceux qui ont la forme* $4\mu-1$. (**31**). D'ailleurs, l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-n\pi x} \operatorname{arctg} x\, dx$$

ne paraît pas exprimable sous forme finie (Bierens de Haan, *Tables*, seconde édition).

2) Ce développement, comparé à celui qui résulte du *carré* de la série

$$x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots,$$

donne l'*identité*, presque évidente:

$$\frac{1}{n}\left[1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2n-1}\right] = \frac{1}{1.(2n-1)} + \frac{1}{3.(2n-3)} + \ldots + \frac{1}{(2n-1).1}.$$

$$\int_0^1 (\operatorname{arctg} x)^2 dx = \int_0^1 \frac{d\alpha}{1-\alpha^2}\left[\frac{1}{1.3}(1-\alpha^2) - \frac{1}{2.5}(1-\alpha^4) + \frac{1}{3.7}(1-\alpha^6) - \ldots\right] \quad (151)$$

Pour simplifier le second membre, posons

$$S = \frac{1}{1.3} - \frac{1}{2.5} + \frac{1}{3.7} - \frac{1}{4.8} + \ldots,$$

$$\Sigma = \frac{\alpha^2}{1.3} - \frac{\alpha^4}{2.5} + \frac{\alpha^6}{3.7} - \frac{\alpha^8}{4.8} + \ldots;$$

et, comme la première série est un cas particulier de la seconde, sommons d'abord celle-ci.

Il est visible que

$$\Sigma = 2\left[\frac{\alpha^2}{2} - \frac{\alpha^2}{3} - \frac{\alpha^4}{4} + \frac{\alpha^4}{5} + \frac{\alpha^6}{6} - \frac{\alpha^6}{7} - \frac{\alpha^8}{8} + \frac{\alpha^8}{8} - \ldots\right],$$

ou

$$\Sigma = \frac{\alpha^2}{1} - \frac{\alpha^4}{2} + \frac{\alpha^6}{3} - \frac{\alpha^8}{4} + \ldots - 2\left[\frac{\alpha^2}{3} - \frac{\alpha^4}{5} + \frac{\alpha^6}{7} - \frac{\alpha^8}{9} + \ldots\right].$$

La première partie égale $L.(1+\alpha^2)$; la seconde est le développement de $-\frac{2}{\alpha}(\alpha - \operatorname{arctg}\alpha)$. Donc

$$\Sigma = -2 + L.(1+\alpha^2) + 2\frac{\operatorname{arctg}\alpha}{\alpha},$$

$$S = -2 + L.2 + \frac{\pi}{2},$$

$$S - \Sigma = L.2 - L.(1+\alpha^2) + \frac{\pi}{2} - 2\frac{\operatorname{artcg}\alpha}{\alpha}.$$

Au moyen de cette valeur, la relation (151) se transforme en

$$\int_0^1 (\operatorname{arctg} x)^2 dx = \int_0^1 \frac{L.2 - L.(1+\alpha^2)}{1-\alpha^2} d\alpha + 2\int_0^1 \frac{\frac{\pi}{4} - \frac{\operatorname{arctg}\alpha}{\alpha}}{1-\alpha^2} d\alpha; \quad (152)$$

mais celle-ci est encore réductible.

58. *Suite.* On a:

$$L.2 - L.(1+\alpha^2) = 1 - \alpha^2 - \frac{1}{2}(1-\alpha^4) + \frac{1}{3}(1-\alpha^6) - \frac{1}{4}(1-\alpha^8) + \ldots,$$

$$\frac{L\,2 - L.(1+\alpha^2)}{1-\alpha^2} = 1 - \frac{1}{2}(1+\alpha^2) + \frac{1}{3}(1+\alpha^2+\alpha^4) - \frac{1}{4}(1+\alpha^2+\alpha^4+\alpha^6) + \ldots,$$

$$\int_0^1 \frac{L.2 - L.(1+\alpha^2)}{1+\alpha^2} d\alpha = 1 - \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right) - \frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right) + \ldots;$$

ou (150):

$$\int_0^1 \frac{L.2 - L.(1+\alpha^2)}{1-\alpha^2}\, d\alpha = \frac{\pi^2}{16}. \tag{153}$$

Donc, au lieu de l'égalité (152),

$$\int_0^1 (\operatorname{arctg} x)^2\, dx = \frac{\pi^2}{16} + 2\int_0^1 \frac{\frac{\pi}{4} - \frac{\operatorname{arctg}\alpha}{\alpha}}{1-\alpha^2}\, d\alpha. \tag{154}$$

La comparaison avec la formule

$$\int_0^1 (\operatorname{arctg} x)^2\, dx = \frac{\pi^2}{16} + \frac{\pi}{4} L.2 - G, \tag{148}$$

donne

$$G = \frac{\pi}{4} L.2 - 2\int_0^1 \frac{\frac{\pi}{4} - \frac{\operatorname{arctg} x}{x}}{1-x^2}\, dx. \tag{155}$$

59. *Remarque.* A cause de

$$G = -\frac{\pi}{4} L.2 + 2\int_0^1 \frac{\frac{\pi}{4} - x \operatorname{artcg} x}{1-x^2}\, dx, \tag{13}$$

on trouve, non-seulement

$$G = \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\, dx, \tag{1}$$

mais encore la relation

$$\int_0^1 \frac{\frac{\pi}{2} - \frac{\operatorname{arctg} x}{x} - x \operatorname{artg} x}{1-x^2}\, dx = \frac{\pi}{4} L.2. \tag{156}$$

60. *Intégrales définies.* I. Si l'on essaie de généraliser la formule

$$\int_0^1 \frac{L.2 - L.(1+x^2)}{1-x^2}\, dx = \frac{\pi^2}{16}, \tag{153}$$

on trouve, en opérant comme nous l'avons fait,

$$\int_0^1 \frac{L.(1+\alpha^2) - L.(1+\alpha^2 x^2)}{1-x^2}\, dx = (\operatorname{arctg}\alpha)^2. \text{ [1]} \tag{157}$$

1) La *vérification* de cette égalité est bien facile: comme les deux membres s'annulent avec α, il suffit d'examiner si leurs dérivées sont identiques. C'est ce qui a lieu.

Par exemple,

$$\int_0^1 \frac{L.4 - L.(1+3x^2)}{1-x^2}\,dx = \frac{\pi^2}{9}, \quad \int_0^1 \frac{L.x}{1-x^2}\,dx = -\frac{\pi^2}{8},$$

etc.

II. Soient

$$\alpha = \operatorname{tg}\beta, \quad \alpha x = \operatorname{tg}\varphi:$$

la formule (157) devient

$$\int_0^\beta \frac{L.\frac{\cos\varphi}{\cos\beta}}{\sin(\beta+\varphi)\sin(\beta-\varphi)} = \frac{\beta^2}{\sin 2\beta}. \tag{158}$$

III. Soit encore

$$\cos\varphi = \frac{\cos\beta}{z};$$

et, par conséquent:

$$\sin\varphi = \frac{\sqrt{z^2-\cos^2\beta}}{z}, \quad d\varphi = \frac{\cos\beta}{z\sqrt{z^2-\cos^2\beta}}\,dz, \quad L\cdot\frac{\cos\varphi}{\cos\beta} = -L.z,$$

$$\sin(\beta+\varphi)\sin(\beta-\varphi) = \sin^2\beta\cos^2\varphi - \cos^2\beta\sin^2\varphi = \frac{1-z^2}{z^2}\cos^2\beta, \text{ etc.}$$

On trouve

$$\int_{\cos\beta}^1 \frac{z\,L.z.dz}{(1-z^2)\sqrt{z^2-\cos^2\beta}} = -\frac{\beta^2}{2\sin\beta}. \tag{159}$$

Par exemple,

$$\int_0^1 \frac{L.z\,dz}{1-z^2} = -\frac{\pi^2}{8};$$

formule connue.

61. Soit l'expression

$$G = \frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{4}\int_0^1 \left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^2 dx. \tag{18}$$

On a, par une formule de Clausen, [1])

$$\left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^2 = 2\left[\frac{1}{1.2} + \frac{2}{3.4}x^2 + \frac{2.4}{3.5.6}x^4 + \frac{2.4.6}{3.5.7.8}x^6 + \dots\right].$$

---

1) *Traité élémentaire des séries*, p. 102.

Donc le développement de l'intégrale est

$$2\left[\frac{1}{1.2}+\frac{2}{3.4.3}+\frac{2.4}{3.5.6.5}+\frac{2.4.6}{3.5.7.8.7}+\dots\right];$$

et, en conséquence,

$$G=\frac{\pi^2}{16}+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1.2}+\frac{2}{3.4.3}+\frac{2.4}{3.5.6.5}+\frac{2.4.6}{3.5.7.8.7}+\dots\right]. \qquad (160)$$

62. De la formule

$$G=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx\,dy}{1+\cos x\cos y}, \qquad (26)$$

on conclut, immédiatement,

$$G=\frac{1}{2}\sum_0^{\infty}(-1)^n\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx\right]^2.$$

D'ailleurs, selon que n est *pair* ou *impair*, la valeur de l'intégrale est

$$\frac{\pi}{2}\,\frac{1.3.5\dots(n-1)}{2.4.6\dots n}$$

ou

$$\frac{2.4.6\dots(n-1)}{3.5.7\dots n}.$$

Par conséquent,

$$2G=\frac{\pi^2}{4}-1+\frac{\pi^2}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{2}{3}\right)^2+\frac{\pi^2}{4}\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2-\left(\frac{2.4}{3.5}\right)^2+\dots \qquad (161)$$

A cause du facteur $\frac{\pi^2}{4}$, non commun à tous les termes de la série, ce développement est presque aussi incommode que l'un de ceux dont il a été fait mention ci-dessus (137).

Liège, 20 novembre 1882.

Ouvrages mathématiques publiés dans la VII. Série des Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences:

T. I, № 5. **Tchébycheff, P.** Sur l'interpolation dans le cas d'un grand nombre de données fournies par les observations. 1859. Pr. 65 K. = 2 Mk. 20 Pf.

№ 9. **Bouniakowsky, V.** Sur quelques inégalités concernant les intégrales ordinaires et les intégrales aux différences finies. 1859. Pr. 25 K. = 80 Pf.

№ 14. **Somoff, J.** Sur l'équation algébrique à l'aide de laquelle on détermine les oscillations très-petites d'un système de points matériels. 1859. Pr. 25 K. = 80 Pf.

T. IV, № 2. **Bouniakowsky, V.** Recherches sur quelques fonctions numériques. 1861. Pr. 30 K. = 1 Mk.

T. V, № 1. **Minding, Dr. Ferd.** Beiträge zur Integration der Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen zwei veränderlichen Grössen. 1862. Pr. 75 K. = 2 Mk. 50 Pf.

№ 9. **Somoff, J.** Mémoire sur un cas particulier de l'homographie plane. 1863. Pr. 25 K. = 80 Pf.

T. VIII, № 5. **Somoff, J.** Mémoire sur les accélérations de divers ordres. 1864. Pr. 45 K. = 1 Mk. 50 Pf.

№ 16. **Somoff, J.** Moyen d'exprimer directement en coordonnées curvilignes quelconques orthogonales ou obliques, les paramètres différentiels du premier et du second ordres et la courbure d'une surface. 1865. Pr. 40 K. = 1 Mk. 30 Pf.

T. XVIII, № 7. **Bouniakowsky, V.** Considérations sur quelques singularités qui se présentent dans les constructions de la géometrie non-Euclidienne. 1872. Avec 1 **pl.** lith. Pr. 25 K. = 80 Pf.

T. XXII, № 9. **Somoff, J.** Mémoire sur les forces qui ne changent pas d'intensité et de direction, quand leurs points d'application formant un système invariable reçoivent un déplacement fini quelconque. 1876. Pr. 35 K. = 1 Mk. 20 Pf.

T. XXIX, № 2. **Helmling, Prof. Dr. P.** Neue Integrations-Wege. 1881. Pr. 35 Kop. = 1 Mk. 20. Pf.

Imprimé par ordre de l'Académie Impériale des sciences.

Mai, 1883. C. Vessélofski, Secrétaire perpétuel.

Imprimerie de l'Académie Impériale des sciences. (Vass.-Ostrow., 9 ligne, № 12.)

MÉMOIRES

DE

L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES DE ST.-PÉTERSBOURG, VIIE SÉRIE.

Tome XXXI, N° 4.

BEITRAG ZUR INTEGRATION

DER

DIFFERENTIALGLEICHUNGEN DER STÖRUNGSTHEORIE.

VON

And. Lindstedt.

(*Lu le 15 Février 1883.*)

St.-PÉTERSBOURG, 1883.

Commissionnaires de l'Académie Impériale des sciences:

à St.-Pétersbourg: MM. Eggers et Cie et J. Glasounof;

à Riga: M. N. Kymmel;

à Leipzig: Voss' Sortiment (G. Haessel).

Prix: 20 Kop. = 70 Pf.

MÉMOIRES
DE
L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES DE ST.-PÉTERSBOURG, VIIE SÉRIE.
Tome XXXI, N° 4.

BEITRAG ZUR INTEGRATION
DER
DIFFERENTIALGLEICHUNGEN DER STÖRUNGSTHEORIE.

VON

And. Lindstedt.

(Lu le 15 Février 1883.)

St.-PÉTERSBOURG, 1883.
Commissionnaires de l'Académie Impériale des sciences:

à St.-Pétersbourg: MM. Eggers et Cie et J. Glasounof;
à Riga: M. N. Kymmel;
à Leipzig: Voss' Sortiment (G. Haessel).

Prix: 20 Kop. = 70 Pf.

Imprimé par ordre de l'Académie Impériale des sciences.
Mai, 1883. C. Vessélofsky, Secrétaire perpétuel.

Imprimerie de l'Académie Impériale des sciences.
(Vass.-Ostr., 9 ligne, № 12.)

Differentialgleichungen von der Form

$$\frac{d^2x}{dt^2} + n^2x = \Psi_0 + \Psi_1 x + \Psi_2 x^2 + \ldots \qquad (1)$$

wo die Ψ_0, Ψ_1, Ψ_2,... Funktionen von t sind, die ausser Constanten nur rein periodische Glieder von der Form

$$\beta \cos (\lambda t + b)$$

enthalten, und n^2 eine positive reelle Constante bedeutet, spielen bekanntlich in der theoretischen Physik und namentlich in der astronomischen Störungstheorie eine sehr wichtige Rolle. Es ist aber bis jetzt nur in einigen speciellen Fällen gelungen dieselben in direkter Weise zu integriren. Man hat deshalb seine Zuflucht zu indirekten Methoden genommen; aber auch diese waren, insofern man sich nicht mit Interpolationsformeln zufrieden giebt, sondern die wahre analytische Form des Integrals kennen lernen will, nicht genügend.

Die Schwierigkeiten, welche sich bei der früheren Art und Weise die Gleichung (1) zu integriren darbieten, bestehen hauptsächlich darin, dass man in den successiven Approximationen Glieder bekommt, welche die Zeit t und Potenzen derselben als Faktoren ausserhalb der periodischen Funktionen besitzen. Allerdings wäre es übereilt aus diesem Umstande den Schluss ziehen zu wollen, dass die gewonnenen Entwickelungen nicht konvergent seien; im Gegentheil, die Astronomen, welche das Problem in dieser Weise behandelt haben, sind nur unter stillschweigender Voraussetzung der unbedingten Konvergenz derselben berechtigt gewesen die aufeinanderfolgenden Annäherungen in der angegebenen Weise auszuführen. Die Theorie selbst aber muss nothwendig als ungenügend bezeichnet werden, so lange sie nicht im Stande ist, durch die Summirung jener sogenannten sekularen Glieder den Nachweis zu liefern, dass die geforderte Konvergenz auch wirklich existirt.

Die Bestrebungen der theoretischen Astronomen sind aus diesem Grunde immer darauf hinausgegangen die sekularen Glieder, wo möglich, aus der Störungstheorie fortzuschaffen. So bemerkenswerth nun auch viele von diesen Versuchen sind, so ist es doch

anderseits wohlbekannt, dass dieselben es nur bis zu einem gewissen Punkte gebracht haben, indem nämlich, wenn die höheren Potenzen der störenden Massen oder der Excentricitäten und Neigungen berücksichtigt werden sollten, die sekularen Glieder sich wieder einstellten.

In der neuen Störungstheorie von Gyldén[1]) sind diese Uebelstände nicht mehr vorhanden. Die sekularen Glieder sind hier theils durch richtigere Formen der Argumente, theils durch die von Gyldén mit dem Namen «elementäre» bezeichneten Glieder ersetzt. Die elementären Glieder sind dadurch charakterisirt, dass ihre ursprünglich mit der störenden Masse multiplicirten Coefficienten durch den Integrationsprocess einen Divisor erhalten, der ebenfalls von der Ordnung der störenden Kraft ist; ausserdem sind ihre Perioden entweder sehr lang oder nahezu gleich der Umlanfszeit des gestörten Planeten. Diese Glieder fanden sich nur zum Theil in der älteren Theorie vor; anstatt der übrigen traten die Potenzreihen nach den Winkeln selbst, also sekuläre Glieder auf. Hieraus ersieht man zugleich die hohe Bedeutung der Gyldén'schen Untersuchungen für die Erlangung einer richtigen Einsicht in die Natur der Planeten-Bewegungen. Denn die früheren Resultate konnten nur so lange dem Bedürfnisse entsprechen, als die Einwirkungen der störenden Planeten als verhältnissmässig kleine Grössen angesehen werden dürfen. Im Laufe der Zeit aber erreichen dieselben, wie es aus der Gyldén'schen Theorie mit Evidenz hervorgeht, Beträge, die mit den Coordinaten selbst vergleichbar sind.

Zu diesen Resultaten kommt Gyldén durch Integration der Differentialgleichungen für die Evektion — Störung des Radius Vektors — und für die Variation — Störung der Länge in der Bahn—. Die erste besitzt gerade die Form (1) mit dem Unterschiede, dass $n^2 = 1$ ist; die Variationsgleichung kann auch auf die nämliche Form gebracht werden, wenn man nach Potenzen der Variation selbst entwickelt, in welchem Falle n^2 eine Grösse von der Ordnung der störenden Kraft wird, aber eine solche Reduktion ist, wie Gyldén bemerkt, nur in selteneren Fällen zu empfehlen.

Gyldén wendet nun bei der Integration strengere Annäherungsmethoden als seine Vorgänger an; soweit es sich übersehen lässt, gelingt es ihm auch vollständig die sekulären Glieder zu vermeiden. Indessen sind seine Methoden in vielen Fällen nicht so einfach und natürlich, wie es die Sache zu fordern scheint, woran sein Bestreben überall die elliptischen Funktionen fruchtbringend zu machen zuweilen Schuld sein mag. Da nun wegen der Wichtigkeit der Gyldén'schen Untersuchungen jeder Versuch seine Theorie in einzelnen Stücken zu vervollkommenen den Astronomen nur willkommen sein kann, so habe ich es in der vorliegenden Abhandlung gewagt eine indirekte Methode mitzutheilen, die nicht allein auf äusserst einfachen Principien beruht und in praktischer Hinsicht zu empfehlen ist, sondern auch in theoretischer Beziehung, insofern es sich um die Evektions-

---

1) Abhandlungen der königl. schwedischen Academie der Wissenschaften, Bihang. Bde. 6 u. 7. Ein in deutscher Sprache verfasstes, ausführliches Referat über die Gyldén'schen Untersuchungen, von Dr. Backlund, findet sich in «Copernicus» Vol. II, pag. 203 u. folg.

gleichung handelt, unter den bis jetzt bekannten indirekten Methoden die natürlichste sein dürfte. Ausserdem werde ich dieselbe an einer Reihe von Beispielen, von denen wenigstens das Eine nicht bloss für die Astronomie von Intresse ist, erläutern.

Zuvörderst will ich den Fall betrachten, dass die Coefficienten $\Psi_0, \Psi_1, \Psi_2, \ldots$ *konstante* Werthe $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots$ besitzen. Die so entstehende Differentialgleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} + n^2x = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \ldots \qquad (2)$$

bestimmt in Gyldéns Theorie den «intermediaren» Radius Vektor als Funktion der Länge in der Bahn.

Astronomisch zu reden besteht die Aufgabe hier einerseits darin zu untersuchen, unter welchen Bedingungen eine für alle endlichen Werthe von t konvergente Darstellung von x durch eine trigonometrische Reihe mit reellem Argument möglich ist, und andererseits darin das Integral wirklich aufzustellen. Jene Bedingungen ganz allgemein anzugeben, ohne über das Bildungs-Gesetz der Coefficienten β eine bestimmte Annahme zu machen dürfte wohl unausführbar sein. Indessen kann man leicht die zur Convergenz ausreichenden Bedingungen aufstellen. Man sieht nämlich, dass die in der Folge vorgenommenen Entwickelungen erlaubt sind, wenn die Reihen

$$\beta_1 + \beta_2\eta_0 + \beta_3\eta_0^2 + \ldots$$
$$\beta_1 + \beta_2\beta_0 + \beta_3\beta_0^2 + \ldots$$

unbedingt konvergiren, und wenn zweitens die Quotienten

$$\frac{\beta_1}{n^2}, \quad \frac{\beta_2\eta_0}{n^2}, \quad \frac{\beta_3\eta_0^2}{n^2}, \ldots .$$
$$\frac{\beta_2\beta_0}{n^2}, \quad \frac{\beta_3\beta_0^2}{n^2}, \ldots .$$

echte Brüche sind, damit die unten mit σ bezeichnete Grösse, wovon das Argument abhängt, reell herauskommt.

Ich will zunächst eine direkte Integrationsmethode angeben, die deshalb von Interesse zu sein scheint, weil bisher keine solche bekannt war, und weil sie sich ausserdem auf sehr elementare, analytische Hülfsmittel gründet. In praktischer Hinsicht dürfte dieselbe dagegen wohl kaum einen Werth haben.

Um nicht während der successiven Operationen Coefficienten zu bekommen, welche die mit η_0 bezeichnete Integrationskonstante zum Divisor haben, was bei nahezu kreisförmigen Bahnen, wo η_0, eine Grösse von der Ordnung der Bahnexcentricität, sehr klein wird, unbequem sein würde, ist es vortheilhaft das konstante Glied β_0 fortzuschaffen. Zu dem Ende setzen wir

$$x = x' + x_0$$

und denken uns x_0 aus der Gleichung

$$n^2 x_0 = \beta_0 + \beta_1 x_0 + \beta_2 x_0^2 + \ldots$$

bestimmt. Anstatt (2) haben wir alsdann die Differentialgleichung

$$\frac{d^2x'}{dt^2} + n^2 x' = \beta_1' x' + \beta_2' x'^2 + \ldots$$

wo wir die Werthe der β' nicht weiter angeben. Wenn nun mit η_0 eine Integrationskonstante bezeichnet wird, so liefert eine erste Integration

$$(\alpha) \qquad \left(\frac{dx'}{dt^2}\right)^2 + n^2 x'^2 = n^2 \eta_0^2 + \tfrac{2}{2} \beta'_1 x'^2 + \tfrac{2}{3} \beta'_2 x'^3 + \ldots$$

Der Methode der Variation der Constanten gemäss nehmen wir nun für das Integral und für die erste Ableitung desselben dieselbe Form an, wie im Falle der Gleichung

$$\frac{d^2x'}{dt^2} + n^2 x' = 0$$

indem wir setzen

$$x' = \eta \cos n\alpha$$

$$\frac{dx'}{dt} = -n\eta \sin n\alpha$$

wo also η und α zwei neue Variable bedeuten, die als Funktionen von t bestimmt werden sollen. Aus der letzten der beiden eben gegebenen Gleichungen folgt ausserdem

$$(\beta) \qquad n\eta \sin n\alpha = n\eta \sin n\alpha \frac{d\alpha}{dt} - \cos n\alpha \frac{d\eta}{dt}$$

Aus (α) folgt jetzt

$$n^2\eta^2 = n^2\eta_0^2 + \tfrac{2}{2} \beta'_1 \eta^2 \cos n\alpha^2 + \tfrac{2}{3} \beta'_2 \eta^3 \cos n\alpha^3 + \ldots$$

woraus unter den gemachten Voraussetzungen eine Gleichung von der Form

$$(\gamma) \qquad \eta = \eta_0 \{1 + b_2 \cos n\alpha^2 + b_3 \cos n\alpha^3 + \ldots\}$$

abgeleitet werden kann. Die Substitution dieses Werthes in (β) liefert zwischen α und t die Differentialgleichung

$$dt = d\alpha \cdot \frac{1 + 3b_2 \cos n\alpha^2 + 4b_3 \cos n\alpha^3 + \ldots}{1 + b_2 \cos n\alpha^2 + b_3 \cos n\alpha^3 + \ldots}$$

Um dieselbe zu integriren, denken wir uns den Faktor von $d\alpha$ nach Potenzen von $\cos n\alpha$ entwickelt und die verschiedenen Potenzen in Cosinus der Vielfachen desselben Winkels verwandelt; bezeichnen wir dabei das konstante Glied mit $(1 - \sigma)^{-1}$, so ergiebt sich nach Multiplikation mit dem Faktor $n(1 - \sigma)$ eine Differentialgleichung

$$n(1-\sigma)\,dt = n d\alpha + \{A_1 \cos n\alpha + 2A_2 \cos 2n\alpha + \ldots\}\, d\alpha$$

nach deren Integration, wenn π die zweite Integrationskonstante ist,

$$n(1-\sigma)\,t + \pi = n\alpha + A_1 \sin n\alpha + A_2 \sin 2n\alpha + \ldots$$

erhalten wird. Hieraus kann man nun, etwa mit Hülfe des Lagrange'schen Theorems, $\cos n\alpha$ nach den Cosinus der Vielfachen des Winkels

$$w = n(1-\sigma)\,t + \pi$$

entwickeln. Nach Substitution hiervon in (γ) und mit Rücksicht auf die Relationen $x' = \eta \cos n\alpha$ und $x = x' + x_0$ erhält man schliesslich das gesuchte Integral in der Form

$$x = \eta_0 \cos w + p_0 + p_1 \cos w + p_2 \cos 2w + \ldots \qquad \textbf{(3)}$$

Die Coefficienten $p_0, p_1, p_2, \ldots$ sind im Allgemeinen recht komplicirte Funktionen von den β, η_0 und n^2. Indessen überzeugt man sich leicht, dass sie von derselben Ordnung wie die Quotienten

$$\frac{\beta_0}{n^2}, \quad \frac{\beta_1 \eta_0}{n^2}, \quad \frac{\beta_2 \eta_0^2}{n^2}, \ldots$$

resp. sind. Da sich indessen diese Methode zur Berechnung der Coefficienten weniger eignet, so habe ich es unterlassen hier ihre Werthe anzugeben. Aus diesem Grunde werde ich jetzt eine zweite Methode mittheilen, die in dieser Hinsicht Nichts zu wünschen übrig lässt.

Die gewöhnliche Methode die Gleichung (2) durch successive Approximationen zu integriren besteht ganz einfach darin, dass man von dem Integrale $x = \eta_0 \cos(nt + \pi)$ der Differentialgleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} + n^2 x = 0$$

ausgeht und mit demselben die rechte Seite in (2) berechnet. Man erhält in dieser Weise eine Differentialgleichung von der Form

$$\frac{d^2x}{dt^2} + n^2 x = \sum \alpha_p \cos(\lambda_p t + a_p)$$

deren Integral im Allgemeinen

$$x = \eta_0 \cos(nt + \pi) + \sum \frac{\alpha_p}{n^2 - \lambda_p^2} \cos(\lambda_p t + a_p)$$

ist. Wenn aber, was im vorliegenden Fall wirklich vorkommt, eins von den λ_p genau gleich n ist, so hat man im Integral dem entsprechend die Glieder

$$\frac{\alpha}{n^2} \cos(nt + a) + \frac{\alpha t}{2n} \sin(nt + a)$$

also u. A. auch ein sekuläres Glied. Unter der Voraussetzung, dass dasselbe das erste Glied einer beständig konvergirenden Potenzreihe ist, setzt man nun den neuen Werth von x in die rechte Seite von (2) ein, worauf eine weitere Integration einen neuen verbesserten Werth von x liefert, u. s. w. Die Zahl der sekulären Glieder mehrt sich dabei immerfort.

Um dieser Calamität vorzubeugen, geht Gyldén[1]) von dem Integrale der Gleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} + n^2x = \beta_1 x + \beta_3 x^3$$

aus. Allerdings treten auch jetzt in den Integralen der verschiedenen Differentialgleichungen, in welche Gyldén die gegebene Gleichung zerlegt, seculäre Glieder auf, aber die daraus sich ergebenden überzähligen Integrationskonstanten lassen sich so bestimmen, dass jene Glieder verschwinden. Diese Möglichkeit beruht darauf, dass die mit η_0 bezeichnete Integrationskonstante schon in der ersten Annäherung, die hier eine elliptische Funktion ist, in das Argument hineinkommt.

Bei einer näheren Betrachtung der zur Anwendung gebrachten Annäherungsmethoden kommt man nämlich bald zu dem Resultate, es habe das Vorkommen der sekulären Glieder überhaupt darin seinen Grund, dass man nur Annäherungen in den Werthen der Coefficienten $p_0, p_1 \ldots$ bewirken kann, während anderseits das Argument unverändert gleich nt gesetzt wird. Schon die Untersuchung der beiden einfachen Fälle

$$\frac{d^2x}{dt^2} + n^2x = \beta_1 x$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + n^2x = \beta_1 x + \beta_3 x^3$$

die sich unmittelbar integriren lassen, genügt aber um einzusehen, dass das Hinzutreten noch weiterer Potenzen von x auf der rechten Seite das Argument nothwendig beeinflussen muss. Es lässt sich demnach erwarten, dass eine mit Rücksicht hierauf vorgenomme Abänderung der alten Methode vollständig zum Ziele führen wird. In der That ist auch die Methode, die ich jetzt auseinandersetzen werde, wie man leicht finden wird, aus einer solchen Ueberlegung hervorgegangen.

Der Kürze wegen bezeichnen wir die rechte Seite von (2) mit $f(x)$ sowie ihre Ableitungen nach x mit $f'(x)$, $f''(x), \ldots$ resp. Wir haben alsdann vor Allem die Coefficienten für die Cosinus der Vielfachen von w zu berechnen, wenn wir in

$$f(x), \quad f'(x), \quad f''(x), \ldots$$

anstatt x den Werth $\eta_0 \cos w$ substituiren. Schreiben wir zu dem Ende

1) Vierteljahrsschrift der Astr. Gesellschaft 16. Jahrg., pag. 297.

$$f\,(\eta_0 \cos w) = a_0 + 2a_1 \cos w + 2a_2 \cos 2w + \dots$$

$$f'\,(\eta_0 \cos w) = a'_0 + 2a'_1 \cos w + 2a'_2 \cos 2w + \dots$$

$$f''\,(\eta_0 \cos w) = a''_0 + 2a''_1 \cos w + 2a''_2 \cos 2w + \dots$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

so hat man, wie unmittelbar ersichtlich,

$$a_{2m} = \sum_{p=m}^{p=\infty} (2p)_{p-m} \left(\frac{\eta_0}{2}\right)^{2p} \beta_{2p}$$

$$a_{2m+1} = \sum_{p=m}^{p=\infty} (2p+1)_{p-m} \left(\frac{\eta_0}{2}\right)^{2p+1} \beta_{2p+1}$$

$$a'_{2m} = \sum_{p=m}^{p=\infty} (2p+1)\,(2p)_{p-m} \left(\frac{\eta_0}{2}\right)^{2p} \beta_{2p+1}$$

$$a'_{2m+1} = \sum_{p=m}^{p=\infty} (2p+2)\,(2p+1)_{p-m} \left(\frac{\eta_0}{2}\right)^{2p+1} \beta_{2p+2}$$

$$a''_{2m} = \sum_{p=m}^{p=\infty} (2p+1)\,(2p+2)\,(2p)_{p-m} \left(\frac{\eta_0}{2}\right)^{2p} \beta_{2p+2}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Wie allgemein gebräuchlich ist hier $(m)_n$ die Bezeichnung für den Coefficienten für x^n in der Entwicklung von $(1+x)^m$ nach Potenzen von x. Wir können somit die $a, a', a'', \dots$ als vollständig bekannte Ausdrücke in den $\beta_0, \beta_1, \dots$ und η_0 betrachten.

Das Integral von (2) hat nun die Form

$$x = \eta_0 \cos w + p_0 + p_2 \cos 2w + p_3 \cos 3w + \dots$$

wobei p_1 in die Integrationskonstante η_0 hineingezogen worden ist. Das Argument w ist nach dem Vorigen

$$w = n\,(1 - \sigma)\,t + \pi$$

Die Unbekannten sind also $p_0, p_2, p_3, \dots$ und σ, und da dieselben Funktionen der β sind, so wird unsere Methode darin bestehen in einer ersten Annäherung aller Glieder erster Ordnung in Bezug auf die β in jenen Unbekannten zu ermitteln; eine zweite Annäherung soll die Glieder zweiter Ordnung hinzufügen, u. s. w.

Die Bestimmung von σ wird indessen nicht direkt geschehen, sondern durch die Ein-

führung einer gewissen Constante ν vermittelt werden; zwichen σ und ν hat man die Relation.

$$1 - \sigma = \sqrt{1 - \nu}$$

wodurch σ aus ν berechnet werden kann. Die Constante ν selbst soll in jeder Annäherung so bestimmt werden, dass keine sekulären Glieder zum Vorschein kommen; es wird demnach ν und also auch σ immer besser bestimmt werden. Insofern wir in ν und x die Glieder erster Ordnung als bekannt voraussetzen dürfen, benutzen wir die Bezeichnungen ν_1 und x_1, nach der zweiten Approximation dementsprechend ν_2 und x_2, u. s. w.

Die Integrationskonstanten bleiben während aller Operationen dieselben, nämlich π und η_0. Weiter sei es hervorgehoben, dass in der ersten Approximation nur die a-Coefficienten als bekannt vorausgesetzt werden, in der zweiten sind noch die a' erforderlich, u. s. w.

Wir führen nun ν in der Weise ein, dass wir anstatt (2)

$$(\delta) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + n^2 (1 - \nu)\, x = - n^2\nu x + f(x)$$

schreiben. Um die erste Approximation zu erlangen, gehen wir von dem Integrale $x = \eta_0 \cos w$ der Differentialgleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} + n^2 (1 - \nu_1)\, x = 0$$

aus und berechnen mit diesem Werthe von x die rechte Seite von (δ). Man erhält in dieser Weise die Gleichung

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + n^2 (1 - \nu_1)\, x_1 = a_0 + (2a_1 - n^2\nu_1\eta_0) \cos w + 2a_2 \cos 2w + \ldots$$

Soll nun die Integration dieser Gleichung vollzogen werden können, ohne dass ein sekuläres Glied zum Vorschein kommt, so muss rechts das Glied in $\cos w$ weggeschafft werden. Diese Bedingung liefert für ν_1 den Werth

$$\nu_1 = \frac{2a_1}{n^2\eta_0}$$

Die Integration ergiebt darauf sofort

$$x_1 = \eta_0 \cos w + \frac{1}{n^2} \left\{a_0 + \frac{2a_2}{1 - 2^2} \cos 2w + \frac{2a_3}{1 - 3^2} \cos 3w + \ldots\right\}$$

worin alle Glieder erster Ordnung in den Coefficienten p_0, p_2,.. von (3) berücksichtigt worden sind. Eigentlich wäre noch für die Parenthese $1 - \nu_1$ als Divisor hinzuzufügen; die Vernachlässigung von ν_1 an dieser Stelle äussert aber ihren Einfluss erst in den Gliedern zweiter Ordnung, die der Symmetrie halber in der folgenden Approximation vollständig ermittelt werden sollen.

Hierauf schreiben wir in (δ) ν_2 anstatt ν_1 und berechnen die rechte Seite mit dem eben

gewonnenen Werthe $x = x_1$. Bemerken wir dabei, dass wenn nur Glieder zweiter Ordnung in Betracht gezogen werden sollen

$$f(x_1) = f(\eta_0 \cos w) + \frac{1}{n^2} f'(\eta_0 \cos w) \cdot \left\{a_0 + \frac{2a_2}{1-2^2} \cos 2w + \dots\right\}$$

so erhalten wir zur Ermittelung von x_2 die Differentialgleichung

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} + n^2(1-\nu_2)\,x_2 = -n^2\nu_2\eta_0 \cos w + f(\eta_0 \cos w) +$$
$$+ \frac{1}{n^2}\left\{a_0 + \frac{2a_2}{1-2^2}\cos 2w + \dots\right\} \cdot \left\{a'_0 + 2a'_1 \cos w + 2a'_2 \cos 2w + \dots - \nu_1 n^2\right\}$$

oder kürzer

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} + n^2(1-\nu_2)\,x_2 = -n^2\nu_2\eta_0 \cos w + f(\eta_0 \cos w) +$$
$$+ \frac{1}{n^2}\left\{b_0 + 2b_1 \cos w + 2b_2 \cos 2w + \dots\right\}$$

wo die b-Coefficienten durch folgende Ausdrücke gegeben sind:

$$b_0 = a_0a'_0 + \frac{2a_2a'_2}{1-2^2} + \frac{2a_3a'_3}{1-3^2} + \dots - a_0\nu_1n^2$$
$$b_1 = a_0a'_1 + \frac{a_2(a'_1 + a'_3)}{1-2^2} + \frac{a_3(a'_2 + a'_4)}{1-3^2} + \dots$$
$$b_2 = a_0a'_2 + \frac{a_2(a'_0 + a'_4)}{1-2^2} + \frac{a_3(a'_1 + a'_5)}{1-3^2} + \dots - \frac{a_2\nu_1n^2}{1-2^2}$$
$$b_3 = a_0a'_3 + \frac{a_2(a'_1 + a'_5)}{1-2^2} + \frac{a_3(a'_0 + a'_6)}{1-3^2} + \dots - \frac{a_3\nu_1n^2}{1-3^2}$$

. . . .

Wird nun ν_2 nach demselben Princip wie vorhin bestimmt, also

$$\nu_2 = \frac{2a_1}{n^2\eta_0} + \frac{2b_1}{n^4\eta_0} = \nu_1 + \frac{2b_1}{n^4\eta_0}$$

so liefert die darauf folgende Integration:

$$x_2 = \eta_0 \cos w + \frac{1+\nu_1}{n^2}\left\{a_0 + \frac{2a_2}{1-2^2}\cos 2w + \frac{2a_3}{1-3^2}\cos 3w + \dots\right\} +$$
$$+ \frac{1}{n^4}\left\{b_0 + \frac{2b_2}{1-2^2}\cos 2w + \frac{2b_3}{1-3^2}\cos 3w + \dots\right\}$$

worin alle Glieder erster und zweiter Ordnung berücksichtigt worden sind.

Von derselben Beschaffenheit sind die für die Erlangung der Glieder dritter, vierter,... Ordnung erforderlichen Operationen, die ich indessen hier nicht ausführe, weil man in den meisten Fällen mit den zwei ersten Annäherungen ausreicht; in der That sind nähmlich in der Störungstheorie die Coefficienten β_0, β_1,... mit der störenden Masse multiplicirt. In den

Fällen, wo es nothwendig ist noch weiter zu gehen, als es hier geschehen ist, bietet die Fortsetzung keine Schwierigkeit.

Dass nun die eben vorgetragene Methode, ohne irgend welche Modifikation. sich zur Integration der allgemeinen Differentialgleichung verwenden lässt, leuchtet ohne Weiteres ein. Die erste Approximation ergiebt sich demnach unmittelbar durch Integration von

$$\frac{d^2x}{dt^2} + n^2(1 - \nu_1)\,x = - n^2\nu_1\eta_0 \cos w + \Psi_0 + \Psi_1\eta_0 \cos w + \Psi_2\eta_0^2 \cos w^2 + \ldots$$

nachdem ν_1 so bestimmt worden ist, dass rechts alle Glieder in cos w sich aufheben. Wenn β_0, β_1,... die konstanten Glieder in den Ψ_0, Ψ_1,... bedeuten, so nimmt ν_1 offenbar denselben Werth wie im Falle der Gleichung (2) an. Die zweite Approximation erhält man, wenn die rechte Seite mit dem ersten Annäherungswerth, anstatt mit $x = \eta_0 \cos w$, berechnet wird, und ν_2 nach demselben Grundsatz wie vorhin gewählt wird. Der Werth von ν_2 wird aber offenbar nicht mit dem ν_2 im vorigen Falle identisch sein; denn die Coefficienten für die periodischen Glieder in den Ψ werden jetzt eine Einwirkung haben. Vor Allem aber heben wir hervor, dass in dem Integrale erstens alle in die Ψ-Funktionen eingehenden Argumente auftreten, zweitens ausserdem nur das einzige Argument

$$w = n(1 - \sigma)\,t + \pi$$

wo σ wie gewöhnlich durch die Relation $1 - \sigma = \sqrt{1 - \nu}$ definirt ist. Weiter sei bemerkt, dass wir stillschweigend angenommen haben, es finde sich unter den gegebenen Argumenten keins, das die Form

$$n(1 - \sigma)\,t + \alpha$$

habe, wo α einen von π verschiedenen Werth besitzt. Wie man in diesem Falle zu verfahren hat, leuchtet aus den folgenden Beispielen ein.

Als ein weiteres Beispiel werde ich die Integration der Differentialgleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \{n^2 - 2\beta \cos(\lambda t + b)\}\,x = 0 \tag{4}$$

durchführen. Diese Differentialgleichung ist allerdings nur ein ganz specieller Fall der Gleichung (1), denn sie entsteht aus dieser, wenn man

$$\Psi_0 = \Psi_2 = \Psi_3 = \ldots = 0$$

$$\Psi_1 = 2\beta \cos(\lambda t + b)$$

annimmt. Indessen hat sie an und für sich ein so bedeutendes Interesse, dass es wohl entschuldigt werden kann, wenn wir uns mit derselben etwas näher beschäftigen. Gyldén reducirt in seiner Störungstheorie die Bestimmung der Evection auf eine Reihe solcher

Differentialgleichungen, wobei die rechte Seite noch Ψ_0 enthalten kann. Dieser Fall wird unten besprochen werden. Ausserdem spielt die Gleichung bekanntlich in der Theorie der Schwingungen gespannter Membrane eine wichtige Rolle. Man hat sie vor Gyldén — vgl. Heine, Handbuch der Kugelfunktionen, 2-te Auflage, Th. I, pag. 404 u. folg. — weder direkt noch durch Annäherungen in befriedigender Weise integriren können. Nur unter der speciellen Annahme, dass x sich durch eine trigonometrische Reihe mit dem Argumente λt ausdrücken lasse, hat man die Integration durch Substitution einer solchen Reihe mit unbestimmten Coefficienten vollziehen können.

Unsere Methode soll uns nun dazu dienen über die wahre analytische Form des Integrals Aufschluss zu erhalten. Nachdem diese bekannt geworden, ist es nicht schwer Formeln zur Berechnung der Coefficienten aufzufinden.

Schreiben wir anstatt (4)

$$\frac{d^2x}{dt^2} + n^2 x = 2\beta \cos(\lambda t + b)\, x$$

und wenden die erwähnte Methode an, so giebt die erste Approximation

$$x_1 = \eta_0 \cos w + \frac{\beta\eta_0}{n^2 - (\lambda + n)^2} \cos(\lambda t + b + w) + \frac{\beta\eta_0}{n^2 - (\lambda - n)^2} \cos(\lambda t + b - w)$$

und die zweite

$$x_2 = x_1 + \frac{\beta^2\eta_0}{\{n^2 - (\lambda + n)^2\}\{n^2 - (2\lambda + n)^2\}} \cos\{2(\lambda t + b) + w\}$$

$$+ \frac{\beta^2\eta_0}{\{n^2 - (\lambda - n)^2\}\{n^2 - (2\lambda - n)^2\}} \cos\{2(\lambda t + b) - w\}$$

u. s. w. Hier bedeutet, wie immer,

$$w = n(1 - \sigma)\, t + \pi$$

wobei wir, wenn wir uns mit den zwei angeführten Annäherungen begnügen, für σ zu setzen haben

$$\sigma = -\frac{\beta^2}{n^2(\lambda^2 - 4n^2)}$$

Man sieht daraus, dass das allgemeine strenge Integral, wenn jene Operationen noch weiter fortgesetzt gedacht werden, nothwendig die Form

$$x = \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} \mu_i \cos\{w + i(\lambda t + b)\} \tag{5}$$

besitzen muss. Schreiben wir nun der Kürze wegen

$$m = n(1 - \sigma)$$

$$w = mt + \pi$$

so sind die Coefficienten μ_i nebst m die Unbekannten des Problems. Die Integrationskonstanten sind μ_0 ($= \eta_0$) und π.

Setzen wir nun in (4) den Ausdruck (5) für x ein, so erhalten wir zur Bestimmung der Unbekannten das Formelsystem

$$(6) \quad \begin{aligned} &\mu_i \{n^2 - (m + i\lambda)^2\} = \beta \{\mu_{i-1} + \mu_{i+1}\} \\ &(i = \ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots) \end{aligned}$$

Um diese Gleichungen in bequemer Weise aufzulösen, führen wir, indem wir die Fälle i positiv und i negativ trennen, folgende Bezeichnungen ein:

$$M_i = \frac{\beta}{n^2 - (m + i\lambda)^2}$$

$$M_{-i} = \frac{\beta}{n^2 - (m - i\lambda)^2}$$

$$\alpha_i = \frac{\mu_i}{\mu_{i-1}}$$

$$\alpha_{-i} = \frac{\mu_{-i}}{\mu_{-i+1}}$$

und erhalten alsdann zur successiven Berechnung der μ_i und μ_{-i} aus μ_0 folgende Gleichungen:

$$(7) \quad \begin{aligned} \alpha_i &= \frac{M_i}{1 - M_i \alpha_{i+1}} \\ \alpha_{-i} &= \frac{M_{-i}}{1 - M_{-i} \alpha_{-i-1}} \\ \mu_i &= \alpha_i \mu_{i-1} \\ \mu_{-i} &= \alpha_{-i} \mu_{-i+1} \end{aligned}$$

Wenn nun m bekannt wäre, so könnte die Berechnung der Coefficienten des Integrals unmittelbar geschehen. Da aber m selbst hier unbekannt ist, und da sein Werth für die Berechnung der M_i und M_{-i} erforderlich ist, so muss man bei numerischen Anwendungen zunächst einen angenäherten Werth von m aufsuchen. Ein solcher ist auch leicht zu finden. Für $i = o$ erhalten wir aus (6)

$$\mu_0 \{n^2 - m^2\} = \beta \{\mu_{-1} + \mu_1\}$$

und also

$$(8) \quad m = n\sqrt{1 - \frac{\beta}{n^2}(\alpha_1 + \alpha_{-1})}$$

Diese Formel giebt bis auf Glieder dritter Ordnung in Bezug auf β für m den Annäherungswerth

$$m = n\left\{1 + \frac{\beta^2}{n^2(\lambda^2 - 4n^2)}\right\}$$

was mit dem oben für σ gefundenen Werth genau übereinstimmt. Mit Zugrundelegung desselben führt man nun eine erste Berechnung der α_i und α_{-i} aus. Mit den daraus sich ergebenden neuen Werthen von α_1 und α_{-1} verbessert man nach (8) den Werth von m und wiederholt die Rechnung, u. s. w. In den allermeisten Fällen der Störungstheorie wird die zweite Berechnung ausreichen. Nur in gewissen Fällen, vor allen Dingen wenn λ sich von $2n$ nur um Grössen erster Ordnung unterscheidet, ist es damit nicht genug. Alsdann wird nämlich, wie man sofort übersieht, der angegebene erste Werth von m nur bis auf Grössen zweiter Ordnung genau, und während weiter im allgemeinen Falle ein Coefficient μ_i oder μ_{-i} von der Ordnung i ist, so wird dagegen in dem erwähnten Fall μ_{-1} von der nullten Ordnung, was gerade einem elementären Gliede entspricht. Es ist weiter zu bemerken, dass das Auftreten eines sekulären Gliedes in diesem Falle wohl möglich, aber nicht wahrscheinlich ist. Da nämlich $m = n(1 - \sigma)$ ist, so sieht man, dass nur wenn entweder

$$\lambda = \frac{n\sigma}{i} = \frac{1}{i}\left\{n - m\right\}$$

oder

$$\lambda = -\frac{2n}{i} + \frac{n\sigma}{i} = -\frac{1}{i}\left\{n + m\right\}$$

μ_i unendlich gross wird, was eben das Vorkommen eines sekulären Gliedes charakterisirt.

Wenn dagegen λ und n oder λ und m in einem genau rationalen Verhältnisse zu einander stehen, so kann kein sekuläres Glied in dem Integral vorhanden sein. Da ich indessen jetzt nur die Absicht habe die Evektionsgleichung, so wie Gyldén sie gegeben, in möglichst einfacher Weise zu integriren, so werde ich auf diese Frage hier nicht weiter eingehen.

Ich will nun den Fall behandeln, dass die rechte Seite von (4) nicht Null, sondern gleich Ψ_0 ist, wo Ψ_0 ein Aggregat aus rein periodischen Gliedern bedeutet, also

$$\Psi_0 = \alpha_1 \cos(k_1 t + a_1) + \alpha_2 \cos(k_2 t + a_2) + \ldots$$

wo die Coefficienten die störende Masse als Faktor enthalten, also im Vergleich mit n^2 kleine Grössen sein sollen. Weiter machen wir über die Argumente in Ψ_0 vorläufig keine specielle Voraussetzung.

Die zu integrirende Differentialgleichung ist somit jetzt

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \left\{n^2 - 2\beta\cos(\lambda t + b)\right\} = \Psi_0 \qquad \textbf{(9)}$$

Unsere Methode zeigt dann sofort, dass das Integral folgendes Aussehen hat

$$(10)\quad x = \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} \mu_i \cos\{w + i(\lambda t + b)\} + \sum_{p=1}^{p=+\infty} \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} \mu_i^{(p)} \cos\{k_p t + a_p + i(\lambda t + b\}$$

Substituirt man diesen Ausdruck für x in (9), so erhält man zur Berechnung der μ_i und m die Gleichungen (6). Der erste Theil des Integrals von (9) ist also nichts anderes als das schon gefundene Integral (5) von (4). Was die $\mu_i^{(p)}$ betrifft, so kommt man zu dem Resultate, dass ihre Berechnung sich für jeden einzelnen p-Werth unabhängig ausführen lässt. Man erhält nämlich allgemein

$$(11)\quad \begin{gathered} (n^2 - k_p^2)\,\mu_0^{(p)} = \alpha_p + \beta\,\{\mu_1^{(p)} + \mu^{(p)}_{-1}\} \\ \mu_i^{(p)}\,\{n^2 - (i\lambda + k_p)^2\} = \beta\,\{\mu^{(p)}_{i-1} + \mu^{(p)}_{i+1}\} \\ (i = \ldots - 2, -1, 1, 2, \ldots) \end{gathered}$$

Bezeichnen wir demnach mit x_0 das Integral von (4) und setzen wir weiter

$$x_p = \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} \mu_i^{(p)} \cos\{k_p t + a_p + i(\lambda t + b)\}$$

so können wir anstatt (10)

$$x = x_0 + x_1 + x_2 + \ldots$$

schreiben. Jedes von den x_p ist alsdann durch ein System von Gleichungen (11) vollständig bestimmt, und es erübrigt nur noch dasselbe für numerische Anwendungen bequem umzuwandeln.

Wir sehen dabei sofort, dass die Gleichungen (11), mit Ausnahme der ersten, der Form nach mit (6) genau übereinstimmen. Wir können demnach ganz ähnliche Formeln einführen wie bei diesen. Setzen wir also

$$M_i^{(p)} = \frac{\beta}{n^2 - (k_p + i\lambda)^2}$$

$$M^{(p)}_{-i} = \frac{\beta}{n^2 - (k_p - i\lambda)^2}$$

$$\alpha_i^{(p)} = \frac{\mu_i{}^{(p)}}{\mu^{(p)}{}_{i-1}};\quad \alpha^{(p)}{}_{-i} = \frac{\mu^{(p)}{}_{-i}}{\mu^{(p)}{}_{-i+1}}$$

so erhalten wir

$$(12)\quad \begin{gathered} \alpha_i^{(p)} = \frac{M_i{}^{(p)}}{1 - M_i{}^{(p)}\,\alpha^{(p)}{}_{i+1}} \\ \alpha^{(p)}{}_{-i} = \frac{M^{(p)}{}_{-i}}{1 - M^{(p)}{}_{-i}\,\alpha^{(p)}{}_{-i-1}} \\ \mu_i^{(p)} = \alpha_i^{(p)}\,\mu^{(p)}{}_{i-1};\quad \mu^{(p)}{}_{-i} = \alpha^{(p)}{}_{-i}\,\mu^{(p)}{}_{-i+1} \end{gathered}$$

Hier können aber die $M_i^{(p)}$ und $M^{(p)}_{-i}$ direkt berechnet werden, da in denselben nur bekannte Grössen enthalten sind. Demnach lassen sich auch die $\alpha_i^{(p)}$ und $\alpha^{(p)}_{-i}$ unmittelbar berechnen, indem man für einen hinreichend hohen Index $\alpha_i^{(p)}$ und $\alpha_{-i}^{(p)}$ gleich Null setzt und die übrigen daraus rückwärts berechnet; selbst in den schwierigsten Fällen, wo elementäre Glieder auftreten, ist es ausreichend mit $\alpha_6^{(p)} = o$ anzufangen.

In dieser Weise erhalten wir die $\mu_i^{(p)}$ durch $\mu_0^{(p)}$ ausgedrückt, und wir haben also nur noch diesen letzten Coefficienten zu berechnen. Da man aber

$$\mu_1^{(p)} = \alpha_1^{(p)}\mu_0^{(p)}, \quad \mu^{(p)}_{-1} = \alpha^{(p)}_{-1}\mu_0^{(p)}$$

hat, und da die $\alpha_1^{(p)}$ und $\alpha^{(p)}_{-1}$ schon bekannt sind, so giebt die Einsetzung dieser Werthe in die erste der Gleichungen (11), wenn wir dieselbe nach $\mu_0^{(p)}$ auflösen

$$\mu_0^{(p)} = \frac{\alpha_p}{n^2 - k_p^2 - \beta\,(\alpha_1^{(p)} + \alpha^{(p)}_{-1})} \tag{13}$$

womit die Aufgabe erledigt ist.

Die Gleichung (13) giebt uns auch Aufschluss über die Frage, wann elementäre oder sekuläre Glieder in dem Integrale vorhanden sind. So oft k_p entweder gleich n ist, oder sich von n nur um Grössen erster Ordnung unterscheidet, ist der Nenner von $\mu_0^{(p)}$ ebenfalls von derselben Ordnung und also $\mu_0^{(p)}$ selbst von der nullten Ordnung. Im Allgemeinen hat man also ein elementäres Glied in diesem Falle.

Wenn dagegen der Nenner von $\mu_0^{(p)}$ genau Null wird, wenn also k_p einen solchen Werth hat, dass

$$\mu_0^p\,\{n^2 - k_p^2 - \beta\,(\alpha_1^{(p)} + \alpha_{-1}^{(p)})\}$$

identisch verschwindet, so hat das Integral ein sekuläres Glied. In diesem Falle haben dann die Coefficienten $\mu_i^{(p)}$ Werthe, welche das Gleichungssystem

$$\mu_i^{(p)}\,\{n^2 - (k_p + i\lambda)^2\} = \beta\,(\mu_{i-1}^{(p)} + \mu_{i+1}^{(p)})$$

auch für $i = o$ erfüllen. Da nun aber diese Gleichungen mit den (6) identisch sind, so muss, wenn ein sekuläres Glied, der Hinzufügung von Ψ_0 zufolge, vorhanden sein soll, Eins von den k_p genau gleich m sein. Dasselbe ist der Fall, wenn k_p die Form hat

$$k_p = i\lambda \pm n$$

wo i alle positiven und negativen Zahlenwerthe annehmen darf; denn alsdann wird der Faktor von $\mu_i^{(p)}$ in (11) gleich Null.

Nehmen wir anstatt (4) die etwas allgemeinere Gleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \{n^2 - 2\beta_1 \cos\lambda_1 t - 2\beta_2 \cos\lambda_2 t\}\,x = 0$$

wo wir der Kürze halber in den Argumenten die etwa noch hinzutretenden Constanten b_1 und b_2 weggelassen haben, so finden wir in ähnlicher Weise wie vorhin, dass ihr Integral die Form

$$x = \sum_{i_1, i_2} \mu_{i_1, i_2} \cos \{w + i_1\lambda_1 t + i_2\lambda_2 t\}$$

wo i_1 und i_2 alle positiven und negativen ganzen Zahlen bedeuten sollen, besitzen muss. Zur Bestimmung der μ_{i_1, i_2} und m haben wir die Formeln

$$\mu_{i_1, i_2} \{n^2 - (i_1\lambda_1 + i_2\lambda_2 + m)^2\} = \beta_1 (\mu_{i_1 - 1, i_2} + \mu_{i_1 + 1, i_2}) + \beta_2 (\mu_{i_1, i_2 - 1} + \mu_{i_1, i_2 + 1})$$

wo $\mu_{0,0}$ die eine Integrationskonstante ist; wenn β_2 beträchtlich kleiner als β_1 ist, lassen sich diese Gleichungen unschwer nach der Regula falsi auflösen.

Verstehen wir unter Ψ_1 einen Ausdruck von der Form

$$\Psi_1 = \beta_1 \cos (\lambda_1 t + b_1) + \beta_2 \cos (\lambda_2 t + b_2) + \ldots$$

so sieht man in derselben Weise dass das Integral von

$$(14) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + \{n^2 - 2\Psi_1\} x = 0$$

aus Cosinusgliedern zusammengesetzt ist, deren allgemeine Form

$$\mu_{i_1, i_2, \ldots} \cos \{w + i_1 (\lambda_1 t + b_1) + i_2 (\lambda_2 t + b_2) + \ldots\}$$

ist.

Bekanntlich giebt es eine Menge Substitutionen, durch welche die Differentialgleichung (14) auf eine Differentialgleichung erster Ordnung und auf eine Quadratur zurückgeführt werden kann. So z. B. giebt die Substitution

$$x = e^{\int \varphi dt}$$

zur Bestimmung von φ

$$\frac{d\varphi}{dt} + \varphi^2 = 2\Psi_1 - n^2$$

die nur durch Annäherungen zu lösen ist. Bequemer ist jedoch die anfangs dieser Schrift im Falle der Gleichung (2) benutzte Substitution

$$x = \eta \cos n\alpha; \quad \frac{dx}{dt} = - n\eta \sin n\alpha$$

Hieraus erhält man nämlich

$$\frac{d\alpha}{\partial t} = 1 - \frac{1}{n^2}\Psi_1 - \frac{1}{n^2}\Psi_1 \cos 2n\alpha$$

$$\frac{d\eta}{\eta} = -\frac{1}{n}\Psi_1 \sin 2n\alpha . dt$$

von denen die erste sich verhältnissmässig einfach annäherungsweise so integriren lässt, dass auch die analytische Form des Integrals zum Vorschein kommt. Die zweite führt darauf zu einer Quadratur.

Wenn indessen die Anzahl der Glieder in Ψ_1 sehr gross und die Konvergenz derselben nicht beträchtlich ist, und wenn ausserdem eine Menge verschiedener Argumente auftreten, so ist die anfangs auseinandergesetzte indirekte Methode ohne Zweifel allen anderen solchen vorzuziehen. Wegen der grossen Wichtigkeit der Differentialgleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \{n^2 - 2\Psi_1\}\, x = \Psi_0 \tag{15}$$

wo die Bedeutung von Ψ_1 und Ψ_0 oben angegeben worden ist, werde ich hier das Integral derselben bis auf Glieder vierter Ordnung in Bezug auf die Coefficienten in Ψ_0 und Ψ_1 anführen.

Wenn wir uns also erinnern, dass

$$\Psi_1 = \sum_{i=1}^{i=\infty} \beta_i \cos(\lambda_i t + b_i)$$

$$\Psi_0 = \sum_{i=1}^{i=\infty} \alpha_i \cos(k_i t + a_i)$$

wobei wir indessen der Kürze wegen die b_i und a_i in den Argumenten fortlassen, weil sie später ohne Weiteres hinzugefügt werden können, so giebt die *erste* Annäherung

$$x_1 = \eta_0 \cos w + \eta_0 \sum_i \frac{\beta_i}{n^2 - (n \pm \lambda_i)^2} \cos(w \pm \lambda_i t) +$$
$$+ \sum_i \frac{\alpha_i}{n^2 - k_i^2} \cos k_i t$$

wo $w = nt + \pi$ zu setzen ist, und η_0 und π die beiden Integrationskonstanten sind.

Die *zweite* Annäherung liefert

$$x_2 = \eta_0 \cos w + \eta_0 \sum_i \frac{\beta_i}{n^2 - (n \pm \lambda_i)^2} \cos(w \pm \lambda_i t) + \sum_i \frac{\alpha_i}{n^2 - k_i^2} \cos k_i t +$$
$$+ \eta_0 \sum_{i,j} \frac{\beta_i \beta_j}{\{n^2 - (n \pm \lambda_i)^2\}\{n^2 - (n \pm \lambda_i \pm \lambda_j)^2\}} \cos(w \pm \lambda_i t \pm \lambda_j t)$$
$$+ \sum_{i,j} \frac{\alpha_i \beta_j}{\{n^2 - k_i^2\}\{n^2 - (k_i \pm \lambda_j)^2\}} \cos(k_i t \pm \lambda_j t)$$

Hier ist

$$w = n\,(1 - \sigma)\,t + \pi$$

zu setzen, wo

$$\sigma = -\frac{1}{n^2}\sum \frac{\beta_i^2}{\lambda_i^2 - 4n^2}$$

Weiter ist zu bemerken, dass in den Argumenten

$$w + \lambda_i t - \lambda_j t$$

$$w - \lambda_i t + \lambda_j t$$

die Combination $i = j$ ausgeschlossen ist.

Da in der *dritten* Annäherung das Argument w keine Veränderung erleidet, so können wir schreiben

$$x_3 = x_2 - 2\sigma n\eta_0 \sum_i \frac{\beta_i\,(n \pm \lambda_i)}{\{n^2 - (n \pm \lambda_i)^2\}^i} \cos\,(w \pm \lambda_i t) +$$

$$+ \eta_0 \sum_{i,j,k} \frac{\beta_i\beta_j\beta_k \,.\, \cos\,(w \pm \lambda_i t \pm \lambda_j t \pm \lambda_k t)}{\{n^2 - (n \pm \lambda_i)^2\}\{n^2 - (n \pm \lambda_i \pm \lambda_j)^2\}\{n^2 - (n \pm \lambda_i \pm \lambda_j \pm \lambda_k)^2\}} +$$

$$+ \sum_{i,j,k} \frac{\alpha_i\beta_j\beta_k \cos\,(k_i t \pm \lambda_j t \pm \lambda_k t)}{\{n^2 - k_i^2\}\{n^2 - (k_i \pm \lambda_j)^2\}\{n^2 - (k_i \pm \lambda_j \pm \lambda_k)^2\}}$$

wo, wie erwähnt, σ den in der zweiten Annäherung gefundenen Werth unverändert behält.

Wenn wir uns vorstellen, dass die β_i und α_i mit der störenden Masse multiplicirt sind so giebt diese dritte Approximation im Allgemeinen alle Glieder bis zur dritten Ordnung inclusive in Bezug auf die störende Kraft. Ausnahmen finden statt, wenn die λ_i und k_i solche Werthe besitzen, dass die Integrationsdivisoren selbst von der ersten Ordnung werden, also wenn elementäre Glieder auftreten. In solchem Falle ist für diese Glieder die Approximation nur in den Gliedern zweiter Ordnung vollständig. Indessen dürfte es überflüssig sein die Genauigkeit hier weiter zu treiben.

Der Vollständigkeit halber werde ich zum Schluss zeigen, dass die oben angegebene Methode sich mit gleichem Erfolge auf ein System *simultaner* Differentialgleichungen anwenden lässt. Zu diesem Zweck ist es vollständig ausreichend die beiden Differentialgleichungen

$$(16)\qquad \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + n^2 x &= P\,(x, x') \\ \frac{d^2x'}{dt^2} + n'^2 x' &= P'(x, x') \end{aligned}$$

zu betrachten, wo $P(x,x')$ und $P'(x,x')$ Potenzreihen bedeuten sollen, die nach den positiven ganzen Potenzen der beiden Variabeln x und x' fortschreiten. Ueber die Coefficienten dieser

Reihen sowie über n^2 und n'^2 denken wir uns ähnliche Voraussetzungen gemacht, wie im Falle der Gleichung (2), damit wir versichert sein dürfen, dass die folgenden Entwickelungen, wenigstens innerhalb gewisser Grenzen der mit η_0 und η'_0 bezeichneten Integrationskonstanten, beständig konvergiren.

Den vorhin befolgten Principien gemäss, schreiben wir, indem wir zwei vorläufig unbestimmt gelassene Constanten ν und ν' einführen, anstatt (16)

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + n^2(1-\nu)x &= -n^2\nu x + P(x, x') \\ \frac{d^2x'}{dt^2} + n'^2(1-\nu')x' &= -n'^2\nu' x' + P'(x, x') \end{aligned} \tag{17}$$

Darauf haben wir von den Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + n^2(1-\nu)x &= 0 \\ \frac{d^2x'}{dt^2} + n'^2(1-\nu')x' &= 0 \end{aligned}$$

auszugehen. Ihre Integrale

$$\begin{aligned} x &= \eta_0 \cos w \\ x' &= \eta'_0 \cos w' \end{aligned}$$

wo

$$\begin{aligned} w &= n(1-\sigma)t + \pi \\ w' &= n'(1-\sigma')t + \pi' \\ 1-\sigma &= \sqrt{1-\nu} \\ 1-\sigma' &= \sqrt{1-\nu'} \end{aligned}$$

und η_0, η'_0, π und π' die vier Integrationskonstanten sind, werden in die rechten Seiten von (17) substituirt, worauf zwei Differentialgleichungen von folgender Form resultiren

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + n^2(1-\nu)x &= -n^2\nu\eta_0 \cos w + \sum_{i,i'} a_{i,i'} \cos(iw + i'w) \\ \frac{d^2x'}{dt^2} + n'^2(1-\nu')x' &= -n'^2\nu'\eta'_0 \cos w' + \sum_{i,i'} a'_{i,i'} \cos(iw + i'w') \end{aligned}$$

Hierauf sind die ν und ν' zu bestimmen, und zwar so, dass in der ersten Gleichung kein Glied in $\cos w$. in der zweiten kein Glied in $\cos w'$ vorkommt. Es muss also

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{a_{10}}{n^2\eta_0} \\ \nu' &= \frac{a'_{01}}{n'^2\eta'_0} \end{aligned}$$

genommen werden. Die Integration liefert dann folgendes in den Gliedern erster Ordnung in Bezug auf die Coefficienten in P und P' vollständige Integralsystem:

$$x = \eta_0 \cos w + \frac{1}{n^2} \sum_{i,\, i'} \frac{a_{i,\, i'}}{1 - \left\{ i + \frac{n'}{n} i' \right\}^2} \cos (iw + i'w')$$

$$x' = \eta'_0 \cos w' + \frac{1}{n'^2} \sum_{i,\, i'} \frac{a'_{i,\, i'}}{1 - \left\{ i' + \frac{n}{n'} i \right\}^2} \cos (iw + i'w')$$

Bei der Summation ist in dem ersten Ausdruck die Combination

$$i = 1, \quad i' = 0$$

in dem zweiten

$$i = 0, \quad i' = 1$$

auszuschliessen.

Die Glieder zweiter Ordnung ergeben sich darauf, indem man die rechten Seiten von (17) mit den eben gefundenen ersten Annäherungen von x und x' berechnet und ν und ν' in derselben Weise wie vorhin bestimmt, u. s. w. Man sieht daraus, dass die strengen Integrale nur die beiden Argumente w und w' enthalten.

Das nämliche Verfahren ist offenbar auch dann noch zu benutzen, wenn mehr als zwei simultane Differentialgleichungen derselben Form vorliegen, oder wenn die Coefficienten für die Produkte und Potenzen der x und x' in P und P' periodische Funktionen von t sind, deren Argumente als bekannt vorausgesetzt werden.

Auf solche Differentialgleichungen führen z. B. die bekannten Differentialgleichungen für die sekulären Aenderungen der elliptischen Bahnelemente — vgl. u. A. Leverrier, Annales de l'Observatorie de Paris, Tome II, pag. 110 —, wenn man die bisher vernachlässigten höheren Potenzen der Neigungen und Excentricitäten mit berücksichtigt.

———

Ouvrages astronomiques et géodésiques publiés dans la VII. Série des Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences:

T. I, № 1. **Struve, O.** Nouvelle détermination de la parallaxe annuelle des étoiles α Lyrae. et 61 Cygni. 1859. Pr. 45 K. = 1 Mk. 50 Pf.

№ 6. **Schubert, T. F.** Essai d'une détermination de la véritable figure de la terre. Avec 1 pl. 1859. Pr. 35 K. = 1 Mk. 20 Pf.

T. II, № 1. **Struve, O. u. Winnecke, Dr. A.** Pulkowaer Beobachtungen des grossen Cometen von 1858. Erste Abtheilung: Beobachtungen am Refractor, angestellt von O. Struve, Mitgliede der Akademie. Zweite Abtheilung: Beobachtungen am Heliometer nebst Untersuchungen über die Natur des Cometen von Dr. A. Winnecke, Adjunct-Astronomen der Hauptsternwarte. Mit 6 Taf. 1859. Pr. 1 R. 50 K. = 5 Mk.

№ 4. **Struve, O.** Beitrag zur Feststellung des Verhältnisses von Keppler zu Wallenstein. 1860. Pr. 30 K. = 1 Mk.

T. III, № 5. **Baeyer, J. J.** Ueber die Strahlenbrechung in der Atmosphäre. Avec 1 pl. lith. 1860. Pr. 65 K. = 2 Mk. 20 Pf.

T. IV, № 1. **Struve, O.** Beobachtung der totalen Sonnenfinsterniss vom 18. (6.) Juli 1860 in Pobes. Nach den Berichten der einzelnen Theilnehmer zusammengestellt. Mit 3 Taf. 1861. Pr. 85 K. = 2 Mk. 80 Pf.

T. V, № 4. **Struve, O.** Observations de la grande nébuleuse d'Orion, faites à Cazan et à Poulkova. Ie Partie: Mémoire de M. Liapounov sur les observations de Cazan. IIe Partie: O. Struve, Additions au mémoire de M. Liapounov et Observations de Poulkova. Avec 4 pl. lith. 1862. Pr. 1 R. 35 K. = 4 Mk. 50 Pf.

T. VI, № 7. **Winnecke, A.** Beobachtungen des Mars um die Zeit der Opposition 1862. 1863. Pr. 40 K. = 1 Mk. 30 Pf.

№ 11. **Sawitsch, A.** Opposition des Mars im Jahre 1862, beobachtet auf der kleinen akademischen Sternwarte zu St. Petersburg. 1863. Pr. 25 K. = 80 Pf.

T. VII, № 7. **Winnecke, A.** Pulkowaer Beobachtungen des hellen Cometen von 1862, nebst einigen Bemerkungen. Mit 6 lith. Taf. 1864. Pr. 90 K. = 3 Mk.

T. VIII, № 2. **Linsser, C.** Vier von De l'Isle beobachtete Plejaden-Bedeckungen, bearbeitet und mit Hansen's Mond-Tafeln verglichen. 1864. Pr. 25 K. = 80 Pf.

T. X, № 1. **Gyldén, H.** Untersuchungen über die Constitution der Atmosphäre und die Strahlenbrechung in derselben. Erste Abhandlung. 1866. Pr. 70 K. = 2 Mk. 30 Pf.

T. XII, № 4. **Gyldén, H.** Untersuchungen über die Constitution der Atmosphäre und die Strahlenbrechung in derselben. Zweite Abhandlung. 1868. Pr. 45 K. = 1 Mk. 50 Pf.

№ 5. **Struve, O.** Beobachtungen des grossen Cometen von 1861. Mit 1 lith. Taf. 1868. Pr. 50 K. = 1 Mk. 70 Pf.

T. XVI, №, 10. **Gyldén, H.** Studien auf dem Gebiete der Störungstheorie. I. Entwickelung einiger Verbindungen elliptischer Functionen. 1871. Pr. 1 R. 5 K. = 3 Mk. 50 Pf.

T. XVII, № 1. **Kortazzi, J.** Bestimmung der Längen-Differenz zwischen Pulkowa, Helsingfors, Åbo, Lowisa und Wiborg. 1871. Pr. 60 K. = 2 Mk.

№ 10. **Fuss, V. u. Nyrén, M.** Bestimmung der Längen-Differenz zwischen den Sternwarten Stockholm und Helsingfors, ausgeführt im Sommer 1870. 1871. Pr. 35 K. = 1 Mk. 20 Pf.

T. XVIII, № 3. **Fuss, V.** Beobachtungen und Untersuchungen über die astronomische Strahlenbrechung in der Nähe des Horizontes. 1872. Pr. 40 K. = 1 Mk. 30 Pf.

№ 5. **Asten, E. v.** Resultate aus Otto von Struve's Beobachtungen der Uranustrabanten. 1872. Pr. 25 K. = 80 Pf.

№ 10. **Asten, E. v.** Untersuchungen über die Theorie des Encke'schen Cometen. I. Berechnung eines wichtigen Theiles der absoluten Jupitersstörungen des Encke'schen Cometen. 1872. Pr. 65 K. = 2 Mk. 20 Pf.

T. XIX, № 2. **Nyrén, M.** Bestimmung der Nutation der Erdachse. 1872. Pr. 55 K. = 1 Mk. 80 Pf.

№ 10. **Nyrén, M.** Die Polhöhe von Pulkowa. 1873. Pr. 35 K. = 1 Mk. 20 Pf.

T. XXIII, № 3. **Nyrén, M.** Das Aequinoctium für 1865,0, abgeleitet aus den am Passageninstrumente und am Verticalkreise in den Jahren 1861 — 70 in Pulkowa angestellten Sonnenbeobachtungen. 1876. Pr. 30 K. = 1 Mk.

T. XXVI, № 2. **Asten, E. v.** Untersuchungen über die Theorie des Encke'schen Cometen. II. Resultate aus den Erscheinungen 1819—1875. 1878. Pr. 1 R. = 3 Mk. 30 Pf.

№ 4. **Hasselberg, Dr. B.** Studien auf dem Gebiete der Absorbtionsspectralanalyse. Avec 4 pl. 1878. Pr. 1 R. = 3 Mk. 30 Pf.

T. XXVII, № 1. **Hasselberg, Dr. B.** Ueber das durch electrische Erregung erzeugte Leuchten der Gaze bei niedriger Temperatur. 1879. Pr. 25 K. = 80 Pf.

№ 11. **Struve, O.** Études sur le mouvement relatif des deux étoiles du système de 61 Cygni. 1880. Pr. 35 K. = 1 Mk. 20 Pf.

T. XXVIII, № 6. **Backlund, O.** Zur Theorie des Encke'schen Cometen. 1881 Pr. 70 K. = 2 Mk. 30 Pf.

T. XXX, № 4. **Lindemann, Ed.** Zur Beurtheilung der Veränderlichkeit rother Sterne. 1882. Pr. 15 K. = 50 Pf.

№ 7. **Hasselberg, Dr. B.** Untersuchungen über das zweite Spectrum des Wasserstoffs. Avec 1 pl. 1882. Pr. 30 K. = 1 Mk.

№ 8. **Struve, Hermann.** Ueber den Einfluss der Diffraction an Fernröhren auf Lichtscheiben. 1882. Pr. 90 K. = 3 Mk.

T. XXXI, № 1. **Struve, Hermann.** Zur Theorie der Talbot'schen Linien. 1883. Pr. 15 K. = 50 Pf.

№ 2. **Struve, Ludwig.** Resultate aus den in Pulkowa angestellten Vergleichungen von Procyon mit benachbarten Sternen. 1883. Pr. 45 K. = 1 Mk. 50 Pf.

Imprimé par ordre de l'Académie Impériale des sciences. Mai, 1883. C. Vessélofski, Secrétaire perpétuel.

Imprimerie de l'Académie Impériale des sciences. (Wass.-Ostrow., 9 ligne, № 12.)

MÉMOIRES
DE
L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES DE ST.-PÉTERSBOURG, VII[e] SÉRIE.
Tome XXXI, N° 5.

MISCELLANEA SILURICA III.

I. NACHTRAG ZUR MONOGRAPHIE DER

RUSSISCHEN SILURISCHEN LEPERDITIEN.

II.

DIE CRUSTACEENFAUNA DER EURYPTERENSCHICHTEN

VON ROOTZIKÜLL AUF OESEL.

VON

Mag. **Fr. Schmidt,**
Mitgliede der Akademie.

Mit IX Tafeln.

(Lu le 19 janvier 1882.)

St.-PÉTERSBOURG, 1883.
Commissionnaires de l'Académie Impériale des sciences:

à St.-Pétersbourg:	à Riga:	à Leipzig:
MM. Eggers et C[ie] et J. Glasounof;	M. N. Kymmel;	Voss' Sortiment (G. Haessel).

Prix: 2 Rbl. = 6 Mk. 70 Pf.

MÉMOIRES
DE
L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES DE ST.-PÉTERSBOURG, VIIE SÉRIE.
Tome XXXI, N° 5.

MISCELLANEA SILURICA III.

I. NACHTRAG ZUR MONOGRAPHIE DER

RUSSISCHEN SILURISCHEN LEPERDITIEN.

II.

DIE CRUSTACEENFAUNA DER EURYPTERENSCHICHTEN

VON ROOTZIKÜLL AUF OESEL.

VON

Mag. **Fr. Schmidt,**
Mitgliede der Akademie.

Mit IX Tafeln.

(*Lu le 19 janvier 1882.*)

St.-PÉTERSBOURG, 1883.
Commissionnaires de l'Académie Impériale des sciences:

à St.-Pétersbourg: MM. Eggers et Cie et J. Glasounof;
à Riga: M. N. Kymmel;
à Leipzig: Voss' Sortiment (G. Haessel).

Prix: 2 Rbl. = 6 Mk. 70 Pf.

Imprimé par ordre de l'Académie Impériale des sciences.

Mai 1883. C. Vessélofski, Secrétaire perpétuel.

Imprimerie de l'Académie Impériale des sciences.
(Vass.-Ostr., 9 ligne, № 12.)

Vorwort.

Das Nöthige über Veranlassung und Inhalt der vorliegenden Arbeit ist in der Einleitung gesagt. Was mich veranlasst, jetzt nach Beendigung des Druckes, noch eine Vorrede hinzuzufügen, hat andere Gründe. Die Publikation der Arbeit hat sich hinausgezogen, ähnlich wie es bei meiner Revision unsrer ostbaltischen Trilobiten der Fall war. Die Arbeit wurde im Frühjahr 1882 der Akademie vorgestellt. Anfangs waren 6 Tafeln veranschlagt; diese waren gezeichnet und auch schon 5 Bogen Text gedruckt, als ich mich entschloss im Sommer 1882 noch eine Fahrt nach Rootziküll auf Oesel zu machen, um eine nochmalige Nachlese zu halten, die nach vollständiger Durcharbeitung des vorhandenen Materials reicher ausfallen musste als die frühern Sammlungen. Das Resultat der letzten Reise enthalten die neu hinzugefügten Tafeln 3 *a*, 5 *a* und 7, die grösstentheils neue Figuren, z. Th. aber auch Verbesserungen von schon früher dargestellten enthalten. Wenn nun jetzt auch nicht alles Zusammengehörige auf den Tafeln sich beisammen findet, so hat doch durch die Vermehrung der zur Anschauung gebrachten Stücke die ganze Arbeit hoffentlich gewonnen. Besonders weise ich auf die neue Restauration des *Eurypterus* hin. Auch im Text sind Nachträge nothwendig geworden. Der Abschnitt über die *Hemiaspiden* war mit dem 5ten Bogen schon im Frühjahr 1882 grösstentheils gedruckt; die später gefundenen Stücke sind als Nachtrag im 6ten Bogen besprochen. Zugleich habe ich hier noch einiges Allgemeine über die systematische Stellung der *Hemiaspiden* und ihr Verhältniss zu den übrigen Gruppen der *Poecilopoden* gesagt, und versucht die vier Hauptgruppen dieser Ordnung: die *Trilobiten*, *Hemiaspiden*, *Eurypteriden* und *Limuliden* übersichtlich zu charakterisiren. Die Kenntniss der Gruppe der *Eurypteriden* konnte durch die Aufstellung einer neuen *Eurypterus*-Art, *E. laticeps* und einer neuen Varietät unsres *E. Fischeri*, var. *rectangularis* erweitert werden.

Ebenso konnten Hinweise darauf gemacht werden, dass wahrscheinlich auch die Gattung *Pterygotus* in mehr als einer Art bei uns vertreten ist.

Der letzte Abschnitt der Crustaceenfauna unsrer Eurypterusschichten, die Gattung *Ceratiocaris*, von der ich früher bei uns nur die Schwanzstacheln kannte und in der Einleitung daher auch allein erwähnte, hat im verflossenen Sommer eine wichtige Vervollständigung erhalten durch das Rückenschild, das mein diesmaliger Reisegefährte, Dr. F. Nötling aus Königsberg, in Rootziküll entdeckte und mir freundlichst überliess. Als Zeichen meiner Erkenntlichkeit erlaube ich mir daher diese Art, die sich als neu erwiesen, *Ceratiocaris Nötlingi* zu benennen.

Einige weitere Nachträge zu den *Leperditien*, speciell zu den von der Insel Waigatsch durch Nordenskjöld mitgebrachten, findet man am Schluss der Arbeit; ebenso Notizen über die Lagerungsverhältnisse und das geologische Alter der Uralischen Leperditien, nach neuern Untersuchungen.

Wenn ich im Text wiederholt Veranlassung genommen habe mich gegenüber der grossen Monographie von Dr. H. Woodward über die fossilen *Merostomen* kritisch zu verhalten, so möge er mir das nicht übel nehmen. Ich muss hier nochmals dankend hervorheben, dass seine Monographie nicht bloss die Veranlassung gewesen ist, dass ich mein Eurypterenmaterial von Neuem durcharbeitete, sondern die jetzige, in mancher Beziehung vervollständigte Darstellung des *Pterygotus* wäre auch überhaupt nicht zu Stande gekommen, wenn Woodward's Arbeit mir nicht die Grundlage geliefert hätte, auf der ich nachher weiter bauen konnte.

Mai, 1883.

EINLEITUNG.

Die vorliegende dritte Nummer meiner *Miscellanea silurica*[1]) erscheint als Zwischenarbeit während der Durchführung meiner vermuthlich noch Jahre dauernden Monographie unserer ostbaltischen silurischen Trilobiten, von der soeben die erste Abtheilung[2]) erschienen ist. Ihre Herausgabe wurde wesentlich durch meine Beziehungen zu den Englischen Fachgenossen veranlasst.

Die erste Abtheilung der gegenwärtigen Arbeit enthält einen Nachtrag zu meiner im Jahre 1873 erschienenen Bearbeitung der russischen silurischen Leperditien.

Im verflossenen Herbst erhielt ich einen Artikel von T. Rupert Jones zugeschickt (Notes on the Palaeozoic bivalved Entomostraca № 12. Some Cambrian and Silurian Leperditiae and Primitiae, in Annals and magazine of Natural History, November 1881 p. 332—350), in welchem der geehrte Verfasser sich wiederholt auf meine erwähnte frühere Arbeit bezieht, und vielfach Ansichten über einzelne Arten aufstellt, die den von mir vertretenen zuwiderlaufen. Ich schrieb ihm einen ausführlichen Brief, in dem ich meine früher ausgesprochene Meinung in Bezug auf die behandelten Leperditien und deren geologisches Alter vertrat und wurde dadurch zugleich zur Abfassung des vorliegenden Nachtrags angeregt, zu dem die Materialien schon lange bereit lagen. Durch die freundlich eingehende Weise, mit welcher Herr Prof. Rupert Jones meine kritischen Bemerkungen aufgenommen und in ihrer Berechtigung anerkannt hat (sie sind von ihm mitgetheilt im Märzheft 1882 der Annals of Nat. History p. 168 — 172), ist dem polemischen Theil meiner Arbeit die Spitze abgebrochen und ich begnüge mich mit der Mittheilung neu angesammelter Thatsachen und Beobachtungen. Freilich habe ich seitdem, nach eingehen-

1) Miscellanea silurica I. Ueber die Russischen Silurischen Leperditien. Mém. de l'Acad. des sc., Sér. VII, T. 21, № 2, 1873. Miscellanea silurica II. Neue und wenig bekannte baltisch-silurische Petrefacten. Mém. Sér. VII, T. 21, № 11, 1874.

2) Revision der ostbaltischen Trilobiten. Abtheilung I. Phacopidae, Cheiruridae und Encrinuridae. Mém. de l'Académie, Sér. VII, T. 30, № 1, 1882.

dem erneutem Studium unseres ganzen Leperditienmaterials, wiederholt Gelegenheit gehabt, meine früheren Ansichten zu berichtigen, und bin daher nicht in der Lage, meine in dem erwähnten Briefe an Rupert Jones ausgesprochenen Ansichten durchweg aufrecht zu erhalten.

In meinem vorliegenden Nachtrag gedenke ich nun zuerst eine Uebersicht unserer ostbaltischen silurischen Leperditien nach dem jetzigen Stande unserer Kenntniss zu geben, und dann noch ein paar andere russische silurische Leperditien zu behandeln, namentlich unsere älteste russische Art, *L.* (*Cypridina*) *marginata* Keys., die ich gegenwärtig nach neu hinzugekommenen Materialien vollständiger beschreiben kann und ein paar neue Arten aus dem Uralgebiet (im weiteren Sinne), die *L. Mölleri* aus dem Ober-Silur oder Hercyn des südlichen Ural und die *L. Nordenskjöldi* aus dem nämlichen Niveau von der Insel Waigatsch (von Nordenskjöld's Jenisseiexpedition).

Die zweite Abtheilung der vorliegenden Arbeit enthält eine Darstellung der interessanten und eigenthümlichen Crustaceenfauna[1]) der Eurypterusschichten von Rootziküll auf Oesel. Unser Oeselscher *Eurypterus*, den wir jetzt wohl richtig *E. Fischeri* Eichw. nennen, und nicht mehr wie früher *E. remipes* Dek., wurde schon im Jahre 1858 von Dr. J. Nieszkowski im Archiv für Naturkunde Liv.-, Est- und Kurlands Bd. II, p. 299—344 ausführlich beschrieben und auf zwei Octavtafeln in grösstentheils restaurirten Figuren abgebildet. In einem Artikel des Quarterly Journal vol. 19, p. 78 (1863) spricht J. W. Salter mit grosser Anerkennung von Nieszkowski's «admirable paper». Weniger günstig wird Nieszkowski's Arbeit von Dr. H. Woodward in seinem Monograph of the british fossil Crustacea of the order Merostomata (Palaeontolographical society, vol. XIX, 1865) p. 27 beurtheilt, wo es heisst: «Dr. Nieszkowski gives restaurations of the upper and under side of *Eurypterus*, and in the latter figure he shows the appendages of the mouth in situ, and three thoracic plates for the under side of the body. We think this possibly arises from a misconception of the medial appendage, but shall refer to this paper again when treating of the genus *Eurypterus*».

Das Letztere ist nicht geschehen, auch spricht Nieszkowski nicht von 3 freien Thoraxplatten, sondern von 6, die er auch abbildet. Wir müssen hier bedauern, dass Herr Dr. Woodward sich mit einem Blick auf die Tafeln begnügt, und den Text nicht genau nachgelesen hat. Dass bei Nieszkowski eine «misconception» vorgelegen hat, indem er den dreigliedrigen Mittelanhang der ersten Thoraxplatte auf drei Platten vertheilt, muss auch ich zugeben, ebenso hat er fälschlich 6 freie Thoraxplatten angenommen statt 5, wie sie in der That vorhanden sind und auf meinen jetzigen Tafeln zur Darstellung kommen, die hoffentlich allen Ansprüchen genügen werden.

---

1) Die Fischreste dieser *Eurypterus*-Schichten habe ich schon früher einmal zum Gegenstand einer Abhandlung gemacht. S. «Ueber *Thyestes verrucosus* Eichw. und *Cephalaspis Schrenckii* m., in Verhandl. der Kais. Mineralog. Gesellsch. neue Serie I. (1866).

Dr. Woodward legt seiner Beschreibung des *Eurypterus* ausschliesslich die Bearbeitung von J. Hall (Palaeontology of New York III p. 382—419*, pl. 80—84a) zu Grunde, die allerdings insofern den Vorzug vor der Nieszkowskischen verdient, als das von ihm verwerthete Material durch zahlreiche und naturgetreue Zeichnungen vollständig zur Beurtheilung vorliegt. Gerade dieses vollständig zur Anschauung gebrachte Material, ebenso wie die unvollständigen Restaurationen (die Woodward als Muster aufführt, und doch kennen sowohl Hall als er nur eine freie Thoraxplatte) zeigen uns aber, über ein wie sehr viel reicheres Material und über wie viel besser erhaltene Exemplare Nieszkowski verfügte, dessen Darstellung freilich im Einzelnen nicht die Genauigkeit zeigt, wie die Hall'sche.

Man wird es natürlich finden, dass ich so warm für die Nieszkowski'sche Arbeit eintrete, wenn ich darauf hinweise, dass ich damals, vor 23 Jahren, mich aufs Lebhafteste an der erwähnten Arbeit betheiligt habe, sowohl beim Herbeischaffen des Materials, als bei der Untersuchung der Details. Auch die vorgekommenen Fehler und «misconceptions» habe ich mit zu verantworten, was ich gern eingestehen will, um es gegenwärtig besser zu machen. Wenn die vorliegende neue Bearbeitung unseres *Eurypterus*, wie ich hoffe, den Beifall der Fachgenossen erlangen wird, so haben sie es, wie ich gern gestehe, Dr. Woodward und seiner abfälligen Erwähnung der Nieszkowski'schen Arbeit zu danken, dass ich schon jetzt an diese neue Bearbeitung gegangen bin.

Zusammen mit dem *Eurypterus* kommt ein grosser *Pterygotus* vor, der mir dem *P. gigas* Salt. am nächsten zu stehen scheint. Schon Eichwald (1854) und Nieszkowski (1858) hatten Theile dieses Thiers, Leibesglieder und das Metastoma, erwähnt und beschrieben; seitdem hat sich ein ziemlich reichhaltiges, wenn auch noch nicht vollständiges Material angesammelt, das jetzt zum ersten Mal im Zusammenhange bearbeitet werden soll.

Eine besondere Gruppe von Crustaceen von dem nämlichen Fundort hatten Eichwald und Nieszkowski unter den Namen *Bunodes* Eichw., *Exapinurus* Nieszk. und *Pseudoniscus* Nieszk. beschrieben. Bei meiner Anwesenheit im British Museum im Sommer 1875 demonstrirte mir Dr. H. Woodward freundlichst die schon früher von ihm hervorgehobene nahe Verwandtschaft dieser Gattungen mit *Hemiaspis* Woodw. und forderte mich auf, das neuerdings bei uns zusammengebrachte vollständigere Material aus diesen Gattungen zu verarbeiten, was weiter unten im Text geschehen soll. Dort wird man auch finden, dass ich mich gezwungen sehe, die oben genannten Gattungen (von denen *Exapinurus* mit *Bunodes* vereint wird) und *Hemiaspis* zu einer besonderen Gruppe der Hemiaspiden zu verbinden, die zwischen den Eurypteriden und den Trilobiten in der Mitte steht.

Das letzte Glied der von mir behandelten Crustaceenfauna von Rootziküll bilden endlich ein Paar Schwanzstacheln (zu drei gestellt), die zur Gattung *Ceratiocaris* M. Coy zu rechnen sind.

I. Nachtrag zu den russischen silurischen Leperditien.

A. Uebersicht der ostbaltischen silurischen Leperditien.

Seit dem Erscheinen meiner oben (in der Einleitung) erwähnten früheren Arbeit über unsere Leperditien sind besonders zwei Arbeiten zu erwähnen, in denen einschlagende Arten zur Besprechung kommen: der schon Eingangs erwähnte Artikel von T. Rupert Jones und L. Kolmodin's «Ostracoda Silurica Gotlandiae» in Öfversigt af kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar, Stockholm 1879, p. 133—135 c. T. XIX. Kolmodin ändert meinen Namen *L. Hisingeri* in *L. Schmidti* um, weil der Name *Cythere Hisingeri* Münster schon auf die nahe verwandte *L. baltica* His. angewandt sei. Nun hat aber schon Jones (Ann. and magaz. 3. Ser. Vol. 15, p. 408, pl. 20, F. 12) nachgewiesen, dass *Cythere Hisingeri* Münst. eine carbonische *Bairdia* sei; mein Name *Leperditia Hisingeri* kann also ruhig fortbestehen, um so mehr als auch schon eine andere *Leperd. Schmidti* aufgestellt ist, von G. Romanowski, in dessen Materialien zur Geologie von Turkestan. Petersburg 1880, p. 71, T. II, F. 1, 2.

Kolmodin hat ferner *L. phaseolus* His. (gegenüber meiner *Angelini*) wiederhergestellt und das Hisinger'sche Originalexemplar in seiner F. 4 genau abgebildet. Da er nun ganz wie Hisinger l. c. p. 134 sowohl Wisby als die zur Südgotlandschen Schichtenabtheilung gehörigen Fundorte Oestergarn und Lau anführt, so interessirte es mich zu erfahren, wo das Hisinger'sche Originalexemplar F. 4 herstamme. Prof. Lindström theilt mir nun mit, dass in der Hisinger'schen Sammlung drei Exemplare liegen, augenscheinnicht alle von dem nämlichen Fundorte; es liegt aber für alle drei nur eine Etikette, von Hisinger's Hand geschrieben «Strandem vid Wisby» vor. Nach allen meinen Beobachtungen über das Vorkommen der obersilurischen Leperditien, die durchaus dafür sprechen, dass die Arten dieser Gattung immer an bestimmte Horizonte gebunden sind, konnte ich mich schwer dazu entschliessen zuzugeben, dass *Lep. phaseolus* in einer und derselben Form durch alle Gotländer Horizonte vorkommen. Ich kann also nur annehmen, dass das Hisinger'sche Originalexemplar von Hoburg in Süd-Gotland (im Text bei Hisinger heisst

es: «in strato saxi arenacei Gotlandiae at Hoburg; etiam ad littora maris circa Visbyam rejecta») aus Versehen mit den nur hinzugezogenen Exemplaren von Wisby zusammengerathen ist, um so mehr, als man neuerdings durchaus kein Exemplar der südgotländischen *L. phaseolus* (*L. Angelini* m.) bei Wisby gefunden hat. Ich versuchte noch den Ausweg, ob die F. 4 bei Kolmodin nicht vielleicht von F. 5 (aus Lau), die genau meiner *Angelini* entspricht, getrennt werden und als eine abweichende Form von *L. Hisingeri* angesehen werden könnte, die bei Wisby gemein ist und bei der, wenigstens auf dem Steinkern, auch Andeutungen des Augenflecks vorkommen, aber Lindström, dem die genannten Exemplare vorliegen, lässt eine solche Annahme durchaus nicht zu und bestätigt wiederholt die völlige Identität des Hisinger'schen Originalexemplars mit der in S.-Gotland, namentlich bei Oestergarn und Lau, vorkommenden Form, die ich als Typus meiner *L. Angelini* aufgestellt hatte, weil ich mich gezwungen sah *L. phaseolus* His. als eine collective Art anzusehen. Eher ist er geneigt zuzugeben,, dass das mehrerwähnte Hisinger'sche Original gar nicht von Wisby, sondern (Hisinger's Text entsprechend) aus Süd-Gotland stamme, mit welcher Auffassung ich mich also wohl einstweilen zufrieden geben und in die Wiederherstellung der Hisinger'schen Art (mit Ausschluss der hinzugezogenen Wisbyschen Exemplare) willigen muss.

Leider hat Kolmodin in seiner neuen Arbeit über die «Ostracoda silurica Gotlandiae» überhaupt bei Angabe der Fundorte nicht mehr die von Lindström und mir aufgestellten Schichtenabtheilungen des Gotländer Obersilur berücksichtigt. Es scheint fast als ob sie an Ort und Stelle wieder zweifelhaft geworden seien. Da ich bei Aufstellung dieser Schichtenabtheilungen persönlich stark betheiligt bin und sie auch vollkommen mit den von mir für Estland und Oesel festgestellten Abtheilungen in Einklang stehen, werde ich gern jede Gelegenheit zu benutzen suchen, ihr neue Anerkennung zu verschaffen.

Wie schon in der Einleitung angedeutet, unterlassen wir es jetzt ausführlicher kritisch auf den Artikel von Rupert Jones im Novemberheft 1881 der Annals of Natural History einzugehen, da diese Angelegenheit schon durch den oben erwähnten Artikel von Jones und mir im Märzheft 1882 der Annals etc. erledigt ist. Bei den einzelnen Arten werden wir noch wiederholt auf die beiden genannten Artikel zurückzukommen haben.

Noch muss ich hier der unpublicirten Tafel von Angelin's Palaeontologia scandinavica gedenken, die in 35 Figuren eine grosse Menge silurischer Ostracaden darstellt. Prof. Lindström schreibt mir, dass die Publikation dieser Tafel (er hat bekanntlich manche andere Tafeln aus Angelin's Nachlass herausgegeben) unmöglich ist, weil sich kein Text dazu in Angelin's Nachlass findet und auch die Originalstücke zu den Figuren grösstentheils in der Sammlung nicht nachzuweisen sind. Da nun aber die erwähnte Tafel in den Händen mancher Fachgenossen sein dürfte, denen Angelin sie, wie ja auch mir, noch bei seinen Lebzeiten mitgetheilt hat, so werde ich mir erlauben, sie vorkommenden Falls zu citiren.

Von unseren im Folgenden zu behandelnden Leperditien stellt F. 1 *L. Hisingeri* m. vor,

F. 2 die ächte *baltica* His., die also auch Angelin schon unterschieden hat, F. 3 *L. phaseolus* His., wie mir Angelin selbst bestätigt hat und F. 6 und 7 wahrscheinlich *L. Eichwaldi* m., die übrigens auf Gotland (wo sie zu erwarten wäre) von Kolmodin nicht aufgeführt wird.

Im Folgenden gebe ich nun, wie angekündigt, eine Uebersicht unserer ostbaltischen obersilurischen Leperditien, da wir keine untersilurischen Leperditien haben und *Isochilina punctata* Eichw.[1]), die man etwa als solche aufführen könnte, von Kutorga an einer Stelle gesammelt ist, die später nicht wieder aufgefunden und näher auf ihren geologischen Horizont untersucht werden konnte. Auf den zahlreichen Handstücken von der ursprünglichen Localität Saretschje am Oredesch unweit Gatschina, die sich von Kutorga's Hand vertheilt in verschiedenen Museen und Privatsammlungen finden, kommt keine Spur von anderen Petrefakten vor, die zur Altersbestimmung dienen könnten. Die angegebene Lokalität liegt an der Gränze der untersilurischen Jeweschen Schicht und der hier anstehenden mitteldevonischen Formation, so dass wir nicht einmal sicher sind, ob wir ein silurisches Fossil vor uns haben.

Als Material zu meiner Arbeit haben mir, wie früher, alle in unseren Museen, in Dorpat, Reval und hier vorhandenen anstehend gefundenen Exemplare gedient, ausserdem noch eine in Liv- und Curland von Prof. Grewingk zusammengebrachte Geschiebesammlung und eine dergleichen gesammelt in Ostpreussen von Herrn Mascke, jetzt in Göttingen, die mir übrigens gegenwärtig nicht mehr vorliegt.

Uebersicht der unterscheidenden Kennzeichen.

Zur Erläuterung schicke ich voraus, dass ich mich an die von Rupert Jones eingeführte Terminologie halte und also von Länge (nicht Breite, wie in der früheren Arbeit), Höhe (vom Ventral- zum Schlossrand) und Convexität oder Wölbung der Schaale spreche. Der nie fehlende Augentuberkel liegt am vorderen Ende. Die rechte Schaale ist die übergreifende, grössere; die linke, kleinere, zeigt einen Umschlag; die Länge messe ich vom Vorsprung des Vorder- zu dem des Hinterrandes, also in einer Linie, die zum Schlossrande mehr oder weniger geneigt ist.

1. Höchste Wölbung beider Schaalen längs dem Bauchrande; die rechte Schaale greift nur wenig über die linke, die daher nur in der Mitte ihres Bruchrandes einen Umschlag zeigt. Am Bauchrande der rechten Schaale beiderseits ein Porus. Kein Augenfleck; nur ein Mittelfleck vorhanden. *L. grandis* Schrenck (in K.)

Höchste Wölbung beider Schalen in deren Mitte oder etwas hinter der Mitte. Umschlag der linken Schaale längs dem ganzen Bauchrande. Keinerlei Poren am Bauchrande der rechten Schaale. 2.

1) Siehe meine Arbeit S. 22, F. 36, 37.

2. Umschlag der linken Schaale deutlich fein quergerippt. Form der Schaale oblong. Bauchwand ziemlich gleichmässig gerundet, daher die Breite nach hinten nur wenig zunehmend. Vorder- und Hinterrand steil ansteigend und wenig vorspringend. Schlossrand länger als die Höhe. Oberfläche glatt, mit deutlichen eingestochenen Punkten.

L. baltica His. (I).

Umschlag der linken Schaale glatt, ohne Querrippen. 3.

3. Schaale in der Mitte (oder gleich hinter der Mitte) am höchsten; von hier beiderseits abfallend; nach vorn stärker, nach hinten schwächer. 4.

Schaale nach hinten zu gleichmässig an Höhe zunehmend. 5.

4. Bauchrand regelmässig gekrümmt ohne Vorsprung. Form der Schaale oblong, vorn und hinten vorspringend; der Hinterrand unter sehr stumpfem Winkel ansteigend. Augenfleck deutlich, nach dem Bauchrande unter spitzem Winkel vorgezogen und vom Mittelfleck durch einen schmalen Zwischenraum getrennt. *L. phaseolus* His. (K).

Bauchrand der rechten Schaale in der Mitte mit stumpfem Vorsprung. Vorder- und Hinterrand steil ansteigend, wenig vorspringend. Kein Augenfleck.

L. Eichwaldi F. Schm. (I).

5. Deutliche Vertikalfurche hinter dem Auge. Schaale länglich eiförmig. Schlossrand länger als die Höhe. Vorder- und Hinterrand mit stark ausgeprägtem Randsaum. Hinterrand unter sehr stumpfem Winkel ansteigend. *L. Keyserlingi* F. Schm. (G_3).

Keinerlei Furche hinter dem Auge. Schlossrand der rechten Schaale eben so lang oder kürzer als die Höhe. Hinterrand steil ansteigend. 6.

6. Eiförmig. Schlossrand ebenso lang oder kaum kürzer als die Höhe der rechten Schaale und meist etwas länger als die Höhe der linken Schaale. Vorderrand deutlich vorspringend. Vorn und hinten oft deutlicher abgeflachter Randsaum.

L. Hisingeri F. Schm. (G.).

Verkürzt eiförmig. Schlossrand kürzer (bis $1/4$) als die Höhe der rechten Schaale und ebenso lang als die Höhe der linken. Vorderrand nur schwach vorspringend. Randsaum fehlt meist. *L. Hisingeri* var. *abbreviata* F. Schm. (H.).

Verticale Verbreitung der Arten.

Die Buchstaben A—K entsprechen meiner neuen Schichteneintheilung des ostbaltischen Silur, wie sie auf Prof. Grewingk's neuer geologischen Karte von Est- Liv- und Kurland dargestellt und in der Einleitung zu meiner Revision der ostbaltischen Trilobiten näher entwickelt ist.

	G	H	I	K	Vorkommen auswärts.
1. *Leperditia grandis* Schrenck	—	—	—	+	Oestergarn auf Gotland, Geschiebe in Preussen
2. — *phaseolus* His	—	—	—	+	S. Gotland, Schonen, Christianiabecken, England, Geschiebe in N.-Deutschland.
3. — *Eichwaldi* F. Schm.	—	—	+	—	Gotland?
4. — *baltica* His	—	—	+	—	Mittel-Gotland, Christianiabecken, Gesch. in N.-Deutschland.
5. — *Keyserlingi* F. Schm.	+	—	—	—	England, Llandovery?
6. — *Hisingeri* F. Schm.	+	—	—	—	Wisby-Gruppe auf Gotland, Insel Malmö im Christianiabecken.
7. — *Hisingeri* var. *abbreviata* F. Schm.	—	+	—	—	
	2	1	2	2	

Von den angeführten 7 Arten und Varietäten sind nur 6 anstehend bei uns gefunden. Die ächte *L. baltica* His., obgleich auf der gegenüberliegenden Ostküste von Gotland bei Slite und auf Fårö nicht selten, ist auf Oesel, wo wir sie etwa in den Panks von Taggamois zu erwarten hätten, anstehend nicht gefunden, wohl aber in Geschieben im westlichen Kurland durch Prof. Grewingk. In der folgenden Aufzählung werde ich die Litteraturangaben und Synonyma, soweit sie schon in meiner früheren Arbeit über die russischen silurischen Leperditien enthalten sind, nicht wiederholen, sondern einfach auf diese Arbeit verweisen.

Leperditia grandis Schrenck.

1873. *Leperditia grandis* Schrenck in F. Schmidt, russ. silur. Leperditien. S. 10, F. 3—6.
1879. — — — Kolmodin, Ostracoda silurica Gotlandiae in Vetensk. akad. förhandling. p. 135.
1882. — — — F. Schmidt und Rupert Jones, on some Silurian Leperditiae in Annals and magaz. of Natural history March, p. 169.

Ueber diese Art kann ich keine neuen Beobachtungen mittheilen. Kolmodin hat die Art auf Gotland nicht selbst gefunden, sondern nur nach meinen Angaben erwähnt. Rup. Jones hat seine in seinem früheren Artikel (Annals and Magaz. Nov. 1881. p. 347) ausgesprochenen Zweifel über die Zugehörigkeit unserer Art zu *Leperditia* (er war geneigt, sie, wie früher Barrande, zu *Isochilina* zu bringen) in seinem oben citirten späteren Artikel (März 1882) in Folge meiner Erklärungen zurückgenommen. Wir werden im Folgenden zwei Arten von der Insel Waigatsch kennen lernen, *L. Nordenskjöldi* und *Waigatschensis*, die mit unserer Art zusammen einer besonderen Gruppe innerhalb der Gattung *Leperditia* zugehören, die sich durch die starke Anschwellung der Schaalen nach dem Bauchrande zu und durch Poren auszeichnet, von denen je eine jederseits am Bauchrande der rechten Schaale, wo diese sich über die linke schlägt, auftritt.

Vorkommen. In der obersten öselschen Schicht (K) in einem Steinbruche im Walde nördlich von Lümmanda nicht häufig, und in der Fortsetzung dieser Schicht bei Oestergarn auf Gotland, wo ich 1858 ein paar Exemplare (durchweg kleiner als die öselschen) gefunden habe. Ausserdem ist die Art noch in ostpreussischen silurischen Geschieben gefunden worden. Ein Exemplar, von Lyck, hat F. Römer als *L. gigantea* beschrieben (s. meine frühere Arbeit); zwei andere, in der Gegend von Königsberg gefunden, haben mir in der Mascke'schen Sammlung vorgelegen. Diese Geschiebe stammen, dem Gestein und der Grösse nach, von Oesel.

Leperditia phaseolus His. sp.

1837. *Cytherina phaseolus* His. Leth. suec. p. 9, T. I, F. 1.
1873. *Leperditia Angelini* F. Schmidt l. c. S. 13—18 (cum synonym.).
1874. — — Lundgren, om den vid Ramsåsa och Ofvedskloster i Skåne förekommande sandstenens alder in Lunds Univers. årskrift T. X, p. 9.
1875. — *tyraica*, Linnarsson, anteckning från en resa i Skånes silurtrackter in Geolog. föreningens förh. Bd. II, p. 280.
1877. — *Angelini* Krause, in Zeitschr. d. deutschen geolog. Gesellsch. Bd. 29, p. 29.
1879. — *phaseolus*, Kolmodin, Ostracoda Silur. Gotland. l. c. p. 134, T. XIX, F. 4, 5.
1881. — *Hisingeri*, var. *gracilenta*, Jones in Ann. and magaz. Nov. p. 339, T. XIX, F. 6.
1881. — — (Zwergform), Jones, l. c. p. 340, T. XIX, F. 16.
1881. — *phaseolus*, var. *marginata* Jones, l. c. p. 341, T. XIX, F. 15.
1882. — — F. Schmidt und Rupert Jones l. c. p. 170, 171.

Schon oben (S. 4, 5) habe ich angedeutet, dass es mir nicht leicht geworden ist, meine wohlcharakterisirte *Lep. Angelini* aufzugeben und die *L. phaseolus* His. herzustellen, die augenscheinlich Veerschiedenes in sich schloss. Da nun nach Lindström's Zeugniss das von Kolmodin abgebildete Hisinger'sche Originalexemplar mit der von mir als *L. Angelini* beschriebenen Form von Oestergarn durchaus identisch ist — der Umriss der Schaale erregte noch Zweifel in mir, obgleich die charakteristischen Flecke da sind — so zögere ich nicht länger nachzugeben und nehme an, dass das erwähnte Hisinger'sche Original dem Hisinger'schen Text entsprechend wirklich von Hoburg, also aus S.-Gotland stammt, wenn es auch im Stockholmer Museum jetzt mit ein paar schlecht erhaltenen Stücken zusammen die Etikette des secudären Fundorts «Strand bei Wisby» trägt.

Sehr nahe ist mit unserer Art (auch durch die Flecke) die im gleichen Niveau vorkommende *L. tyraica* m. aus Podolien und Galizien verwandt, so nahe, dass bei dem Vorkommniss von Ramsåsa in Schonen eine Meinungsverschiedenheit zwischen Lundgren und Linnarsson eintreten konnte. Als ich übrigens Linnarsson die ächte *L. tyraica*, vom Dniestr, brachte, schloss er sich Lundgren's Meinung an[1], womit ich mich nach Ansicht der Exemplare nur einverstanden erklären konnte.

Das von Jones (im Novemberheft 1881 der Ann. and Magaz. T. XIX, F. 6) als *L. Hisingeri* var. *gracilenta* abgebildete Exemplar aus dem Tilestone von Kington war ich

früher geneigt als eine Mittelform zwischen *L. phaseolus* und *tyraica* anzusehen und habe mich dem entsprechend auch in meinem Briefe an Jones geäussert. Jetzt möchte ich es geradezu mit *phaseolus* vereinigen, der es im Umriss am nächsten kommt — der gleichmässig gewölbte Bauchrand und der stark vorspringende Hinterrand. Gewiss werden sich auch an diesem oder anderen Exemplaren die beiden Flecke erkennen lassen. Jones selbst hebt (l. c. p. 340) hervor, dass dieses Stück ihn von allen englischen Leperditien am meisten an *L. phaseolus* erinnere. Ebenso vermuthe ich, dass die kleine *Leperditia*, die im Downton Sandstone von Kington mit *Beyrichia Wilkensiana* (Jones l. c. p. 337) vorkommt, zu unserer Art gehört. Die beiden l. c. T. XIX, F. 15, 16 von Jones abgebildeten Exemplare von Randefer auf Oesel (von Eichwald geschickt) gehören unzweifelhaft zu *phaseolus*, wie ich schon in meinem Briefe hervorgehoben. Kolmodin citirt zu seiner *L. phaseolus* meine *Angelini* nur ex. p. und führt aus meiner Arbeit auch nur die Figuren an, die sich auf gotländische Exemplare beziehen. Auch giebt er ganz bestimmte Maasse, die Länge zu 13 mm., die Höhe zu 7 mm., an, während ich in der Grösse ziemlich starke Variationsgränzen bemerkt und S. 14 meiner Arbeit auch angeführt habe. Dass die F. 3 auf Angelin's unedirter Tafel *A L. phaseolus* darstellt, ist schon oben bemerkt.

Die var. *ornata* Eichw. (s. meine Leperditien F. 18) gehört bestimmt zu unserer Art, da die Contouren ganz die nämlichen sind. Die erhabenen Pünktchen auf der Schaale und der stärker ausgeprägte hintere Randsaum können aber wohl eine besondere Varietät zulässig erscheinen lassen, obgleich der Randsaum auch ohne erhabene Punkte vorkommt.

Vorkommen. Sehr häufig in den gelben krystallinischen Kalken der obersten öselschen Schicht (K) über dem Eurypterenlager, wo sie stellenweise massenhaft vorkommt, so bei Randefer, Uddafer und besonders (mit *Platyschisma helicites* und *Coelolepis* Pand. zusammen) am Flüsschen bei Kusnem (hier nur kleine Exemplare), dann bei Koggul, Padel Kergel, Kielkond, Lümmanda (hier die grössten Exemplare und die var. *ornata* Eichw.). Auch im grauen Gestein der nämlichen öselschen Schicht, aber seltner, so bei Lode, am Ohhesaarepank und am Kattripank (die weniger gut erhaltenen Stücke von letzterem Fundorte hielt ich früher für *L. Eichwaldi* m.). Auf Gotland im SO, in der obersten Süd-Gotländischen Schichtenabtheilung, besonders bei Oestergarn, aber auch bei Lau und Hoburg[1]). In Schonen bei Ramsåsa, im Christianiabecken in Kjerulfs oberster Etage 8. Wahrscheinlich auch in England im Tilestone von Kington (s. oben). Endlich nicht selten im norddeutschen Diluvium, von wo ich sowohl in der Mascke'schen Sammlung aus Ostpreussen (hier auch die var. *ornata* Eichw.), als auch im Berliner Museum aus der dortigen Umgegend Exemplare gesehen habe.

---

1) Der Hisinger'sche Fundort Wisby ist nach meinem Dafürhalten, wie oben ausgeführt, einstweilen zu streichen (wahrscheinlich hat er abgeriebene kleine Exemplare von *L. Hisingeri* mit unserer Art verwechselt).

Leperditia Eichwaldi F. Schmidt. Tab. I, F. 1.

1873. *Leperditia Eichwaldi* F. Schmidt, russ. silur. Leperditien, p. 17, F. 19—21.

Zu dieser Art kann ich sonst nichts hinzufügen, als die Abbildung eines wohlerhaltenen grossen Exemplars der rechten Schaale, das ich aus dem Dorpater Museum durch Prof. Grewingk erhalten habe. Die grösste Länge vom vorderen zum hinteren Vorsprung beträgt 15,5 mm., die Höhe in der Mitte 11 mm.; die nicht ganz erhaltene Schlosskante schätze ich auf 11,5 mm. Weder vorn noch hinten ist ein deutlich abgesetzter Randsaum zu erkennen. Das Stück ist als Geschiebe bei Kabillen in Kurland gefunden.

Schon in der Einleitung erwähnte ich, dass auf der unedirten Tafel A. v. Angelin's Palaeontologia scandinavica unter F. 6 und 7 eine Art abgebildet ist, die mit unserer identisch scheint. Sie wäre auf Gotland zu erwarten, doch führt sie Kolmodin von dort nicht an.

Vorkommen. Ausser dem oben genannten Geschiebe aus Kurland sind keine neuen Funde hinzugekommen; es bleibt also nur der schon von Eichwald (1854) entdeckte Fundort Kiddemetz auf Oesel, der zur obersten Stufe der unteren öselschen Schichtengruppe I gehört. Ausserdem ist die Art in der nämlichen Schicht bei Piddul an der Nord-Küste von Oesel von A. Schrenck gefunden. Meine Angabe vom Kattripank bei Hoheneichen beruht auf einer Verwechslung mit *L. phaseolus* His.

Leperditia baltica His. sp. Tab. I, F. 2, 3.

1873. *Leperditia baltica* F. Schmidt, l. c. p. 15.
1879. — — Kolmodin, l. c. p. 134.
1881. — — Rupert Jones, Ann. and Magaz. Nov. p. 337 ex. pt. T. XIX, F. 1?
1882. — — F. Schmidt and Rupert Jones, in Ann. and Magaz. March, p. 168.

Ueber die verschiedenen Formen, die Rupert Jones in seinem ersten Artikel als *L. baltica* anführt, ist es schwer ein sicheres Urtheil zu fällen, da die Exemplare meist unvollkommen sind und namentlich bei keinem einzigen das sicherste Kennzeichen, der quergerippte Umschlag der linken Schaale, zu erkennen ist. Am meisten scheint mir noch durch seine oblonge Form die F. 1 auf T. XIX unserer Art zu entsprechen, doch fühle ich mich auch hier nicht ganz sicher. F. 10 und 11 sind von Lindström als *L. baltica* an das British Museum gesandt worden. Sie stammen aus Wisby und stimmen gut zu *L. Hisingeri*, welches ja auch die Hisinger'sche *Cyth. baltica* von Wisby ist. Lindström, der, wie ich weiss, meine Unterscheidung von *L. baltica* und *Hisingeri* anerkennt, hat augenscheinlich dieses Stück etikettirt, bevor er meine Leperditienarbeit kannte. F. 4 *a*, *b* sind unvollkommene Stücke, die ich mir nicht getraue näher zu bestimmen.

Aehnlich geht es mir mit den Formen, die Jones unter dem Namen *L. baltica* var. *contracta* l. c. p. 337 zusammengefasst hat. Diese habe ich zum Theil schon in meinem Briefe an ihn besprochen, der im Märzheft d. J. Annals of Nat. Hist. abgedruckt ist. Da-

mals meinte ich meine *L. Hisingeri* var. (F. 22 in meiner früheren Arbeit) zu dieser Varietät *contracta* Jones ziehen zu können. Allein unsere Form weicht doch nicht unwesentlich von Jones F. 2 auf T. XIX ab, die doch als Typus der *contracta* gelten muss, namentlich ist unsere Form noch stärker verkürzt als die typische *contracta* Jones, bei der die Schlosskante länger als die Höhe ist (bei der rechten Schaale), während bei unserer Form das umgekehrte Verhältniss stattfindet; ich sehe diese Form jetzt als besondere Varietät *abbreviata* von *L. Hisingeri* an. Die F. 3 bei Jones l. c. mag zu derselben Form von *L. contracta* Jones gehören, wie F. 2. F. 13 ist nach einem Exemplar von Talkhof (von Eichwald geschickt) gezeichnet, das ich seinem Vorkommen und seiner Form nach zu meiner eben erwähnten var. *abbreviata* bringe, obgleich diese meist in noch mehr verkürzter Form erscheint. F. 14, aus Kamenetz Podolsk (ein sehr unvollständiges Exemplar), muss der Localität nach zu *L. tyraica* gehören, da mir vom Dniestr keine andere Art bekannt ist. Ueber F. 17 endlich erlaube ich mir kein Urtheil.

Die ächte *L. baltica* His. ist ebenfalls auf Angelin's unedirter Tafel *A* in F. 2 *a*, *b* dargestellt. F. 2 *a* zeigt zugleich das einzige Exemplar mit beiden Klappen im Zusammenhang, das mir vorgekommen ist.

Bei uns hat *L. baltica* bisher gefehlt, auch jetzt ist sie noch nicht anstehend gefunden worden. Die beiden abgebildeten Exemplare, die sehr gut zu gotländischen Originalen passen, sind Geschiebe aus Kurland und mir von Prof. Grewingk aus dem Dorpater Universitätsmuseum zur Benutzung mitgetheilt. Die mehr oblonge Form und namentlich die Querstreifung auf dem Umschlag der linken Schaale genügen zum Erkennen und zur Unterscheidung von *L. Hisingeri* m., mit der sie früher verbunden wurde. Sehr deutliche eingestochene Punkte, die ich auf der ganzen Oberfläche wahrnehme, scheinen ein gutes Hülfskennzeichen zu bieten.

Maasse unserer Exemplare:

Länge	Schlossrand	Höhe der rechten Schaale	Höhe der linken Schaale
20 mm.	15 mm.	13 mm.	—
17 »	13 »	—	11 mm.

Vorkommen. Anstehend vorzüglich auf Gotland, wo sie charakteristisch für die untere Stufe der mittelgotländischen Schichtenabtheilung ist. Am häufigsten ist sie im NO. der Insel, auf Fårö und bei Slite, wo ich sie wiederholt gefunden und von wo sie auch Hisinger zuerst beschrieben hat. Kolmodin führt noch eine ganze Reihe anderer Fundorte an, namentlich Martebo und Follingbo, östlich von Wisby, die nach Lindström's Karte auch schon in den Bereich von Mittelgotland fallen. Die Fundorte Hammarudd und Oestergarn sind mir auffallend, da sie im Uebrigen schon zur obersten, südgotländischen Schichtenabtheilung gehören. Immerhin mag die Art ja auch weiter hinauf reichen. Aus Norwegen ist mir die Art von der Insel Malmö im Christianiafjord bekannt, wo ich sie am Westufer

in Schichten mit *Pentamerus estonus* Eichw. (ob Form von *oblongus* Sow.?) gefunden habe. Diese Schichten gehören zu Kjerulf's Etage 6, die auf der am Ostufer der nämlichen Insel Malmö entblössten oberen Stufe der Etage 5 auflagert, in der ich, ganz entsprechend der gotländischen Schichtenfolge, *L. Hisingeri* gefunden habe. Anstehend ist die Art weiter mit Sicherheit nicht bekannt, da die englischen Vorkommnisse mir einstweilen noch etwas zweifelhaft vorkommen. Als Geschiebe ist unsere Art vorzüglich in Ostpreussen gefunden, von wo ich Stücke in der Mascke'schen Sammlung gesehen habe. Unsere kurischen Geschiebe stammen beide aus dem Westen Kurlands, die linke Schaale aus Kabillen, die rechte aus Dondangen. Es ist ein dichter braungrauer Kalk, in dem keine anderen Petrefakten vorkommen. Das Gestein ist mir von Oesel nicht bekannt; es stammt wahrscheinlich aus dem jetzt vom Meere bedeckten Gebiet zwischen Oesel und Gotland. Dem Vorkommen in Gotland nach wäre unsere Art in den Panks der öselschen Nordküste, namentlich bei Taggamois, zu suchen, die zu unserer Schichtenabtheilung I gehören.

Erklärung der Figuren. T. I, F. 1. Rechte Schaale nach einem Geschiebe von Dondangen im Dorpater Universitätsmuseum; F. 3 linke Schaale von Kabillen in Kurland (ebenfalls in Dorpat), 3 *a* Umschlag derselben mit der Querstreifung. Alles natürliche Grösse.

Leperditia Keyserlingi F. Schmidt.

1387. *Leperditia Keyserlingi* F. Schmidt, l. c. p. 20, F. 32 — 34.
1881. — *Hisingeri* Jones, Ann. and Magaz. November p. 339, T. XIX, F. 5.?
1882. — *Keyserlingi* F. Schmidt und Jones, l. c. p. 170, 171.

Bei uns sind keine neue Materialien für diese Art gefunden worden. Interessant war mir die von Jones l. c. T. XIX, F. 5 abgebildete rechte Schaale, aus dem Upper-Llandovery von Eastnor bei Malvern. Ich finde in der Zeichnung den steil aufsteigenden Bauchrand und die charakteristische schiefe Furche hinter dem Auge (nuchal furrow nach Jones), die deutlich für unsere *L. Keyserlingi* sprechen. Jones hatte die Art zuerst zu *L. Hisingeri* gebracht, später aber sich mit meiner Bestimmung einverstanden erklärt.

Vorkommen. Unsere Art ist charakteristisch für die Raiküllsche Schicht (G_3), die in der Mitte zwischen unseren beiden Pentamerenzonen G_2 und H liegt. Der Hauptfundort ist der Steinbruch von Lippa bei Raiküll selbst, ausserdem ist sie in der nämlichen Schicht bei Saage, Merjama und Laisholm gefunden. Die einzige Localität ausser unserem Gebiet wäre die obenerwähnte im englischen Llandovery. Auch aus norddeutschen Geschieben ist unsere Art bisher nicht bekannt.

In F. 4 habe ich eine kleine linke Schaale von Merjama (G_3) abgebildet, wohl eine besondere Art, die sich durch kurzen Schlossrand (der Höhe gleich), durch den Mangel der Verticalfurche und eine etwas abnorme, angeschwollene Bildung des Vorderrandsaumes auszeichnet, während der Hinterrand nur eine schwache Andeutung eines Randsaums zeigt. Zu gleicher Zeit ist auch eine schwache Andeutung des Augenflecks zu er-

kennen. Ich kann dieses Stück, bis ich mehr Material habe, einstweilen nur als abweichende Form bei *L. Keyserlingi* unterbringen. Von *L. phaseolus* ist es deutlich durch das constante Ansteigen des Bauchrandes nach hinten unterschieden. Die Schlosslinie ist 4,8 mm. lang, die Höhe 5 mm., die grösste Länge beträgt 7,5 mm.

Leperditia Hisingeri F. Schmidt. T. I, F. 5, 6, 7.

1873. *Leperditia Hisingeri* F. Schmidt, Russ. silur. Leperditien p. 16 (ex pt.), F. 23.
1879. — *Schmidti*, Kolmodin l. c. p. 133.
1881. *Leperditia baltica*, Rupert Jones in Ann. and Magaz. Nov. T. XIX, F. 10, 11.
1882. — *Hisingeri* F. Schmidt und Jones, l. c., March, p. 168.

Was den Namen unserer Art betrifft, so habe ich mich schon oben (S. 4) darüber ausgesprochen, dass ich ihn gegenüber dem Namen *L. Schmidti* Kolm. beibehalte, in Folge des durch Jones geführten Nachweises, dass *Cythere Hisingeri* Münst., wegen deren Kolmodin die Umbenennung vorschlug, einer ganz anderen Gattung (*Bairdia*) angehört. Alle die älteren in meiner Leperditienarbeit angeführten Citate gehören zu unserer Art, ich habe aber diese selbst damals in einem zu weiten Sinne aufgefasst und daher ist meine Artbegränzung eine unbestimmte geworden und hat zu mancherlei Irrungen Anlass gegeben

Der Typus der Art ist die bei Wisby vielfach vorkommende und in vollständigen Exemplaren (mit beiden Schaalen) weit in Sammlungen verbreitete Form, die zuerst von Hisinger in Leth. suec. T. XXX, F. 1 als zweite Form seiner *Cytherina baltica* publicirt wurde; später ist sie noch wiederholt von F. Römer, Jones und Kolmodin als *Lep. baltica* oder eine Form derselben abgebildet worden. Auch Angelin stellt auf seiner schon oft citirten unedirten Tafel *A* unsere typische Form sehr vollständig mit allen Details in seiner F. 1, *a*—*h* dar. Schon Angelin hatte die Trennung unserer Art von der ursprünglichen *L. baltica* His. (Leth. suec. T. I, F. 1) vollzogen, aber nichts darüber publicirt und der von *L. baltica* zu trennenden Form keinen Namen gegeben, was zuerst durch mich (l. c. p. 2, 16) geschehen ist. Ich konnte nachweisen, dass die typische *Hisingeri* von Wisby auch bei uns in den tiefsten Obersilurschichten, namentlich der Jördenschen und Raiküllschen Schicht (G_1 und G_3, früher 4 und 5), die mit der Wisbyzone auf Gotland übereinstimmen, vorkommt; ich irrte aber darin, dass ich auch die in unserer nächst höheren Schichtenzone mit *Pentamerus estonus* (H früher 6) vorkommende und ziemlich verbreitete *Leperditia* ohne weiteres mit zu *Hisingeri* hinzuzog, wodurch die Charakteristik der Art eine viel weniger scharfe und bestimmte wurde. Letztere Form (aus H) trenne ich jetzt unter dem Namen var. *abbreviata* m. als besondere Varietät oder wohl eher Mutation ab. Für eine specifische Unterscheidung genügen die Charaktere wohl nicht; auch scheinen Zwischenformen vorzukommen, wie das später zu erwähnende Stück aus der Bai von Christiania.

Ich bin jetzt mit dem Identificiren von Petrefakten aus verschiedenen Schichten sehr

vorsichtig geworden. Kommen ähnliche Formen in benachbarten, auf einander folgenden Stufen vor, so sehe ich genau zu, ob sich nicht constante, wenn auch geringe, Unterschiede feststellen lassen und ziehe, wenn dieses gelungen, vor, die Formen zu trennen, unbeschadet ihrer etwaigen genetischen Zusammengehörigkeit. So ist es mir auch jetzt so ziemlich gelungen. Beide Formen, die ächte *Hisingeri* und die var. *abbreviata* sind weit bei uns verbreitet, wenn ich auch von der ächten *Hisingeri* nicht gerade viel Material vorliegen habe. Es genügte jedenfalls zur Identificirung mit der typischen gotländischen Form. In F. 5 bilde ich den Steinkern einer rechten Schaale ab und daneben F. 6 ein wohlerhaltenes Exemplar von Wisby, um die Uebereinstimmung zu zeigen. Der Steinkern zeigt die schwache Andeutung eines Vorsprungs am Bauchrande, der bei der typischen Form nicht vorhanden ist; das gäbe schon eine Annäherung an *L. marginata* Keys. In F. 7 sehen wir den glatten Umschlag einer linken Schaale, ebenfalls von Wisby, dessen Abbildung wir bisher vermissten.

Oben in der Uebersicht der unterscheidenden Charaktere habe ich schon die wichtigsten Unterschiede beider Formen hervorgehoben. *L. Hisingeri* hat eine gestrecktere Form als die var. *abbreviata*; bei der rechten Schaale kommt die Höhe nur der Länge der Schlosslinie gleich und übertrifft sie kaum, was bei *abbreviata* regelmässig (bis $1^1/_4$) der Fall ist. Der Vorder- und Hinterrand springen bei *L. Hisingeri* stärker vor und ein abgeflachter Randsaum ist hier oft deutlich ausgebildet, während bei *abbreviata* nur an Steinkernen ein Rand zu erkennen ist. Die linke Schaale ist schwieriger zu unterscheiden, aber auch hier fällt die kürzere und höhere Form (bei *L. abbreviata* kommt die Höhe der Schlosslinie gleich, bei *Hisingeri* ist sie kürzer als diese), der völlige Mangel des Randsaums bei *L. abbreviata* und der stärkere Vorsprung des Vorderrandes bei *L. Hisingeri* auf.

Von den verschiedenen aus unserem und dem scandinavischen Silurgebiet stammenden Leperditien, die Jones in seinem ersten oft citirten Artikel (Ann. and Mag. Nov. 1881) abbildet, gehören nur die beiden Stücke F. 10, 11 auf T. XIX hierher. Sie stammen aus Wisby und sind von Lindström (wohl vor Erscheinen meiner Arbeit) als *L. baltica* eingesandt. Die Contouren sind genau die der ächten *L. Hisingeri* von Wisby.

Die in meiner früheren Arbeit F. 23 abgebildete Form von Laisholm mit stark entwickeltem Randsaum vorn und hinten ziehe ich unbedenklich zu unserer Art.

Von den verschiedenen bei Eichwald (Leth. ross. anc. per. p. 1329) besprochenen Formen der *L. baltica* gehört keine zu unserer Art, auch fehlt sie in seiner Sammlung. Von anderen Arten, ausser mit der var. *abbreviata*, ist sie noch mit der ächten *L. marginata* Keys. nahe verwandt, worauf wir bei Besprechung dieser Art zurückkommen werden.

Maasse:

	Grösste Länge	Schlosslinie	Höhe d. rechten Schaale	Höhe d. linken Schaale
Exemplar von Wisby	17 mm.	11 mm.	11 mm.	10,2 mm.
—	18 »	12 »	12 »	11 »
—	12 »	8 »	8,3 »	7,5 »
—	12,5 »	8,5 »	8,5 »	7,5 »
» » Laisholm	13,5 »	9,5 »	9,5 »	—
—	10 »	7 »	7 »	—
—	9 »	5,5 »	—	5 »
» » Herküll	13 »	9 »	9 »	—
—	8,2 »	6 »	6 »	—
Bucht von Christiania, abweichendes Exemplar	13 »	8 »	9 »	—

Vorkommen. Der typische Fundort unserer Art ist, wie öfter erwähnt, Wisby in der untersten Stufe des Gotländer Obersilur, wo sie häufig in wohlerhaltenen Exemplaren vorkommt und den Reisenden oft von Knaben als versteinerte Bohnen (böner) angeboten wird. Ausserdem führt Kolmodin noch Westergarn und Capellshamn an, die dem nämlichen Niveau der Wisbygruppe angehören. Bei uns gehört die Art ebenfalls der untersten Obersilur-Stufe G an, namentlich der Jördenschen Schicht G_1, aus der ich sie von Helterma auf Dago, von Herküll (die schönsten Stücke in der Sammlung des Herrn v. Rosenthal) und Kardina kenne, aber sie kommt auch in der Raiküllschen Stufe G_3 vor, bei Raiküll, Merjama und Laisholm, zusammen mit *L. Keyserlingi*. Auswärts kenne ich die Art nur noch vom Ostufer der Insel Malmö im Christianiafjord, wo ich ein wohlerhaltenes Exemplar in der tiefsten Obersilurstufe zusammen mit *Phacops elegans* Sars und Boeck gefunden habe. Doch steht dieses Stück durch seine grössere Höhe und den geringen Vorsprung des Vorderrandes schon fast näher zur var. *abbreviata*, und ist eine Hauptveranlassung gewesen, dass ich die beiden Formen nicht vollständig als Arten getrennt habe.

Erklärung der Figuren. T. I, F. 5 Steinkern der rechten Schaale von Laisholm (Museum Reval); F. 6 *a, b* ganzes Exemplar von Wisby, *a* Ansicht der rechten Schaale, *b* Ansicht der linken Schaale; F. 7 Umschlag der linken Schaale eines Exemplars von Wisby.

Leperditia Hisingeri var. abbreviata m. T. I, F. 8—12.

1860. *Leperditia baltica* Eichw. Leth. ross. anc. per. p. 1329 ex p.
1873. — *Hisingeri* F. Schmidt l. c. p. 16, ex p., F. 22.
1881. — *baltica* var. *contracta* Jones (ex pt.), Ann. and Mag. Nov. T. 19, F. 13.

Der grösste Theil der früher von mir zu *L. Hisingeri* gebrachten Exemplare aus unserem ostbaltischen Silurgebiet gehört hierher, namentlich Alles aus der Zone des *Pentamerus estonus* (H, früher 6), in welcher die Leperditien ungleich häufiger sind als in der an-

gränzenden Zone G, wo die ächte *L. Hisingeri* zu Hause ist. Ueber die Gründe der Abtrennung von der letzteren habe ich mich bei dieser schon ausgesprochen; es war eine schärfere Charakteristik bei vorgenommener Trennung möglich, und diese Trennung war um so empfehlenswerther und wichtiger als sich für die Unterscheidungscharaktere zugleich eine stratigraphische Bedeutung nachweisen liess.

Die Unterschiede sind wesentlich schon in der diagnostischen Uebersicht enthalten. Aus den nachfolgenden Maassen ist zu ersehen, dass die var. *abbreviata* bedeutend grössere Dimensionen erreicht als die ächte *L. Hisingeri.* Sie fällt vorzüglich durch die abgekürzte gerundete Form ihrer rechten Schaale auf, deren Höhe die Länge der Schlosslinie bedeutend übersteigt. Bei der linken Schaale kommt die Höhe der Länge der Schlosslinie gewöhnlich gleich oder übertrifft sie um ein Minimum. Bei *L. Hisingeri* war meistentheils am Vorder- und Hinterrande ein flacher Randsaum vorhanden. Dieser fehlt unserer Form vollkommen und ist nur auf Steinkernen sichtbar.

Ich glaubte bei einem Exemplar der linken Schaale Spuren einer Querstreifung (wie bei der ächten *L. baltica*) am Umschlag des Bauchrandes zu erkennen und habe mich dem entsprechend auch gegen Jones geäussert (F. Schmidt and Jones l. c. p. 169). Ich glaubte dem entsprechend auch unsere Art zur *L. baltica* var. *contracta* Jones ziehen zu müssen, da Exemplare derselben (aus Talkhof, von Eichwald gesandt) von Jones zu seiner *contracta* gezogen waren (Ann. and Mag. Nov. 1881 p. 338, T. XIX, F. 13), wobei er selbst auf die grosse Aehnlichkeit der Talkhofschen Exemplare mit meiner F. 22 (dem Typus unserer var. *abbreviata*, und nicht blos ein abweichendes Exemplar, wie ich früher annahm) aufmerksam machte. Die typische englische Form seiner *L. baltica* var. *contracta* (l. c. p. 337, T. XIX, F. 2) ist in ihren Dimensionen doch zu verschieden, namentlich ist die Schlosslinie zu lang, um eine Verbindung mit unserer Varietät zuzulassen, wie ja auch Jones selbst beim Vergleich seiner Form mit meiner F. 22 hervorhebt.

Unter den verschiedenen Formen die Eichwald (Leth. p. 1329) unter seiner *L. baltica* bespricht, werden die Stücke von Fennern und Talkhof zu unserer Varietät gehören. Ich habe diese Stücke in seiner Sammlung nicht vorgefunden und kann sie daher nicht genauer besprechen. Seine var. *semicircularis* (l. c. p. 1332) ist dagegen in der Sammlung vorhanden; es ist wirklich ein halbkreisförmiger schlecht erhaltener Schild, der aber keinerlei Kennzeichen einer *Leperditia* aufweist und eher als ein Pygidium von *Bumastus* bestimmt werden kann.

Maasse:

	Grösste Länge	Schlossrand	Höhe d. rechten Schaale	Höhe d. linken Schaale
Nudi u. Kooküll bei Raiküll. .	21,8 mm.	13,5 mm.	16,5 mm.	—
—	21 »	14 »	17 »	—
—	13 »	8,3 »	9,4 »	—
—	19 »	12,5 »	—	13 mm.
—	16 »	10 »	—	11 »

	Grösste Länge	Schlossrand	Höhe b. rechten Schaale	Höhe d. linken Schaale
Nudi und Keoküll bei Raiküll	10,8 »	7,8 »	—	7,8 »
Kosch	15 »	9,3 »	11 »	—
—	12 »	7,5 »	9 »	—
—	15 »	10 »	—	10 »
Oberpahlen	16,8 »	10 »	12 »	—
—	13,5 »	8,7 »	10,2 »	—
Talkhof	13 »	8	9	—
Kattentak	23	—	17	—

Vorkommen. Ausschliesslich in unserem ostbaltischen Silurgebiet, und zwar nur in der Zone H (früher 6), die durch *Pentamerus estonus* Eichw. charakterisirt wird. In dieser Zone ist die Art ziemlich häufig: bei Talkhof, Oberpahlen, Arrosaar, Fennern (nach Eichwald), Jerwakant und besonders im südlichen Theil des Gebiets von Raiküll, wo sie in mehreren kleinen Brüchen und sonstigen Entblössungen im Gebiet der Zone H bei Nudi, Nömmküll und Keoküll in zahlreichen Exemplaren gefunden wurde. Ebenso häufig habe ich sie an der Pernauschen Post-Strasse an der Brücke über den Koschschen Bach angetroffen. Weiter im Westen ist von mir nur noch ein Exemplar (und zwar das grösste von allen) bei Kattentak gefunden. Auswärts ist *L. abbreviata* nicht vorgekommen.

Erklärung der Figuren. T. I, F. 8 grosses Exemplar der rechten Schaale von Nudi bei Raiküll, schon in F. 22 meiner früheren Arbeit abgebildet (Mus. Dorp. Naturforscherverein); F. 9 linke Schaale von Nömmküll bei Raiküll, in *b* der Umschlag (Revaler Museum, wie alle folgenden Stücke); F. 10 linke Schaale vom Koschschen Bach; F. 11 linke und F. 12 rechte Schaale von Keoküll bei Raiküll.

B. Nachträge zu den Leperditien aus anderen Silurgebieten Russlands.

1. Aus dem Waschkinabecken am Eismeer.

Leperditia marginata Keys. T. I, F. 13—19.

1846. *Cypridina marginata* Keys. Reise ins Petschoraland S. 288, T. XI, F. 16 *a, b, c, d*.
1873. *Leperditia* — F. Schmidt Russ. Sil. Leperditien S. 19, F. 29—31.
1882. — — F. Schmidt and Jones in Ann. and Mag. of Nat. Hist. March p. 171

In meiner früheren Arbeit über die russischen silurischen Leperditien musste ich noch Zweifel darüber aussprechen, ob unsere Art wirklich deutlich und gut von *L. Hisingeri* und *Keyserlingi* geschieden sei; ebenso war es mir noch zweifelhaft, ob die verschiedenen

von Graf Keyserling und mir abgebildeten Exemplare alle zu einer Art gehören. Wir können jetzt sicherer über die *L. marginata* urtheilen, Dank dem neuen und reichlichen Material, das ich schon 1874, ein Jahr nach dem Erscheinen meiner Leperditienarbeit, durch den jetzigen Professor der Geologie in Kasan, Dr. A. Stuckenberg[1]), erhielt, der damals im Auftrage der Kaiserl. mineralogischen Gesellschaft eine Reise ins Petschoraland unternahm, an deren Zustandekommen ich den lebhaftesten Antheil nahm, speciell im Interesse der *Leperditia marginata*, die mir damals viel Sorge machte, weil ich nicht mit ihr ins Klare kommen konnte, wie sich auch an mehreren Stellen meiner Arbeit ausgesprochen findet.

Nach genauer Untersuchung der etwa 20 mir vorliegenden Exemplare (von beiden Schaalee) bin ich nun zu folgenden Resultaten gekommen: Alle früher von Graf Keyserling mitgebrachten Exemplare (2 der rechten und 3 der linken Schaale) gehören zusammen zu einer Art, was mir früher noch zweifelhaft erschien. *L. marginata* Keys. steht zunächst der *L. Hisingeri* m. und kann vielleicht als eine lokale Abänderung derselben angesehen werden. Sie ist in ihren Dimensionen ziemlich variabel, stimmt aber doch in diesen und im Umriss ziemlich gut mit *L. Hisingeri* überein, indem bei der rechten Schaale die Höhe die Schlosslinie etwas übertrifft, bei der linken dagegen meist von dieser übertroffen wird. Als Hauptunterschied ist ein stumpfer Vorsprung am Bauchrande der rechten Schaale zu erwähnen, der meist hinter der Mitte belegen ist (F. 13, 15) und von dem aus ein sanfterer Abfall des Randes nach hinten, ein steilerer nach vorn stattfindet. Auch das Exemplar F. 16*b* bei Keyserling (F. 31 auf meiner früheren Tafel) zeigt diesen Vorsprung ganz deutlich, er ist aber früher nur missverstanden und nicht genau dargestellt worden. Der Vorsprung rückt bisweilen auch mehr nach vorn (F. 17) und verliert sich auch wohl ganz. Bei *L. Hisingeri* hatten wir (F. 5) das andeutungsweise Vorkommen eines ähnlichen Vorsprungs notirt. Der von Graf Keyserling als charakteristisch bezeichnete Randsaum, der ausserdem von einer deutlichen Furche begränzt wird, kann an allen ausgewachsenen Exemplaren erkannt werden; er bildet meist einen schmalen rundlichen Wulst rund um die ganze Vorder-, Hinter- und Bauchseite; am übergreifenden Vorsprung der rechten Schaale wendet er sich abwärts ohne ganz zu verschwinden. Bei jüngeren und dickschaaligen Exemplaren (F. 15, 16) verliert sich der Saum fast ganz, und bei solchen wird namentlich die linke Schaale (F. 16) der *L. Hisingeri* sehr ähnlich. Der Grösse nach erreichen sämmtliche neuerhaltenen Exemplare kaum die Hälfte der Dimensionen des grossen typischen Keyserling'schen Exemplars. *L. Keyserlingi* m. ist von unserer Art scharf geschieden, durch ihre viel gestrecktere Form, das gleichmässigere Ansteigen des Bauchrandes nach hinten, den unter viel stumpferem Winkel ansteigenden Hinterrand und die Vertikalfurche hinter dem Auge.

---

1) S. Отчетъ геологическаго путешествія въ Печорскій край и Тиманскую тундру Александра Штукенберга. С.-Петербургъ 1875.

Ausser der typischen Form (F. 13—16), der auch die sämmtlichen Keyserling'schen Originalzeichnungen F. 16 *a, b, c, d* (meine früheren Darstellungen F. 29—31) angehören, unterscheide ich noch eine mehr gerundete, kürzere, flache Varietät, var. *rotundata* (F. 17, 18), bei der der Vorsprung der rechten Schaale mehr nach vorn, fast bis in die Mitte, rückt und auch bei der linken Schaale die Höhe der Schlosslinie wenigstens gleichkommt, und eine gestreckte var. *subparallela* F. 19, von der ich blos die linke Schaale kenne, deren Schlosslinie die Höhe bedeutend übertrifft und an der kaum eine Verbreiterung nach hinten wahrzunehmen ist. Wären nicht Uebergänge vorhanden, so könnte man hier an eine besondere Art denken. Der Rand ist besonders stark ausgeprägt bei dieser Form.

In meinem Briefe an Rupert Jones (l. c. p. 171) hatte ich den charakteristischen Vorsprung der *L. marginata* erwähnt, von dem Rande aber behauptet, dass er nur auf Steinkernen vorkomme; das ist nicht der Fall, er hebt sich auch bei wohlerhaltenen Schaalen deutlich heraus und verschwindet nur, wie gesagt, bei jungen dickschaaligen Exemplaren.

Maasse:

Typische Form	Schlossrand	Höhe d. rechten Sch.	Höhe d. linken Sch.	Länge
Keys. F. 16 *b*, meine frühere F. 31	10 mm.	10,5 mm.	—	13,5 mm.
Jetzige F. 13	9 »	10 »	—	13,5 »
	6,8 »	7 »	—	10,5 »
F. 15	4,7 »	5 »	—	7 »
Keys. F. 16 *a, c*, meine frühere F. 29	—	—	17 mm.	27 »
Jetzige F. 14	9,5 »	—	9 »	13 »
	9 »	—	8,5 »	12,5 »
	7,8 »	—	7 »	10,5 »
Keys. F. 16 *d* meine frühere F. 30 ...	7,6 »	—	7 »	10,2 »
Jetzige F. 16	6 »	—	6 »	9 »
Var. *rotundata* F. 17	7,8 »	8 »	—	11 »
— F. 18	6 »	— »	6 »	8,5 »
Var. *subparallela*, jetzige F. 19 ...	7 »	— »	6 »	9,2 »
	6 »	— »	4,8 »	7,8 »

Vorkommen. Im obersilurischen weissen dolomitischen Kalk an der Waschkina, in der Timantundra in der Nähe des Eismeers, zusammen mit *Pentamerus samojedicus* Keys. (der dem *P. estonus* Eichw. sehr nahe steht), *Encrinurus punctatus* (nach Keyserling), *Bumastus barriensis*, und gewöhnlichen obersilurischen Korallen, wie *Calamopora gotlandica* und *Heliolites interstincta*. Das Niveau wird ziemlich genau mit dem unserer Stufe H übereinstimmen.

Erklärung der Figuren. T. I, F. 13 rechte Schaale der typischen Form mit deutlichem Rand; F. 14 ebensolches Exemplar der linken Schaale; F. 15 junges Exemplar der rechten Schaale der typischen Form mit scharf ausgebildetem Rand; F. 16 ebensolches Exemplar der linken Schaale; F. 17 rechte und F. 18 linke Schaale der var. *rotundata*; F. 19 linke Schaale der var. *subparallela*. Alle Exemplare sind in natürlicher Grösse gezeichnet und befinden sich im Museum der Kais. Akademie der Wissenschaften.

2. Von den Olenekquellen in Ost-Sibirien.

Leperditia Wiluiensis F. Schmidt. T. I, F. 20—22.

1873. *Leperditia Wiluiensis* F. Schmidt, Russ. Sil. Leperd. p. 17, F. 27, 28.

In meiner früheren Arbeit habe ich diese Art nach einigen isolirten Exemplaren der rechten und linken Schaale beschrieben, die aus der Maak'schen Sammlung und vom Wasserscheidegebiet des Wilui und Olenek stammen. Gegenwärtig kann ich diese Beschreibung etwas vervollständigen, da mir aus der Czekanowski'schen Sammlung aus der nördlichen Fortsetzung des erwähnten von Maak entdeckten Lagers eine ganze Reihe von Exemplaren, auch ein paar ganze mit beiden Schaalen darunter, vorliegen, die die gegebene Beschreibung etwas zu vervollständigen erlauben.

Die Wölbung der Schaale steigt vom Schlossrande schnell zur Mitte an und bleibt längs dem Bauchrande hoch um zu diesem schnell abzufallen, ähnlich wie bei *L. grandis*, mit welcher unsere Art auch die Schwiele an der hinteren Seite des Schlossrandes der linken Schaale gemein hat, ebenso die Poren am Bauchrande der rechten Schaale, die sich am Ende der vorderen und hinteren Randfurche in der Zahl von 1 — 3 (oder auch wohl mehr) einfinden; constant ist nur die eine Pore oder ein entsprechender Eindruck am Ende der erwähnten Furche. Der Bauchrand selbst ist entweder einfach gewölbt oder zeigt einen stumpfen Vorsprung, wie schon früher (F. 27 der früheren Arbeit) erwähnt. Der Umschlag der linken Schaale zieht sich längs dem ganzen Bauchrande hin, darin wieder von *L. grandis* verschieden, die ihn nur in der Mitte zeigt. Ueberhaupt ist nur eine Gruppenverwandtschaft da. Der ganze Umriss der Schaalen ist so verschieden, dass an eine Vereinigung nicht zu denken ist. Die Dicke der vollständigen 2-schaaligen Exemplare beträgt fast die Hälfte der grössten Länge und fast ebenso viel wie die kurze Schlosslinie.

Maasse:

Länge	Dicke	Schlosslinie	Höhe d. rechten Schaale	Höhe d. linken Schaale
14 mm.	6,5 mm.	7,5 mm.	9,3 mm.	9 mm.
11 »	5,5 »	6 »	7 »	6,8 »
15 »	—	9 »	11 »	—
16 »	—	—	10,5 »	—
12,5 »	—	7,5 »	8 »	—
10,5 »	—	6 »	—	7 »
10 »	—	5,5 »	—	5,5 »
15 »	—	7,8 »	—	8,8 »

Vorkommen. In einem mergeligen Kalk an der grossen Tomba, Quellfluss des Olenek unterhalb der Einmündung der Welingna, 1873 von Czekanowski gesammelt. Zugleich

kommen vor *Calymene Blumenbachii, Bumastus barriensis*, *Phacops elegans* Ss. et Boeck (oder eine Form von *P. Stokesi*), *Leptocoelia Duboysi* Vern. sp., *Orthis Davidsoni* Vern. und eine Menge gewöhnlicher obersilurischer Korallen. Das Gesammtbild der Ablagerung entspricht vollkommen dem der Jördenschen Schicht G_1, der tiefsten Schicht des Obersilurs in Estland, mit dem diese Ablagerung daher zusammenzustellen ist.

Erklärung der Figuren. T. I, F. 20 grosses Exemplar der rechten Schaale von oben, am Bauchrand jederseits ein länglicher Eindruck mit 2 — 3 zusammengedrängten Poren oder eingedrückten Punkten; Fig. 21 Ansicht einer rechten Schaale vom Bauchrande mit mehrfachen eingedrückten Punkten, die sich in die vordere und hintere Randfurche hinein fortsetzen; F. 22 ganzes Exemplar vom Bauchrande, um die Wölbung zu zeigen, an der linken Seite sieht man das Uebergreifen der rechten Schaale über den zum Theil blosgelegten Umschlag der linken Schaale. Alle Stücke im Museum der Akademie der Wissenschaften.

3. Vom Ural.

Aus dem Museum des Berginstituts erhielt ich eine ganze Anzahl Kalksteinproben mit Leperditien, die alle vom Westabhang des Ural stammen, aus dem Gebiet südlich von Slatoust. Die Stücke gehören alle dem Niveau des *Pentamerus baschkiricus* an, demselben, aus dem ich schon früher die *Leperditia Barbotana* m. und *Isochilina biensis* Grünw. (s. meine Leperditien p. 6) erhalten hatte. An vielen Orten scheint das Gestein fast ausschliesslich Leperditien zu führen. Das genannte Niveau ist stratigraphisch noch nicht sicher festgestellt. M. v. Grünewaldt hatte nachgewiesen dass es viel Uebereinstimmung in den Brachiopoden mit den obersten böhmischen Stufen F und G zeige, und E. Kayser[1]) hatte in Folge dessen das Uralische Obersilur mit seinem *Hercyn* verbunden.

Unsere Leperditien können zur genaueren Niveaubestimmung der beregten Ablagerung wenig beitragen. Die häufigste Art, *Lep. Barbotana* m., ist ganz auf den Ural beschränkt, ebenso *Isochilina biensis* Grünew.; dazu kommt jetzt noch die ebenfalls rein uralische neue *Leperditia Mölleri* m. und eine eigenthümliche Form unserer *Lep. grandis* Schrenck von Oesel, die ich ihrer vielfachen Uebereinstimmung mit der genannten Art wegen nur als Varietät *uralensis* und nicht als besondere Art abtrennen kann, wie nach dem sonstigen Charakter der Fauna zu erwarten wäre. Diese letztere Art nun könnte zur Anknüpfung mit unserem höchsten öselschen Obersilur dienen.

Leperditia Barbotana F. Schm.

1873. *Leperditia Barbotana* F. Schmidt, Russ. Silur. Leperd. p. 12, F. 7—9.

Diese Art liegt uns in grosser Zahl von Exemplaren von verschiedenen Fundorten des genannten Gebiets vor, namentlich von Usjanski Sawod; rechtes Ufer der Kaga ober-

1) Kayser, Fauna der ältesten Devonablagerungen des Harzes p. 273.

halb Kaginski Sawod (hier von etwas flacher Form); rechtes Ufer der Belaja 1 Werst oberhalb Kuchtura, von hier mehrere ganze Exemplare und einzelne Schaalen von auffallender Grösse, von denen eine 26 mm. hoch und 35 mm. lang, die andere 28 mm. hoch und 42 mm. lang ist (die Anschwellungen der Hinterseite ragen bedeutend über den Schlossrand herüber); linkes Ufer der Belaja unterhalb Kaginski Sawod; endlich linkes Ufer des Juresenj 1 Werst unterhalb Alexandrowka, von wo besonders zahlreiche Exemplare vorliegen.

Da die Formen bis auf ihre bisweilen bedeutendere Grösse durchaus typische sind, so habe ich keinen Grund mich weiter auf Beschreibung und Abbildung einzulassen.

Leperditia Mölleri n. sp. T. I, F. 23 — 25.

Aus der nämlichen Gegend wie die vorige Art liegen mir einige Exemplare, aber freilich nur in getrennten Schaalen, einer kleinen neuen Art vor, die ich dem um die Geologie des Ural so verdienten Prof. V. Möller zu Ehren benenne, durch den ich übrigens ja auch all mein neues uralisches Material erhalten habe.

Die Art erinnert in ihrer Form etwas an die vorhergehende, ist aber viel kleiner, schief eiförmig-viereckig, vorn und hinten steil ansteigend und hier mit einem deutlichen Randsaum versehen; nach hinten deutlich verbreitert. Der Bauchrand steigt nach hinten deutlich an und verläuft in mässigem Bogen. Die grösste Höhe hinter der Mitte; bei der rechten Schaale ist sie etwas länger, bei der linken etwas kürzer als die Schlosslinie. Beide Schaalen hoch gewölbt; die Wölbung nach hinten am stärksten, aber nicht so stark hervorquellend wie bei *L. Barbotana.* Die hintere Wölbung mit grösseren und kleineren Tuberkeln besetzt, die nach vorn und zum Bauchrande hin sich verlieren; bei grösseren und älteren Exemplaren (F. 24) sind sie indessen auch hier zu erkennen. Die Randfurche, die vorn und hinten deutlich ist, verliert sich am Bauchrande, der an beiden Schaalen steil geneigt abfällt. Die linke Schaale zeigt einen deutlichen glatten Umschlag (F. 25 *b*), der längs dem ganzen Rande sich hinzieht. Der Augentuberkel tritt deutlich hervor und ist nach vorn von einem deutlichen winklig vorspringenden netzadrigen Augenfleck umgeben (F. 23 *a*), der von dem runden Mittelfleck durch einen schmalen Zwischenraum getrennt ist. Die Partie um das Auge pflegt flach und glatt zu sein; hinter demselben erhebt sich, deutlich abgesetzt, die hintere tuberkulirte Anschwellung.

Durch die starke Tuberkulirung der Hinterseite zeichnet sich unsere Art vor allen anderen bekannten Leperditien aus, und konnte daher kürzer behandelt werden.

Maasse:

	Länge	Schlosslinie	Grösste Höhe	Höhe vorn	Höhe hinten
Rechte Schaale	15 mm.	10,5 mm.	11 mm.	7 mm.	10,5 mm.
	6 »	4,2 »	4,5 »	3 »	4 »
Linke Schaale	10 »	—	7,2 »	—	—
	9 »	6,4 »	6,2 »	5 »	6 »
	8,2 »	5,4 »	5,2 »	4,2 »	5 »

Vorkommen. In dem nämlichen Niveau und derselben Gegend wie die vorige Art; bei den Serginskie Datschie, noch von Barbot de Marny mitgebracht; am linken Ufer der Belaja bei Kaginski Sawod, endlich die meisten Exemplare in einem weissen krystallinischen Kalk auf dem Wege von Ailina zum Satkinski Sawod.

Erklärung der Figuren. T. I, F. 23 rechte Schaale etwas vergrössert *a* von oben, *b* vom Bauchrand; Querschnitt entsprechend der F. *a*; F. 24 *a*, *b*, *c* dieselben Ansichten der linken Schaale, bei *b* der Umschlag deutlich; beide Stücke 4¾ W. von Ailina auf dem Wege zum Satkinski Sawod; F. 25 ein grosses Exemplar der rechten Schaale (natürl. Gr.) auch vorn tuberkulirt, vom linken Ufer der Belaja bei Kaginski Sawod. Alle Exemplare aus dem Museum des Berginstituts.

Leperditia grandis Schrenck, var. **uralensis** m. T. I, F. 26, 27, 28.

Aus dem nämlischen Gebiet wie die beiden vorgenannten Arten liegen mir drei Exemplare der rechten Schaale und eins der linken vor, die ich wenigstens vorläufig in die nächste Beziehung zu unserer öselschen *L. grandis* bringen muss. Besonders auffallend ist die Aehnlichkeit bei der linken Schaale; auch hier eine deutliche Zunahme der Höhe nach hinten, so dass die grösste Höhe erst kurz vor der hinteren Höhe (über dem hinteren Ende der Schlosslinie, die bei *L. grandis* mit der grössten Höhe ziemlich zusammenfällt) erreicht wird. Die Anschwellung längs der hinteren Hälfte der Schlosslinie ist ebenfalls vorhanden; die ganze Wölbung ist ebenfalls längs dem Bauchrand am stärksten (in der Mitte nur wenig ansteigend) und, was besonders ins Auge fällt, der Umschlag am Bauchrande erscheint ebenfalls nur in der Mitte desselben und verliert sich nach vorn und hinten, so dass er unter dem beiderseitigen Randsaum nicht zu erkennen ist. Hierdurch unterscheidet sich unsere Form von der nahe verwandten *L. Nordenskjöldi* von Waigatsch, mit der ich sie sonst wohl verbunden haben würde.

Die rechte Schaale unterscheidet sich von der typischen Form, die eine gleichmässige Höhenzunahme nach hinten zeigt, durch stärkeres Hervortreten der mittleren Partie des Bauchrandes, die bisweilen fast als stumpfer Vorsprung erscheint (F. 27); auch in der Wölbung der rechten Schaale ist deren stärkere Anschwellung in der Mitte hervorzuheben. Am Bauchrande gehen die vordere und hintere Randfurche, wie bei der typischen Form, in einen feinen eingedrückten Punkt oder einer Pore aus (F. 26 *b*), die ja allen verwandten Arten zukommt. Die *Isochilina? formosa* Barr. (Syst. sil. Boh. Vol. I suppl. p. 534, T. 34, F. 1 — 3), an die man bei der sonstigen nahen Verwandtschaft der uralischen und böhmischen Silurformen sogleich denken müsste, zeigt bei ziemlicher Uebereinstimmung des Umrisses einen schwächeren Abfall der Wölbung zum Bauchrande, auch fehlen ihr die eingedrückten Punkte am inneren Ende der Randfurchen, was vielleicht auch nur vom Erhaltungszustand des Exemplars herrührt.

Maasse:

	Länge	Höhe grösste	vorn	hinten	Schlosslinie
Rechte Schaale	13,2 mm.	8,8 mm.	5,8 mm.	7,5 mm.	10 mm.
	12 »	8 »	5,2 »	7 »	8,5 »
	10,5 »	7 »	4,8 »	—	7 »
Linke Schaale	16 »	9 »	6,8 »	8 »	11 »

Vorkommen. Die vorliegenden Stücke stammen aus einem dunkelgrauen Kalk vom Ufer der Belaja unterhalb Katschukowa; das Gestein stimmt mit dem grauen Kalk in dem die vorigen Arten aufliegen überein, doch sind sie mit ihr nicht zusammen gefunden worden.

Erklärung der Figuren. T. I, F. 26 *a, b, c* Exemplar der rechten Schaale, *a* von oben, *b* von der Bauchseite mit den Poren am Ende der Randfurchen, *c* Querdurchschnitt, der Stellung von *a* entsprechend; F. 27 Exemplar der rechten Schaale mit stärker hervortretender Wölbung in der Mitte; F. 28 *a, b, c* linke Schaale, bei *b* der nur die Mitte einnehmende Umschlag des Bauchrandes zu sehen. Alle Exemplare im Museum des Berginstituts.

4. Von der Insel Waigatsch.

Von der Expedition des Prof. Baron A. Nordenskjöld an die Jenisseimündung im Jahre 1875 erhielt ich durch Prof. G. Lindström in Stockholm eine Portion grauer splittriger Kalksteinproben, erfüllt von Leperditien, die vom Cap Grebennyi auf der Insel Waigatsch stammen. Die übrigen Petrefakten — es sind noch Brachiopoden, Korallen und Trilobiten vorhanden — sind noch nicht bestimmt; es kann daher über das Niveau der erwähnten Ablagerung nichts Genaueres gesagt werden[1]). Immerhin ist es äusserst wahrscheinlich, dass wir es hier ebenfalls mit einer dem *Hercyn* E. Kayser's zugehörigen Ablagerung aus dem Gränzgebiet des Silur und Devon zu thun haben. Fast alle Exemplare gehören einer Art an, die ich ihrem Entdecker zu Ehren *L. Nordenskjöldi* nenne; ausserdem fand sich noch ein wohl charakterisirbares Exemplar einer anderen, neuen, der vorigen verwandten Art, *L. Waigatschensis* n. sp., und endlich eine dritte Form mit stark entwickeltem Buckel oder Vorsprung an der hinteren Seite, die aber nur in unvollständigen Bruchstücken vorliegt.

Leperditia Nordenskjöldi n. sp. T. I, F. 29 — 32.

Es liegen uns eine grosse Zahl (über 100) wohlerhaltene aber stets getrennte Exemplare der rechten sowohl als der linken Schaale vor, nach denen die Charaktere der Art

1) Soeben erhalte ich den Artikel von Prof. G. Lindström, Silurische Korallen aus Nord-Russland und Sibirien, in Bihang till k. svenska Vet. Akad. Handl. Bd. 6, № 18, p. 6 (1882), wo von der erwähnten Localität *Proetus sconspersus* Ang., *Atrypa didyma*, *Favosites Forbesi* Edw., *Syringopora fenestrata* Lindstr. angeführt und der grösste Theil der Schichten als obersilurische bezeichnet sind.

sehr wohl festgestellt werden konnten. Sie steht, wie schon früher erwähnt, unserer schon bekannten *L. grandis* sehr nahe, daher wird es erlaubt sein, die Beschreibung mehr vergleichend zu halten.

Umriss ziemlich oval, fast trapezförmig; der Hinterrand springt etwas stärker vor als der Vorderrand; der Bauchrand sanft gewölbt, in der Mitte am meisten vorspringend, darin verschieden von *L. grandis*, die eine starke Verbreiterung nach hinten zeigt. Bei unserer Art ist die Höhe vorn nur wenig kürzer als hinten, während bei jener die grösste (die bei unserer Art in der Mitte liegt) und die hintere Höhe fast zusammenfallen. Am Vorder- und Hinterrande verläuft ein deutlicher Randsaum, der durch eine Furche vom gewölbten inneren Theil der Schaale geschieden ist; auf der Bauchseite verliert sich dieser Randsaum und die Schaale fällt direkt und steil zum Bauchrande ab. Die stärkste Wölbung beider Schaalen verläuft längs dem Bauchrande, dabei zugleich in der Mitte sich am höchsten erhebend; der Augentuberkel (ohne besonderen Hof) und der Mittelfleck (meist erhaben) treten deutlich hervor; eine besondere Anschwellung längs der hinteren Hälfte des Schlossrandes (der die Höhe immer übertrifft) der linken Schaale, wie bei *grandis* und ihrer uralischen Varietät, ist nicht vorhanden. Die vordere und hintere Randfurche enden auf der rechten Schaale am Bauchrande in einem punktförmigen vertieften Eindruck; der Bauchrand der linken Schaale zeigt einen deutlichen Umschlag, der, verschieden von *L. grandis*, sich unter dem ganzen Bauchrande hinzieht und beiderseits schon unter dem flachen Randsaum beginnt. Die Schaale erscheint dem unbewaffneten Auge ganz glatt, zeigt aber unter der Loupe feine zerstreute punktförmige Tuberkeln.

Die Variationen in der Form sind nicht bedeutend; der Bauchrand erscheint gewölbter oder geradliniger und darnach der ganze Umriss mehr oval (F. 30, 31) oder mehr trapezförmig (F. 29, 32). Aehnlichkeiten mit andereren Arten als mit *L. grandis* und namentlich deren uralischen Varietät sind nicht vorhanden. Gern hätte ich eine Vereinigung unserer Art mit der genannten Varietät versucht, um dadurch wo möglich die Ablagerung von Cap Grebennyi in nähere Beziehung zu den uralischen Silurgebilden zu bringen, aber namentlich das verschiedene Verhalten der linken Schaale der var. *uralensis* mit ihrem verkürzten Umschlag und der Anschwellung am Schlossrande hielt mich davon ab, welche beide Kennzeichen der typischen *L. grandis* entsprechen. Ueber die Beziehungen zu *L. Wiluiensis* m. und *formosa* Barr. habe ich mich schon früher ausgelassen.

Maasse:

	Länge	Höhe grösste	Höhe vorn	Höhe hinten	Schlossrand
der rechten Schaale	17 mm.	9,8 mm	7,3 mm.	7,8 mm.	11,8 mm.
	13,2 »	8 »	6,1 »	7,1 »	9,8 »
	12,5 »	7,8 »	5,5 »	6,8 »	8 »
	11 »	6 »	4,8 »	5,2 »	7 »
	7 »	4,2 »	2,8 »	3,8 »	5 »
der linken Schaale	15 »	9 »	6 »	8 »	10,5 »

Maasse:

	Länge	grösste Höhe	vorn	hinten	Schlossrand
der linken Schaale	15 mm.	8,8 mm.	6,2 mm.	7,5 mm.	10,2 mm.
	13,2 »	7,2 »	5,8 »	7 »	9 »
	12 »	6,4 »	5 »	5,8 »	8 »
	11 »	6,2 »	5 »	5,7 »	8 »
	8 »	4,8 »	3,6 »	4,2 »	5,4 »

Erklärung der Figuren. T. I, F. 29 *a, b, c* gestreckte, trapezoidale Form der rechten Schaale, *a* von oben, *b* vom Bauchrande mit den Poren, *c* von der Seite; F. 30 kürzere ovale Form der rechten Schaale; F. 31 linke Schaale der ovalen Form, unter *b* vom Bauchrande gesehen, mit dem Umschlag; F. 32 gestreckte Form der linken Schaale mit zum Theil fehlender Schaale und daher deutlicher hervortretendem Augen- und Mittelfleck.

Leperditia Waigatschensis n. sp. T. I, F. 33 *a, b, c*.

Es ist nur eine rechte Schaale dieser Art in der grossen Stockholmer Lepergitiensendung von Cap Grebennyi auf Waigatsch enthalten. Diese zeigt aber so viel Eigenthümliches dass ich mich nicht scheue darnach eine neue Art aufzustellen, die übrigens in eine und dieselbe Gruppe mit der vorigen und *L. grandis* gestellt werden muss, weil beiderseits am Bauchrande eine punktförmige Vertiefung vorhanden ist und auch die Wölbungsverhältnisse entsprechen.

Leperditia Waigatschensis ist ausgezeichnet durch ihre kurze Form; der Vorder- und Hinterrand steigen steil an und divergiren nur wenig von den Endpunkten des Schlossrandes aus. Die Schaale steigt vom Schlossrande allmählich an und springt nach vorn in bauchiger Wölbung über den Bauchrand vor, vor dessen Mitte sie ihre höchste Wölbung erreicht. Der äusserste Punkt der Wölbung steht um 9,5 mm. vom Schlossrande ab, ebenso weit als die Länge des Schlossrandes beträgt, während die grösste Höhe der Schaale nach der Contour des Bauchrandes gemessen nur 8,5 mm. beträgt. Die vordere Höhe erreicht 6 mm., die hintere 8 mm., die grösste Länge vom äussersten Vorsprung des Vorderrandes zu dem des Hinterrandes 12,5 mm. Das Auge ist dedtlich, ohne netzadrigen Hof; auch der Mittelfleck zu erkennen. Der Vorder- und Hinterrand sind an der Bauchseite nicht getrennt, sondern gehen in einander über, da die Randfurche um die ganze Schaale, ausser am Schlossrand, herumgeht; beiderseits am Bauchrande in geringem Abstand von einander, etwa den Stellen der vorderen und hinteren Höhe entsprechend, in der Randfurche eine punktförmige Vertiefung, wie bei der vorigen Art und deren Verwandten.

Erklärung der Figuren. T. I. F. 33 *a* rechte Schaale von oben, *b* vom Bauchrande, mit den Poren, *c* von der Seite, um die übergreifende Wölbung zu zeigen.

II. Die Crustaceenfauna der Eurypterenschichten von Rootziküll auf Oesel.

Schon im Jahre 1866 habe ich die geognostischen Verhältnisse der genannten interessanten Ablagerungen besprochen, bei Gelegenheit der Beschreibung der in derselben vorkommenden Cephalaspiden. Die Arbeit erschien in den Verhandlungen der mineralogischen Gesellschaft 1866 und ist wenig bekannt geworden. Auch habe ich in der geognostischen Einleitung zu meiner Trilobitenarbeit die Eurypterenschichten erwähnt. Hier nur so viel:

Die Eurypterusschichten bestehen aus feinkörnigen Platten-Kalken oder Dolomiten, mit einer durchaus eigenthümlichen Fauna; diese werden von anderen, körnigen Kalken bedeckt, welche die gewöhnliche Fauna der obersten silurischen Schichten zeigen. Sie (die Eurypterusschichten) haben eine ziemlich weite Verbreitung im westlichen Oesel, es ist aber bisher nur unter Rootziküll, an der W.-Küste der Insel, im Kielkondschen Kirchspiel, die ganze Fülle dieser Fauna aufgeschlossen worden. Hier sind es Dolomite in denen die Chitinbedeckung von *Eurypterus* und *Pterygotus* sich vortrefflich erhalten hat, ebenso die Schwanzstacheln einer *Ceratiocaris* und Schilder der beiden Cephalaspiden *Thyestes verrucosus* Eichw. und *Tremataspis Schrenckii* m. und die Schaalen der kleinen *Lingula nana* Eichw. Die Schaalen der übrigen Petrefakten sind zerstört, namentlich die ziemlich selten vorkommenden Hemiaspiden: *Bunodes lunula* Eichw., *rugosus* Nieszk. und *Schrenckii* Nieszk. sp., sowie *Pseudoniscus aculeatus* Nieszk. und die Schaalen des *Orthoceras tenue* Eichw. Alle die genannten Formen zeigen an Stelle der zerstörten Schaale nur einen schwarzen Ueberzug der Steinkerne, der an die ehemals vorhanden gewesene organische Materie erinnert. In der Umgebung von Rootziküll liegen die Plattendolomite mit der Eurypterenfauna ganz oberflächlich, namentlich beim Gesinde Wita, wo sich ein paar kleine Steinbrüche finden, in denen vorzugsweise gesammelt worden ist; aber auch bei der Kirche

selbst, da hier beim Graben eines Brunnens das typische Erypterengestein zum Vorschein kam. Auf einige Quadratwerst Ausdehnung wird man hier an beliebiger Stelle Eurypterenbrüche anlegen können.

Weiter im Westen, auf dem Wege nach Kusnem tritt etwa 7 Werst von Rootziküll das Eurypterengestein wieder auf, an einer Brücke über einen meist ausgetrockneten Bach (unweit des Gesindes Wessiko Maddis). Hier ist es kalkiger Natur, nicht dolomitisch. Eurypteren wurden nicht viel gefunden, dafür aber sind die dünnen mergeligen Platten interessant, die das Eurypterengestein bedecken; sie sind ganz erfüllt von *Platyschisma helicites* Sow. sp., *Leperditia phaseolus* His. und verschiedenen mikroskopischen Fischschuppen, unter denen *Coelolepis Schmidti* Pand. die Hauptrolle spielt; noch weiter westlich habe ich Eurypteren bei Attel in den gewöhnlichen Korallenkalken der Zone K gefunden und östlich Spuren davon, ebenfalls in der nämlichen Zone K bei Magnushof, Uddafer und Ladjal. Ich muss ausdrücklich hervorheben, dass bei uns die Eurypterenschichten nicht die allerhöchsten Obersilurschichten bilden, sondern, wie gesagt, meist in Plattenkalken und Dolomiten vorkommen, die noch von anderen Korallen, Brachiopoden und Fischreste führenden Schichten bedeckt werden. Das Nämliche scheint auf Gotland der Fall zu sein, wo es mir im Jahre 1858 gelang bei Hammarudd unweit Oestergarn an der Basis der dortigen höchsten (südgotländischen) Obersilurstufe Plattenkalke mit Eurypterenresten am Strande ausgeworfen zu finden, die augenscheinlich in der Nähe auf dem Meeresboden anstehen.

Ebenso sind auch in Podolien am Dniestr und seinen Nebenflüssen Eurypteren in Plattenkalken gefunden, die an der Basis der dortigen höchsten Obersilurschichten liegen (s. meine Bemerkungen über die podolisch-galizische Silurformation. St. Peterb., Verh. d. mineral. Gesellsch. 1875—76, p. 7, 13). An beiden Orten, auf Gotland und in Podolien ist die nämliche Art, *Eurypterus Fischeri* Eichw., aufgefunden wie bei uns auf Oesel; andere begleitende Formen, wie bei uns, sind hier nicht bekannt. Auf den brittischen Inseln ist es anders. Hier sind sowohl Eurypteren und Pterygotus als andere in die Familie der Eurypteriden gehörige Gattungen, wie *Slimonia* und *Stylonurus*, z. Th. mit zahlreichen Arten aufgefunden. Durchgängig scheint das Niveau aber ein etwas höheres zu sein, da uns die genannten Formen vorzüglich aus den allerhöchsten silurischen (den Tilestones) oder aus den tiefsten Devonschichten mit *Cephalaspis* und *Pteraspis* (wie der *Arbroath pavingstone* in Forfarshire mit *Pterygotus anglicus*) angeführt werden. Am nächsten verwandt unseren Eurypterenschichteu sind die *Passage beds* (Downton sandstone) von Kington in Herefordshire, wo, ganz wie bei uns, *Pterygotus gigas*, *Eurypterus linearis* Salt. (den ich mit *E. Fischeri* Eichw. für identisch halte) und *Platyschisma helicites* zusammen vorkommen.

Die an Eurypteriden so reichen schottischen Schiefer von Lesmanhago in Lanark-

1) S. Siluria 1867 (p. 34) und Palaeontogr. soc. vol. 25 (1871) Merostomata III, p. 97.

shire (Siluria p. 160, Palaeontogr. soc. 22 Merostomata II, p. 45 ff.) nehmen ungefähr dieselbe geologische Position ein wie unsere Eurypterusschicht, auch *Platyschisma helicites* kommt dort vor; die Eurypteridenarten sind aber durchweg verschieden.

Die nordamerikanische Waterlimegruppe, in welcher der erste Eurypterus, *E. remipes* Dek., und nachher noch mehrere verwandte Arten nachgewiesen wurden, ist noch mehr als unser Eurypterenhorizont durch das fast ausschliessliche Vorherrschen dieser eigenthümlichen Crustaceengruppe, der Eurypteriden, ausgezeichnet. Die Arten ergeben sich zwar durgweg jetzt als verschieden, der geologische Horzont (über dem Niagarakalk) stimmt aber vollständig überein und ich glaube, dass man hierin einen Grund sehen kann, das eigentliche Obersilur in N.-Amerika mit der Waterlimegruppe und den Tentaculitenschichten abzuschliessen, da diese ein gutes Aequivalent für die dem Ludlow entsprechenden Schichten Europa's abgeben. Was darauf folgt — die untere Helderberggruppe u. s. w. — würde mit dem Hercyn Kayser's den böhmischen Etagen F — H, dem uralischen Obersilur und in England den Cephalaspisschichten gleichzustellen sein, die ja von dem eigentlichen alten rothen Sandstein mit *Pterichthys*, *Coccosteus* u. s. w. scharf getrennt sind und überall da fehlen, wo die Hercynschichten zur Ausbildung kommen. Eigentlich sind mir nur an zwei Orten die das Obersilur begränzenden Cephalaspis- und Pteraspisschichten in voller Ausbildung bekannt, in England und in Galizien (s. auch meinen Artikel über Pteraspis in Verhandlungen der mineralog. Gesellschaft. St. Petersburg 1873).

Hiermit glaube ich über die Stellung unseres Eurypterenlagers zu anderen verwandten Bildungen, die ja ohnedies gut genug bekannt sind, mich ausreichend ausgesprochen zu haben. Bei den einzelnen Gattungen kommen wir ohnehin noch auf deren geologisches Alter zurück. Es ist immerhin wichtig, noch darauf hinzuweisen, dass am Ende der Silurzeit Plattenkalke und Schiefer in einem ausgedehnten Gebiet zur Ausbildung gelangt sind, die bei völligem Ausschluss von Trilobiten eine eigenthümliche Fauna von grossen Crustaceen, namentlich *Erypterus*, *Pterygotus* und verwandten Formen einschliessen. Auch Korallen, Gastropoden, Acephalen fehlen fast gänzlich; von Brachiopoden kommen nur kleine Lingulen vor, was, wie der Charakter der Absätze selbst, auf eine Tiefseebildung hinweist, mit welcher auch die weite Verbreitung der erwähnten Absätze zusammenhängt.

Unsere öselschen Eurypterenschichten wurden zuerst im Jahre 1852 von A. v. Schrenck untersucht und ausgebeutet, der auch im nämlichen Jahre eine kurze Angabe darüber in seiner Uebersicht des oberen silurischen Schichtensystems Liv- und Estlands im Archiv für Naturkunde Liv- Est- und Kurlands 1. Ser. Bd. I, p. 35, 86 machte; im Jahre 1853 war Eichwald dort, der im Bull. de Moscou 1854 p. 48 — 51, 100 — 110 schon eine recht ausführliche Schilderung der dortigen eigenthümlichen Fauna gab. In den Jahren 1853, 54 und 55 war ich selbst in der Gegend und studirte namentlich die räumliche Ausbreitung der Eurypterenschicht. Im Jahre 1857 besuchte ich Rootziküll zusammen mit Dr. Nieszkowski, der auf seine eigenen wie die früher von Schrenck und mir gesammelten Mate-

rialien seine Beschreibung des Eurypterus[1]) und der übrigen dortigen Crustaceen[2]) stützte, bei der auch noch die von mir im Jahre 1858 angesammelten Stücke zur Verwerthung kamen. Alles bis zu dieser Zeit von uns gesammelte Material befindet sich in der Sammlung der Dorpater Naturforschergesellschaft, die Eichwald'sche Ausbeute gegenwärtig im geologischen Museum der Petersburger Universität. Nach meiner sibirischen Reise in den Jahren 1859 bis 1862 besuchte ich Rootziküll wieder a. 1863 zusammen mit dem gegenwärtigen Professor zu Kasan Dr. Baron Fr. v. Rosen. Wir sammelten diesmal drei Tage. Unsere Ausbeute wurde zwischen dem Dorpater Universitätsmuseum und der Sammlung des Dr. Volborth in St. Petersburg getheilt, die gegenwärtig in den Besitz der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften übergegangen ist. 1865 sammelte ich mit dem amerikanischen Consul in Reval Mr. Stacy, dessen Sammlung später, nach seinem Tode, dem Revalschen Museum einverleibt wurde. Diesmal wurde auch den Fischresten besondere Aufmerksamkeit geschenkt, und als Resultat derselben erschien meine früher erwähnte Arbeit über *Thyestes verrucosus* und *Tremataspis Schrenckii* in den Verhandlungen der hiesigen mineralogischen Gesellschaft 1866. Mit dem Jahre 1872 begann, mit Erneuerung meiner Studien in unserem Silurgebiet überhaupt, auch eine erneuerte Ausbeutung der Erypterusschichten. Ich bin fast jährlich am Platze gewesen und habe reichhaltige Materialien eingesammelt, die ausschliesslich im Revaler Museum niedergelegt sind, in dessen provinziell-naturhistorischer Abtheilung, die im Auftrage des Vereins für Naturkunde Estlands (Filialverein der Estländischen litterärischen Gesellschaft), zunächst was die silurischen Sammlungen betrifft, unter meiner Direction sich befindet. Auch in auswärtige Museen sind in letzter Zeit manche schöne Stücke aus unserem Eurypterenlager gelangt, zum Theil durch Sendungen meinerseits, vorzüglich aber durch die auswärtigen Fachgenossen, die ich an Ort und Stelle geführt habe, namentlich Dr. Linnarsson, Professor Dames und Professor W. Brögger. Meine Ausbeute an Ort und Stelle wurde wesentlich unterstützt durch den Bauern Wita Jan, den nächsten Anwohner des Steinbruchs, der schon eine grosse Geschicklichkeit im Herausschlagen guter Exemplare aus den dortigen weichen Platten-Dolomiten erlangt hat.

I. Fam. Hemiaspidae.

Ich beginne mit dieser kleinen Gruppe, deren Vertreter ihrer Seltenheit wegen lange nicht so bezeichnend für unsere Ablagerung sind als *Eurypterus* und *Pterygotus*, aus rein

1) Der *Eurypterus remipes* aus den obersilurischen Schichten der Insel Oesel in Archiv für Naturkunde Liv- Est- und Kurlands. Ser. I, Bd. II, p. 299—345, T. I, II (1858).

2) Zusätze zur Monographie der Trilobiten der Ostseeprovinzen. Archiv ebenda p. 377 — 383, T. I, F. 19, T. II, F. 12—15. (1859).

äusserlichen Gründen. Die hierher gehörigen Figuren haben auf der ersten Tafel mit den Leperditien am bequemsten Platz gefunden, und daher lasse ich auch die Beschreibung gleich hinter diesen folgen.

Dr. H. Woodward hat die Gattung *Hemiaspis* im Jahre 1865 aufgestellt und später ausführlich beschrieben, namentlich in seinem Monograph of the british fossil Crustacea of the order Merostomata IV, p. 174 ff. in Palaeontograph. society Vol. 26, 1872. Dort weist er auch auf die nahe Verwandtschaft unserer öselschen Gattungen *Bunodes* Eichw., *Exapinurus* Nieszk. und *Pseudoniscus* Nieszk. mit *Hemiaspis* hin, und bringt alle diese Gattungen in die Ordnung der *Eurypterida*, freilich als abweichende Glieder derselben, die den Uebergang zu den ächten *Xiphosuren* vermitteln.

Von unseren ebenerwähnten öselschen Gattungen wurde *Bunodes* schon 1854 von Eichwald aufgestellt (Bull. de Mosc. 1854, I, p. 107), der damals über die systematische Stellung noch ganz im Unklaren war, indem er zwischen Fischen und Crustaceen schwankte; später (Bull. de Mosc. 1857, p. 337) weist er ihr eine Uebergangsstelle zwischen Xiphosuren und Decapoden an.

In seinen Zusätzen zur Monographie der Trilobiten der Ostseeprovinzen im Archiv für Naturkunde Liv-, Est- und Kurlands 1. Ser. Bd. II, p. 377 — 383 (1859) beschreibt Dr. J. Nieszkowski im Anhang die Gattung *Bunodes* genauer und stellt aus der nämlichen Lokalität Rootziküll noch zwei andere verwandte Gattungen auf, *Exapinurus* und *Pseudoniscus*, ohne sich übrigens über die systematische Stellung dieser Gattungen näher auszusprechen. In der Lethaea ross. anc. per. p. 1444 — 47 (1860) kommt auch Eichwald nochmals auf unsere Gattungen zu sprechen und bringt sie diesmal schon direkt (wenn auch nicht ganz sicher) bei den Trilobiten, und zwar bei den Remopleurideen unter, wahrscheinlich veranlasst durch den trilobitenähnlichen Habitus der Gattung *Pseudoniscus* Nieszk.

Im Sommer 1875 hatte ich, wie in der Einleitung S. 3 erwähnt, Gelegenheit mich mit Dr. Woodward im British museum über unsern Gegenstand auszusprechen. Er demonstrirte mir die nahe Verwandtschaft von *Hemiaspis* und *Bunodes* und forderte mich auf, unsere neu hinzugekommenen Materialien zu verarbeiten. Nach meiner Rückkehr machte ich mich auch daran, brachte aber die Arbeit nicht zum Abschluss. Nur in der Sitzung der geologischen Abtheilung der Petersburger Naturforschergesellschaft am 21. Febr. 1876 machte ich eine kurze Mittheilung[1]) über meine Untersuchungen, in der ich die Gattungen *Bunodes* Eichw. und *Exapinurus* Nieszk. zusammenziehe und auf die nahe Verwandtschaft dieser Formen mit *Hemiaspis* Woodw. aufmerksam mache, der kaum generisch von ihnen zu trennen ist. *Pseudoniscus* Nieszk. wird als besondere Gattung beibehalten.

---

1) Труды Санктпетербургскаго Общества естествоиспытателей Т. VII стр. LV.

Alle genannten Formen vereinige ich in eine Gruppe *Hemiaspidae*, die ich zwischen die Trilobiten und Eurypteriden stelle. Auf diesem Standpunkte befinde ich mich auch gegenwärtig, nachdem ich alles bei uns vorhandene Material sorgfältig durchgearbeitet habe. Die Hemiaspiden als Mittelgruppe zwischen Trilobiten und Eurypteriden hinzustellen macht jetzt keine Schwierigkeiten mehr, seit durch Walcott's Arbeiten die Stellung der Trilobiten innerhalb der Merostomata, zu denen bekanntlich auch die Eurypteriden und Xiphosuren gehören, gesichert ist.

Die *Hemiaspiden* stehen nun den Trilobiten bedeutend näher als den Eurypteriden, bei denen sie von Woodward untergebracht wurden. Am Kopf sind deutliche Spuren der Gesichtsnäthe vorhanden, die convergirend geradlinig vom Hinter- zum Vorderrand verlaufen s. T. I, F. 34, während solche bei den Eurypteriden fehlen; dagegen fehlen wie bei den Trilobiten die kräftig entwickelten Ruderfüsse nebst dem Metastoma. Die Augen fehlen gänzlich oder sind nur in unsicheren Andeutungen erhalten (bei den englischen Arten von *Hemiaspis* — was Nieszkowski l. c. T. II, F. 15 als Ausschnitt für das Auge bei *Pseudoniscus* darstellt und Woodward l. c. p. 177 F. 65 noch stärker in diesem Sinne präcisirt — kann ich nicht bestätigen). In dieser Beziehung würden sich ebenfalls bei einigen blinden Trilobiten eher Anknüpfungspunkte finden lassen als bei den Eurypteriden, die immer deutliche Limulusartige Augen haben.

Der Mittelleib (Thorax in Woodward's Auffassung) besteht aus 6 Gliedern, die vollkommen den Bau wie bei den Trilobiten zeigen; es ist eine deutliche Trilobitation, also Trennung in Rhachis und Pleuren vorhanden. Von den freien Thoraxplatten, die Limulus und den Eurypteriden zukommen, ist keine Spur vorhanden. Die Thoraxglieder sind auf der Bauchseite nicht geschlossen.

Der Hinterleib (Abdomen) besteht aus drei freien Gliedern und einem Schwanzstachel (telson). Das erste Abdominalglied oder das sechste Leibesglied ist bei *Pseudoniscus* einfach und scheidet sich durch die von hier an veränderte (mehr nach hinten) Richtung der Pleuren vom Thorax (T. I, F. 47, 48); bei *Bunodes* (T. I, F. 38, 41, 43) und *Hemiaspis* (Woodw. l. c. p. 177, T. 64) erscheint das sechste Glied wie aus zwei Gliedern verwachsen; der vordere Theil zeigt noch deutliche Pleuren, während diese dem hinteren fehlen, wie auch den Abdominalgliedern. Das 7te, 8te und 9te Glied sind bei *Bunodes* einfach, bei *Hemiaspis* ebenfalls, wenn auch schwächer, zweilappig, woher Woodward auch hier eine Verwachsung annimmt. Der Bau des Hinterleibes nun, mit seinen freien Gliedern und dem Schwanzstachel erinnert allerdings mehr an Eurypteriden als an Trilobiten, bei denen diese hinteren Glieder zu einem Pygidium verbunden sind, zumal auch die Abdominalglieder unten geschlossen zu sein scheinen. Hierin dürfte auch die einzige Verwandtschaft der Hemiaspiden mit den Eurypteriden liegen. Die Beschaffenheit der Schaale wird ebenfalls mehr eine trilobitenähnliche sein, denn sie ist in den Eurypterendolomiten von Rootziküll durchweg zerstört und hinterlässt nur eine schwarze Färbung auf dem inneren Abdruck, der übrigens die Zeichnung der Oberfläche genau zu wiederholen scheint. *Eurypterus* und

Pterygotus dagegen zeigen ihre orange-braune Chitinhaut wohlerhalten, wenn deren Dicke dem lebenden Zustande gegenüber auch bedeutend reducirt sein dürfte.

Die 3 Gattungen welche nach meiner gegenwärtigen Auffassung die Familie der Hemiaspiden constituiren, werden sich durch folgende diagnostische Uebersicht charakterisiren lassen.

1. Schaale fein tuberkulirt. Der Umfang des Kopfes mit 9 Radialfalten, die von einem mittleren bogenförmigen Wulst ausgehen. Das 6te Leibesglied zweilappig. Die Dorsalfurchen reichen nur bis zum 6ten Gliede. Die Pleuren der 3 letzten Leibesglieder sind entweder gar nicht vorhanden oder nur durch kurze nach hinten gewandte Spitzen angedeutet. 2.

Schaale glatt. Kopfschild ohne Radialfalten. Alle Leibesglieder einfach. Die Dorsalfurchen reichen deutlich bis zum 8ten Gliede. Die Pleuren des 6. — 9. Gliedes sind allmählich immer mehr nach hinten gewandt, so das die des 9ten dem Schwanzstachel fast parallel laufen. Gen. *Pseudoniscus* Nieszk.

2. Hinterecken des Kopfschildes in Spitzen auslaufend. Kopf am Rande gezähnt. Pleuren der Leibesglieder ohne Längsrippe. *Hemiaspis* Woodw.

Hinterecken des Kopfschildes abgerundet. Der ganze Rand ungezähnt. Pleuren der Leibesglieder mit deutlicher diagonaler Längsrippe. *Bunodes* Eichw,

Ihrem geologischen Alter nach sind die Hemiaspiden durchaus obersilurisch. Sie sind bisher nur in England und bei uns gefunden. In England vertheilen sich die vier Arten von *Hemiaspis* über das ganze Obersilur vom Wenlock shale bis zum Upper Ludlow; unsere vier Arten (in zwei Gattungen) sind ausschliesslich im Eurypterendolomit von Rootziküll gefunden, der unserer obersten silurischen Stufe auf Oesel, K, angehört.

Gen. Bunodes Eichw. 1854.

Was Allgemeines über unsere Gattung zu berichten wäre ist alles schon in dem oben Gesagten enthalten. Ich hätte hier nur noch die Gründe auseinanderzusetzen, die mich bewogen die Gattung *Exapinurus* Nieszk. einzuziehen und mit *Bunodes* zu verbinden. Nieszkowski hatte von seinem einzigen Exemplar des *Exapinurus* nur den Thorax und Hinterleib deutlich erhalten, während der Kopf nur mit seinem verschobenen und verdrückten Hinterrande vorhanden ist. Er konnte daher bei diesem Stück den Unterschied zwischen dem pleurentragenden Thorax und den pleurenlosen Abdominalgliedern richtig auffassen, die Form des Kopfes dagegen blieb unklar. Bei *Bunodes* dagegen waren Kopf und 5 Thoraxglieder vollständig vorhanden, während die hinteren Glieder nur in einem unvollständigen Abdruck (bei *B. lunula*) vorlagen und daher die falsche Vorstellung erweckten, als ob *Bunodes* ein abgerundetes Pygidium nach Art der Trilobiten habe. Der Abdruck von *Bunodes*, der die Veranlassung zur Darstellung des abgerundeten Pygidiums gab, ist in

F. 38 genau dargestellt; er zeigt das 4. — 6. Leibesglied von innen: es ist nur zweifelhaft, ob er zu *B. lunula* oder zu *B. Schrencki*, also wiederum zu Nieszkowski's *Exapinurus* gehört. Kopf und Thorax sind nach den jetzigen vollständigeren Materialien zu urtheilen bei *Bunodes lunula* Eichw. und *Exapinurus Schrencki* Nieszk. ganz analog gebildet, so dass es sogar schwer hält, Speciesunterschiede zu finden, und ich stehe daher nicht an, die Gattung *Exapinurus* einzuziehen. Den Hinterleib mit dem Schwanzstachel (telson) kennen wir wohl von *Bunodes Schrencki*, aber nicht vön *B. lunula*; dieser ist dafür von der dritten Art, *B. rugosus* Nieszk. bekannt, und zwar von ganz analogem Bau wie bei *Schrencki*.

Vor *Hemiaspis* Woodw. ist unsere Gattung eigentlich nur durch den ganzrandigen Umriss des Kopfschildes unterschieden, vielleicht auch durch die einfachen nicht zweilappigen letzten Abdominalglieder. Es ist eigentlich kein Grund zu generischer Trennung vorhanden, höchstens zu subgenerischer. Ich behalte beide Namen einstweilen noch bei, weil der Name *Hemiaspis* auch schon sehr bekannt ist und sonst dem älteren *Bunodes* weichen müsste.

Uebersicht der Arten.

1. Kopfschild halbkreis- bis trapezförmig; Hinterrand schwach convex oder fast geradlinig. Runzeln der Oberfläche verlaufen parallel den Seitenrändern. Abdominalglieder gerade abgeschnitten, ohne nach hinten gewandte Fortsätze. 2.

Kopfschild fast kreisförmig; vorn schwach, am Hinterrande stark convex (fast die umgekehrte Form von *B. Schrencki*). Radialfalten schwach, nach vorn gebogen. Runzeln der Oberfläche parallel dem Hinter- oder Vorderrand. Abdominalglieder jederseits mit einem kurzen nach hinten gerichteten Fortsatze. *Bunodes rugosus* Nieszk.

2. Vorderrand fast geradlinig; Radialrippen kräftig, gerade, bis zum Rande reichend und diesen einkerbend. Dorsalfurchen tief, Aeusserer Pleurentheil mit kräftiger tuberkulirter Diagonalrippe. *B. lunula* Eichw.

Vorderrand convex. Radialrippen schwach, den Rand nicht erreichend; die seitlichen nach aussen convex. Dorsalfurchen schwach, ebenso die Pleurenrippen.
B. Schrencki Nieszk. sp.

Bunodes lunula Eichw. T. I, F. 34 — 38.

1854. *Bunodes lunula* Eichw. Bull. de Moscou 1854. I, p. 107, T. II, F. 2 — 4.
1859. — — Nieszk. Archiv u. s. w. p. 378, T. II, F. 13.
1860. — — Eichw. Leth. ross. anc. per. p. 1444, T. 52, F. 35 *a, b*.

Unsere Art ist die älteste der Gattung und zugleich, da sie bereits im Jahre 1854 aufgestellt worden, der ganzen Gruppe. Schon die älteste Eichwald'sche Abbildung von

1854 ist ganz kenntlich, nur sind von den damals angenommenen Augen am Umschlag des Vorderrandes am Originalstück keine Spuren zu erkennen. Die Nieszkowski'sche Abbildung von 1859 ist sogar recht gut, bis auf die misglückte Andeutung des Pygidiums, von der wir schon oben gesprochen haben (allenfalls hätten noch einige den Seitenrändern des Kopfes parallele Runzeln beigefügt werden können). In der Lethaea hat Eichwald sein altes Stück nochmals abgebildet, und auch wir geben dieses Stück wieder in unserer F. 35.

Es liegen mir jetzt ungefähr zehn Stücke vor: Kopfschilder mit und ohne Thorax (bis zum 6ten Gliede incl.), einzelne Leibesglieder und die ganze Thoraxpartie isolirt. Die Abdominalglieder und der Schwanzstachel, dessen Vorhandensein ich nach Analogie mit den verwandten Arten annehmen muss, fehlen bisher.

Das Kopfschild (F. 34, 35) ist flach gewölbt, ziemlich trapezförmig, vorn an den Seiten abgerundet; hinten und vorn nur schwach convex, fast geradlinig; die Seiten divergiren etwas nach hinten und stossen mit dem Hinterrande unter fast rechtem Winkel zusammen. Die Mittelpartie des Schildes nimmt eine hufeisenförmige flache Wulst ein, deren beide Schenkel nach aussen etwas concav sind. Der Scheitel der Wulst liegt vor der Mitte des Kopfschildes nach dem Vorderrande zu, die Schenkel münden beiderseits am Hinterrande, nahe den Ecken. Die Schenkel sind auf der Innenseite von Furchen begränzt, zwischen denen in der Mitte eine flache Erhabenheit sichtbar ist, die nach vorn etwas verschmälert hier mit dem Scheitel der Hufeisenwulst zusammenstösst, der seinerseits in die vordere Mittelrippe übergeht. Vom Umkreise der Hufeisenwulst divergiren nach dem Umkreise des Kopfes 9 gerade wulstförmige Rippen (4 an den Seiten, 1 in der Mitte), die durch gleichbreite Furchen getrennt sind; die Rippen entstehen allmählich am Aussenrande der Wulst und verstärken sich nach dem Umkreis des Kopfschildes zu, an dem sie deutlich bemerkbare Einkerbungen bilden. Sie gehen auch auf den vorderen Umschlag des Kopfschildes über (F. 35 *b*), der bisweilen ein verticales Band um den vorderen Kopfrand bildet.

Die Oberfläche des Kopfschildes ist fein tuberkulirt, ausserdem erkennt man zu beiden Seiten einige feine Längsrunzeln, die den Seitenrändern parallel laufen und auch auf dem Umschlag (F. 35 *b*) sichtbar sind.

Vom Hinterrande, jederseits an der Ausmündungsstelle der Schenkel der Hufeisenwulst, entspringen die nur äusserst schwach (auf dem Steinkern) angedeuteten Gesichtsnäthe (F. 34) und laufen schräg convergirend in gerader Linie nach vorn, längs dem Aussenrande der Wulstschenkel, durchschneiden dann die flache Basis der ersten seitlichen Radialrippen jederseits und münden am Vorderrande zu beiden Seiten der Mittelrippe, die vom Scheitel der Hufeisenwulst vertikal zum Vorderrande geht.

Von Augen habe ich keine Spur bemerken können. Eichwald gab zuerst welche am Umschlag des Kopfes an, erwähnt sie aber später nicht, auch sind an seinem Originalexemplar (F. 35) keinerlei dergleichen Spuren aufzufinden.

Der Thorax ist von breiter halb ovaler Form, gewölbt, nach hinten verschmälert und besteht aus 6 Gliedern, die den Leibesgliedern der Trilobiten sehr ähnlich gebil-

det sind, indem sie deutlich Rhachis und Pleuren unterscheiden lassen, deutliche Dorsalfurchen zeigen und die Gelenkfortsätze sowohl an der Rhachis als in den Dorsalfurchen ganz ähnlich gebildet haben. Man erkennt diese Gelenkstücke besonders deutlich in dem inneren Abdruck F. 37. In diesem sieht man auch vertiefte Punkte in der Mitte der Rhachis, und zwar einen bei den vorderen Gliedern und zwei bei dem 6ten Gliede. Diese entsprechen kurzen dreiseitigen Vorsprüngen in der Mitte der gewölbten Rhachis, die in einen spitzen Tuberkel ausgehen (F. 36 *b*). Am ersten Leibesgliede lässt sich dieser Vorsprung nur schwer erkennen; am 6ten, der ausserdem viel schmäler ist, treten auf der Wölbung zwei Tuberkel hervor. Die erwähnten Vorsprünge sind übrigens nicht an allen Exemplaren deutlich, wie das ja auch bei manchen Trilobiten, z. B. *Cheirurus exsul*, vorkommt (vielleicht sind hierin sexuelle Unterschiede vorhanden). Ob das 6te Glied zweilappig ist, wie bei *Hemiaspis* und *Bunodes Schrencki*, konnte nach den uns vorliegenden Stücken nicht entschieden werden. F. 38 zeigt deutlich ein zweilappiges 6tes Glied, dessen hinterer Umschlag die zweite Hälfte des Gliedes von unten bedeckt; es ist derselbe Abdruck, nach dem Nieszkowski sein dreigliedriges Pygidium von *B. lunula* construirte. Gegenwärtig sind wir ausser Stande mit Sicherheit zu sagen, ob dieser Abdruck zu *B. lunula* oder zu *B. Schrenckii* gehört.

Die Rhachisglieder zeigen im Uebrigen dieselbe Oberflächenbeschaffenheit wie der Kopf; ausser den feinen Tuberkeln sieht man an den Seiten noch zahlreiche feine Längsrunzeln. Die Breite der Rhachis nimmt stark nach hinten ab, so dass die des 6ten Gliedes nur halb so gross ist wie die des ersten. Die Gesammtlänge des Thorax wird etwas diejenige des Kopfes übertreffen.

Die Pleuren sind schräg nach hinten gewandt, liegen dicht aneinander und enden abgestutzt; ihre Länge ist etwa $2^1/_2$ mal in der Breite der Rhachis enthalten. Sie sind deutlich gekniet; der kürzere innere (Gelenk-) Theil steigt von der Dorsalfurche steil an und ist glatt; der längere äussere Theil zeigt einen diagonalen Kamm, der von einer Reihe deutlicher Tuberkeln gekrönt ist.

Maasse:

Länge des Kopfes	Breite des Kopfes	Länge des Thorax	Breite des Thorax
12,5 mm.	16 mm.	—	—
12 »	17 »	—	—
13 »	16 »	—	—
—	—	14,5 mm.	18 mm.
—	—	17 »	20 »

An keinem Exemplar sind Kopf und Thorax zugleich vollständig erhalten.

Erklärung der Figuren. T. I, F. 34 Kopf mit den vorderen Leibesgliedern, die nicht den Vorsprung auf der Rhachis zeigen, Gesichtslinien angedeutet. In der Volborth'schen Sammlung der Akademie; F. 35 *a*, *b* Originalexemplar von Eichwald, jetzt im geolog.

Cabinet der Petersburger Universität; F. 36 *a*, *b* gut ausgebildeter Thorax mit Vorsprüngen auf der Rhachis (Mus. Reval); F. 37 innerer Abdruck der hinteren Thoraxglieder, um die Gelenkstücke zu zeigen (Mus. Dorpat); F. 38 innerer Abdruck der letzten Thoraxglieder (auf der nämlichen Platte), der von Nieszkowski (l. c. T. II, F. 13) als Pygidium gedeutet wurde, — ob zu unserer oder der nächsten Art gehörig?

Bunodes Schrencki Nieszk. sp. T. I, F. 39 — 43.

1859. *Exapinurus Schrencki* Nieszk. l. c. p. 380, T. II, F. 12.

Von dieser Art besass Nieszkowski nur ein Exemplar, das den Thorax und das unvollständige Abdomen zeigte, (ohne Schwanzstachel, den Woodward l. c. p. 177, F. 66 ganz richtig restaurirt hat). Nach unserem gegenwärtigen Material ist es die am vollständigsten bekannte Art der Gattung, da wir in F. 40 ein fast vollständiges Exemplar besitzen, an dem das Kopfschild allerdings nur im Umriss angedeutet ist. Das ganze Thier ist danach von länglich eiförmiger Gestalt, der Kopf etwas kürzer als der Thorax und dieser etwa ebenso lang wie das Abdomen mit dem Schwanzstachel.

Der Kopf ist über einen Halbkreis vorgezogen, hinten nur wenig convex, flach gewölbt. Die Hufeisenwulst ist nur schwach angelegt; die Radialrippen sind ebenfalls schwächer als bei voriger Art, und zwar biegen sich die seitlichen deutlich nach vorn (F. 39). Die Tuberkulirung der Oberfläche erscheint feiner; die Runzeln ziehen sich wie bei voriger Art vorzüglich längs den Seitenrändern hin, die steil, fast vertikal nach dem Hinterrande zu verlaufen. Von Gesichtslinien habe ich keine Spur gesehen.

Der Thorax ist flach gewölbt, von gleicher Sculptur wie der Kopf, im Allgemeinen von ähnlicher Form wie bei voriger Art, nur sind die Dorsalfurchen viel flacher, ebenso die Rhachis, die nur die feinen Längsrunzeln längs der ganzen Breite, aber nur in schwacher Andeutung, und selten (F. 43) die mittleren Tuberkel zeigt. Die Pleuren sind $2\frac{1}{2}$ bis 3 mal in der Breite der Rhachis enthalten; sie zeigen nur ein schwaches Knie und die diagonale Crista auf dem Aussentheil ist nur schwach angedeutet und nicht tuberkulirt. Das sechste Leibesglied zeigt an zwei Exemplaren (F. 40 und 43) seine zweilappige Gestalt, die mit der bei *Hemiaspis limuloides* übereinstimmt. Der vordere Theil trägt noch Pleuren, der hintere nicht und erinnert darin schon an die Abdominalglieder. Diese (F. 40) sind ziemlich gleich lang und verschmälern sich allmählich nach hinten; sie sind am Hinterrande gerade abgestutzt, ohne pleurenartige Fortsätze. Der gestreckt dreieckige Schwanzstachel (telson) kommt in seiner Länge den 3 Abdominalgliedern 7, 8, 9 gleich.

Maasse: Die Länge unseres ganzen Exemplars beträgt mit dem Schwanzstachel 30 mm., ohne denselben 20 mm., die grösste Breite am Beginn des Thorax 17 mm. Die Länge des Kopfes 11 mm., bei 17 mm. Breite. Bei anderen Exemplaren des Kopfes haben wir resp. 11 und 13 mm. Länge und 18 und 17 mm. Breite.

Erklärung der Figuren. T. I, F. 39 ein isolirter Kopf aus dem Revalschen Museum; er ist vollständiger erhalten als bei den anderen Exemplaren, zeigt aber etwas andere Dimensionen; immerhin musste er als *B. Schrencki* bestimmt werden; F. 40 das vollständigste Exemplar, in der Volborth'schen Sammlung der Akademie; F. 41 mit voriger Figur auf einer Platte, zeigt Kopf, Thorax und Abdominalglieder ohne Stachel; F. 42 das Nieszkowski'sche Originalexemplar aus dem Dorpater Museum, vom Kopf nur der verschobene Hinterrand sichtbar, Thorax und Abdomen, ohne Stachel, vorhanden; F. 43 einige Thoraxglieder; z. Th., namentlich das zweilappige 6te Glied, isolirt (Volborth'sche Sammlung.

Bunodes rugosus Nieszk. T. I, F. 44—47.

1859. *Bunodes rugosus* Nieszk. Zusätze zur Monogr. der Trilob. der Ostseeprovinzen im Archiv für Naturk. Liv-, Est- und Kurl. Ser. I, Bd. II, p. 380, T. II, F. 14.

Nieszkowski hatte nur ein vollständiges Kopfschild vor sich, das darum auch nicht genügend abgebildet und beschrieben werden konnte. Gegenwärtig liegen mir ausser diesem Originalexemplar noch drei Stücke vor, die ich sämmtlich habe abbilden lassen und die uns eine ziemlich vollständige Vorstellung von dem Bau des Thieres geben.

Das Kopfschild ist fast kreisförmig, breiter als lang, die grösste Breite ziemlich vorn; im Umkreis am Vorderrande viel weniger convex als am Hinterrande, so dass dieser das erste Leibesglied nur in einem Punkte berührt, wie das im Uebrigen nicht wohlerhaltene Stück F. 47 deutlich zeigt. Die Seiten wenig convex, fast geradlinig. Das Kopfschild zeigt geradezu die umgekehrte Form von dem des *B. Schrencki* F. 39; es konnte aber richtig gedeutet werden, sowohl durch F. 47 als F. 46, die ein ganzes Exemplar mit nach unten übergeklapptem Kopfschilde darstellt, als auch namentlich durch die ganz mit den übrigen Arten übereinstimmende Ausbildung der Hufeisenwulst, mit den von ihr ausstrahlenden radialen Rippen. Die Wulst selbst ist viel schwächer angedeutet als bei den übrigen Arten, aber immerhin erkennbar. Bei der Nieszkowski'schen F. 14 (unsere F. 44) tritt sie fast gar nicht hervor, dafür sind hier die Radialfalten, die von der Wulst ausgehen, stärker als bei den später gefundenen Stücken. Diese Radialfalten erscheinen in der nämlichen 9-Zahl wie bei den übrigen Arten: eine gerade Falte nach vorn, von dem Scheitel des Hufeisens aus und vier seitliche bogenförmige, mit der Convexität nach aussen. Auch die seitlichen Falten sind entsprechend der Contour des Kopfschildes sämmtlich nach vorn zu gebogen; sie erreichen den Rand nicht, der daher nicht die Einkerbungen zeigt wie *B. lunula.* Entsprechend dem Namen der Art sind die feinen Runzeln der Oberfläche sehr stark ausgebildet, und zwar vorzüglich parallel dem Vorder- und Hinterrande (bald bei diesem, bald bei jenem stärker entwickelt). Im Uebrigen ist die fein tuberkulirte Sculptur des Kopfes ganz analog wie bei den übrigen Arten.

Von Augen habe ich auch bei dieser Art nichts erkennen können. Die Gesichtslinien sind auf dem Stück F. 47 schwach angedeutet (nicht auf der Figur).

Den Thorax haben wir nur in der schlecht erhaltenen F. 47 darstellen können. Es sind hier 5 — 6 Leibesglieder zu erkennen, die deutlich Rhachis, Dorsalfurchen und Pleuren unterscheiden lassen. Die Dorsalfurchen sind schwach vertieft; die Breite der Rhachisglieder nimmt schnell nach hinten zu ab. Bei den vorderen Gliedern beträgt sie 3 mal so viel wie die Länge der Pleuren, bei den hinteren kaum zwei mal. Die oblongen Pleuren sind schräg nach hinten gewandt und zeigen Spuren einer Diagonalrippe. Das Knie ist bei unserem Exemplar nicht zu erkennen. An dem Stück F. 46 sehen wir die Abdominalglieder 7, 8 und 9, die ebenfalls schnell an Breite nach hinten zu abnehmen, sie zeigen am Hinterrande jederseits eine nach hinten gerichtete Spitze, die bei *B. Schrencki* fehlt; auch der vordere Theil des dreiseitigen Thoraxstachels ist zu erkennen. Zu beiden Seiten des übergeklappten Vorderrandes des Kopfes erkennt man einige hervorragende Pleuren von Thoraxgliedern; ich möchte diese für etwas verschoben halten, da der Uebergang von den breiten Thoraxgliedern zu den schmalen Abdominalgliedern sonst gar zu plötzlich wäre.

Maasse: des Kopfschildes

Länge	Breite
14 mm.	19 mm.
16 »	18,5 »
16 »	17,5 »
10 »	12 »

Erklärung der Figuren. T. I, F. 44 Originalexemplar des Nieszkowski'schen *B. rugosus* aus dem Dorpater Museum; F. 45 ein anderer Kopf aus dem Dorpater Museum; F. 46 ganzes Exemplar mit übergeklapptem Kopfschild, in der Volborth'schen Sammlung der Akademie (von mir 1865 mitgebracht); F. 47 Kopf mit einigen Leibesgliedern, ausgestreckt, undeutliches Exemplar (Mus. Reval).

Pseudoniscus aculeatus Nieszk. T. I, F. 48, 49.

1859. *Pseudoniscus aculeatus* Nieszk. Zus. z. Monogr. d. Trilob. d. Ostseeprov. in Arch. für Naturk. Liv-, Est- und Kurl. I. Ser., Bd. II, p. 381, T. II, F. 15.
1860. — — Eichw. Leth. ross. anc. per. p. 1445.

Im Herbst 1858 fand ich das Exemplar, auf das Nieszkowski seine neue Gattung und Art gründete. Thorax und Abdomen sind auf dem Stücke selbst nur schlecht, auf dem Abdruck besser erhalten, den ich daher in unserer F. 48 noch einmal vergrössert wiedergebe. Das Stück des Kopfschildes, das auf Nieszkowski's Figur als Wangenschild erscheint, muss auch ich als solches ansehen, doch kann ich die Deutung des an demselben bemerkbaren Ausschnitts als Platz für das Auge nicht festhalten (in der Copie bei Wood-

ward l. c. Merostomata IV, p. 177, F. 65 ist hiernach der Kopf mit den Augen vollständig restaurirt, auch Eichwald spricht von grossen halbmondförmigen Augen), da ich später den Kopf mit daranhängenden 3 Leibesgliedern gefunden habe (F. 49), der, ähnlich wie bei *Bunodes,* convergirend vom Hinter- zum Vorderrande verlaufende Gesichtslinien zeigt, in denen kein Ausschnitt für das Auge bemerkbar ist. Auf dem rechten Wangenschilde bemerkte ich allerdings eine Erhöhung, die als Auge gedeutet werden könnte, ebenso wie ein ähnlicher Fleck bei *Hemiaspis* von Woodward muthmaasslich dafür genommen wird.

Der Kopf selbst ist etwa halboval oder über einen Halbkreis vorgezogen, hinten gerade abgeschnitten. Er scheint in der Mitte gewölbt, mit einigen von hier ausstrahlenden undeutlichen Falten; im Uebrigen sind keine Spuren von solchen Tuberkeln wahrzunehmen wie bei *Bunodes.*

Der Leib mit dem Schwanzstachel ist von eilancettlicher Form und hat im Ganzen 10 Glieder, die weniger leicht in Thorax und Abdomen zu scheiden sind als bei *Bunodes,* weil nicht blos die ersten 6 (Thorax-) Glieder Pleuren tragen, sondern auch das 7te, 8te und 9te (Abdominal-) Glied, und weil die schwachen Dorsalfurchen demzufolge sich bis zur Basis des dreieckigen Schwanzstachels verfolgen lassen. Die Scheidung ist nur dadurch möglich, dass die Pleuren der ersten 6 Glieder parallel untereinander, schräg nach hinten gewandt sind und sich unter einander berühren, während die Pleuren der drei hintersten Glieder sich verschmälern, getrennt von einander in dreieckige Spitzen auslaufen und allmählig immer weiter sich nach hinten biegen, so dass die des 9ten Gliedes schon vollkommen dem Schwanzstachel parallel verlaufen. Ein Knie ist auf den Pleuren nicht zu bemerken, wohl aber eine erhabene Diagonalrippe, die auch auf den Pleuren der Abdominalglieder deutlich und sogar noch stärker als bei den vorderen Gliedern hervortritt. Die Rhachis ist flach gewölbt und nimmt nach hinten zu schnell an Breite ab; bei den vordersten Gliedern ist sie dreimal breiter als die Länge der Pleuren. Das 6te Leibesglied scheint ganz ähnlich den 5 ersten gebildet zu sein und nicht von der eigenthümlichen Bauart wie bei *Bunodes* und *Hemiaspis.*

Maasse: Die Breite des Kopfschildes von F. 49 beträgt 12 mm.; die Länge 9 mm. Die Länge des Leibes von F. 48 ist 21 mm.; die Breite am Grunde des 1. Leibesgliedes 12 mm.; die Länge des Schwanzstachels 5 mm., seine Breite am Grunde 2,5 mm.

Erklärung der Figuren. T. I, F. 48, Vergrösserter Abdruck des Nieszkowski'schen Originalexemplars (Universitätsmuseum zu Dorpat); F. 49 Kopfschild mit den vordern Leibesgliedern, (nat. Gr.) nach dem vorigen Exemplar ergänzt, im Museum zu Reval.

Nachträge zur Gattung Bunodes. T. VII. F. 1—6.

Die ersten fünf Bogen der vorliegenden Arbeit waren bereits gedruckt als ich von einer neuen Excursion nach Rootziküll, im Sommer 1882, einige neue schöne Stücke mitbrachte, die das oben Gesagte in mancher Beziehung zu vervollständigen und zu modificiren dienen.

Schon in der geognostischen Einleitung zu meiner Revision der ostbaltischen silurischen Trilobiten hatte ich es (S. 52) ausgesprochen dass *Bunodes lunula* Eichw. und *Exapinurus Schrencki* Nieszk. identisch seien; auch in gegenwärtiger Arbeit sage ich S. 35, dass beide Formen schwer specifisch auseinander zu halten sind. Nichtsdestoweniger glaubte ich nach der Form und Sculptur des Kopfschildes und der der Thoraxglieder eine solche specifische Unterscheidung eintreten lassen zu können. Die neuen Funde widersprechen dem nun und zwingen mich zu der früher ausgesprochenen Ansicht zurückzukehren. Der Umriss des Kopfes scheint ziemlich variabel und die Verschiedenheit in der Sculptur nur von dem Erhaltungszustand der Exemplare, die ja ohnehin nur als dunkel gefärbte Steinkerne auftreten, abhängig zu sein.

Das Kopfschild F. 39 auf T. I, das ich seiner schwachen Sculptur wegen zu *Bunodes Schrencki* gebracht hatte, stimmt im Umrisse vollkommen zu dem neu auf T. VII, F. 4 mitgetheilten Kopfschild, das seiner starken Tuberkulirung wegen zum ächten *B. lunula* zu ziehen ist. Von F. 35 auf T. I unterscheidet es sich nur durch den schwach abwärts geneigten Kopfumschlag, der bei F. 35 vertical heruntergebrochen ist. Das sind Unterschiede die augenscheinlich mit dem Erhaltungszustande zusammenhängen.

Der Hinterrand des Kopfschildes erscheint bei den meisten Exemplaren des typischen *B. lunula* (mit kräftiger Sculptur) convex, doch zeigt F. 34 auf T. I auch einen geraden Hinterrand. Das Originalexemplar von *B. Schrencki* T. I, F. 42 hat diesen Hinterrand nur undeutlich erhalten, doch scheint er nach der einen vorspringenden Hinterecke zu urtheilen concav gewesen zu sein. Die Stücke F. 40 und 41 auf T. I, die ich wegen ihrer Sculptur zu *B. Schrencki* gebracht hatte, zeigen wiederum, ebenso wie F. 39, einen geradlinigen bis schwach convexen Hinterrand; dagegen ist dieser an den beiden vollständigen neuen Exemplaren F. 1 und 2 auf T. VII ganz deutlich concav, mit vorspringenden abgerundeten Hinterecken, ganz so wie das Originalexemplar (T. I, F. 42) vermuthen liess.

Darnach wären also nur diese beiden Stücke zu *B. Schrencki* zu ziehen, allenfalls mit Hinzufügung von F. 43 auf T. I (wiederholt in F. 3 auf T. VII). Die Uebergänge vom concaven zum geradlinigen und convexen Hinterrand sind aber, wie wir oben gesehn, bei der Unhaltbarkeit der übrigen Unterscheidungsmerkmale so mannigfaltig, dass ich eine specifische Trennung von *B. lunula* und *Schrencki* nicht mehr aufrecht erhalten kann und den erstgenannten Namen als den älteren allein festhalten muss. Als Varietäten mögen die beiden Formen immerhin unterschieden werden.

Der Unterschied zwischen *B. lunula* und *B. rugosus* Nieszk. bleibt aber in Sculptur und Form des Kopfschildes noch bedeutend genug um wenigstens diese beiden genannten Formen als wohl geschiedene Species festzuhalten. Die nach hinten gewandten Vorsprünge der Hinterleibsglieder bei *B. rugosus* (T. I, F. 46) können nicht mehr für unterscheidende Merkmale gelten, da ähnliche, wenn auch schwächer ausgebildet, auch bei dem neuen Exemplar von *B. lunula* var. *Schrencki* auf T. VII, F. 1 zu erkennen sind.

Von den 5 neuen *Bunodes*-Exemplaren, die ich auf T. VII abgebildet habe, gehören

F. 4, 5, 6 zum typischen *lunula* Eichw. Sie zeigen die Sculptur sehr schön und lassen ausserdem auch die Gesichtslinien (der Verlauf ist früher beschrieben) deutlicher erkennen als die früher abgebildeten Stücke. Dennoch ist auch jetzt keine Spur von Augen entdeckt worden.

Fig. 1 und 2 sind schöne Exemplare des *B. lunula var. Schrencki* m., die eine genauere Besprechung nöthig machen.

Das ganze Thier (mit dem Endstachel) ist gestreckt eiförmig, fast $2\frac{1}{2}$ mal so lang wie breit. Der Kopf breit trapezoidal, fast noch einmal so breit wie lang, vorn schwach convex, hinten noch schwächer concav, mit vortretenden abgerundeten Hinterecken. Seine Länge beträgt nur $\frac{1}{4}$ des ganzen Thieres. Er ist schwach gewölbt und zeigt die typische Bunodessculptur (die Hufeisenwulst mit den 9 Radialrippen) nur in schwacher Andeutung. Die Tuberkel sind bei F. 1 gar nicht zu erkennen, während sie bei F. 2 und dem Originalexemplar (T. I, F. 42) deutlich hervortreten. Die Gesichtslinien sind deutlich vorhanden.

Der 6gliedrige Mittelleib ist etwas breiter wie lang und nimmt etwa $\frac{1}{3}$ der ganzen Länge des Thieres ein. Die einzelnen Glieder bieten nichts Neues; auf der Rhachis des 2 und 3ten Gliedes ist bei F. 2 der Mediantuberkel deutlich zu erkennen (wie bei F. 36 auf T. I), bei F. 1 nicht. Auch der diagonale Kamm auf den Pleuren ist sichtbar, wenn auch die Tuberkelreihe auf demselben nicht erkennbar ist, die wir dagegen auf dem Originalexemplar des *B. Schrencki*, wenn auch undeutlich, am 1sten Gliede herausfinden können.

Die drei Hinterleibsglieder sind von rechteckiger Form und zeigen, wie schon oben erwähnt, beiderseits am Hinterrande deutliche Vorsprünge nach hinten.

Der Endstachel, den wir in F. 1 in ganzer Länge erhalten sehen, ist linear, ungekielt, wie es scheint flach, endet mit stumpfer Spitze und nimmt fast $\frac{1}{3}$ der ganzen Länge des Thieres ein.

Sämmtliche neu beschriebene Exemplare gehören dem Revaler Museum an.

Ich erlaube mir zum Schluss noch einige nachträgliche Bemerkungen über die Organisation und die systematische Stellung der Hemiaspiden..

Nach genauer Vergleichung unseres *Bunodes* mit den Darstellungen des *Hemiaspis* bei Woodward, namentlich auch mit dessen früherem eingehenden Artikel im Quarterly Journ. of the geol. soc. 1864, p. 490, T. 14, F. 7 *a*, *b*, *c* ergiebt sich noch ein genauerer Zusammenhang beider Gattungen, so dass kaum die Möglichkeit einer subgenerischen Scheidung übrig bleibt. Das Kopfschild von *Hemiaspis* zeigt eine erhöhte innere Partie mit einem Bogen in der Mitte (Woodw. Merostom. T. 30, F. 2), der unserer Hufeisenwulst entspricht, und neun strahlig angeordneten Tuberkeln, die in F. 1 der Monographie und Quarterly Journ. l. c. F. 7 *a* deutlich zu erkennen sind. F. 7 *b* entspricht genau diesem innern Theil, nur mit noch deutlicheren Tuberkeln und ich verstehe nicht, warum Woodward in seiner Monographie der Merostomen p. 175 Anmerk. dieses Stück jetzt zu einer anderen Art ziehen will. Der breite Rand von *Hemiaspis* mit seinen radialen Rippen entspricht

genau unserem sogenannten Umschlag bei *Bunodes*, der entweder vertikal abwärts gerichtet ist (T. I, F. 35. T. VII, F. 5), oder bloss etwas geneigt (T. I, F. 39, 45, 48, T. VII, F. 4), die centrale Portion des Kopfes umgiebt.

Für die nahe Beziehung der Hemiaspiden zu den Trilobiten spricht noch die ganz gleiche Artikulation der Thoraxglieder, wie besonders deutlich auf T. VII, F. 3 (eine Wiederholung von T. I, F. 43) zu sehn ist. Wir erkennen hier an dem 1sten ausgebildeten Gliede den seitlichen Gelenkkopf an der Dorsalfurche, und am dritten Gliede die mittlere durch eine Furche abgetheilte Gelenkfläche an der Rhachis. Auf T. I, F. 36 *a* ist der seitliche Gelenkkopf am 1sten Thoraxgliede auch zu sehen, durch ein Versehn des Zeichners ist die hier schlecht erhaltene Pleura weggelassen. Dem besprochenen Modus der Artikulation gemäss finden wir bei den Hemiaspiden auch ein ähnliches Einrollungsvermögen wie bei den Trilobiten. Es kommen Köpfe vor (T. I, F. 46) die auf den Thorax herübergeklappt sind. Eine Seitenbewegung ist ausgeschlossen, die aber an den Abdominalsegmenten allerdings vorkommt, deren Artikulation mit den Eurypteren übereinstimmt. Bei den Eurypteriden kommt nichts von Einrollung dagegen vorherrschende Seitenbewegung der Glieder, besonders des Abdomens vor, während bei den ächten Limuliden nur der Endstachel beweglich eingelenkt ist.

Schon Woodward hat, wie ich sehe (Quarterl. Journ. l. c. p. 491) die Analogie mit den Trilobiten erkannt, sie aber nicht weiter verfolgt, was natürlich ist, da damals die nahen Beziehungen der Merostomen zu den Trilobiten noch sehr zweifelhaft waren. In seiner grossen Monographie hat er, wie wir oben erwähnten, die Hemiaspiden zu den Eurypteriden als abweichende Formen gebracht, die einige Beziehungen zu den Limuliden zeigen; in einem spätern Artikel (Quarterl. Journ. 1871, p. 61) bringt er sie geradezu zu den Limuliden. Eine wirkliche Verwandtschaft kann aber nur mit der ältesten noch nicht so stark differenzirten Limulidenform, dem *Neolimulus*[1]) *falcatus* Woodw. (Geol. Magaz. 1868, T. I, F. 1, p. 1), constatirt werden, bei dem sich ebenfalls 6 Thoraxringe, von etwa 3 freien Abdominalringen unterscheiden lassen. Von den übrigen — ächten — Limuliden scheiden sich die Hemiaspiden wesentlich durch die Verwachsung der Thorax- und Abdominalsegmente bei *Limulus* und auch noch durch das Vorhandensein der Nebenaugen bei den Limuliden (die auch *Neolimulus* nicht fehlen). Auch Gerstäcker hat (Klassen und Ordnungen des Thierreichs Bd. 5, p. 1135) die Unterschiede des *Hemiaspis* von den Poecilopoden (Merostomen), mit denen Woodward ihn verglich, richtig hervorgehoben; er spricht aber irrthümlicher Weise von 7 Thoraxgliedern, und bildet sie auch ab, freilich ist aber diese Abbildung (l. c. T. 43, F. 6) sehr schwer mit der Woodward'schen Originalzeichnung in Verbindung zu bringen.

---

1) *Neolimulus* documentirt seine intermediäre Stellung durch das Vorhandensein von Nebenaugen, zugleich mit Gesichtslinien und freien dreitheiligen Thorax- und Abdominalsegmenten.

Nach den vorhergehenden systematischen Betrachtungen scheint es angebracht den Versuch zu machen die Hauptgruppen der Poecilopoden im weitern Sinn, mit Einschluss der Trilobiten, nach Walcott[1]) oder also die obengenannten Gruppen der *Trilobiten*, *Hemiaspiden*, *Eurypteriden* und *Limuliden* (*Xiphosuren*) nach dem jetzigen Stande unserer Kenntniss zu charakterisiren, wobei ich hervorhebe, dass ich die Charakteristik der *Xiphosuren* der oft genannten Monographie von Woodward (l. c. p. 9) entnehme, bei der augenscheinlich auf die abweichende intermediäre Form des *Neolimulus* kaum Rücksicht genommen ist.

Die nachstehende Charakteristik weicht etwas von der durch Walcott mitgetheilten ab, indem die Gruppe der Hemiaspiden hinzukommt, als 2te Unterabtheilung der Palaeaden, bei deren Charakteristik ich von den Bewegungsorganen absehe, da wir von diesen bei den *Hemiaspiden* noch nichts wissen. Auch die Charakteristik der *Eurypteriden* ist eine andere.

1. Vier (ob immer?) Paar sehr zarte Kaufüsse. Nebenaugen fehlen. Gesichtsnäthe vorhanden. Keine Blattfüsse am Mittelleib nachgewiesen. Glieder des Mittelleibes (Thorax) in unbestimmter Zahl, durch Dorsalfurchen in Rhachis und Pleuren getheilt. Deutliche Gelenkflächen (fast immer) an der Rhachis und Gelenkköpfe in den Dorsalfurchen. Kugelungsvermögen meist vorhanden. (*Palaeadae* im Sinne von Walcott) 2.

Fünf Paar kräftige Kaufüsse (ausser diesen oft noch ein 6tes Fühler-Fusspaar). Nebenaugen vorhanden. Gesichtsnäthe fehlen. Kräftige Blattfüsse (1—6) am Mittelleibe vorhanden, wenigstens der erste derselben, der die Generationsorgane trägt und die Kiemenblätter bedeckt. Glieder des Mittelleibes verwachsen oder frei, dann aber ohne Dorsalfurchen und diesen entsprechende Gelenkflächen. Kein Kugelungsvermögen. (*Merostomata* im Sinne von Walcott) 3.

2. Hypostoma vorhanden. Glieder des Thorax in unbestimmter Zahl. Glieder des Hinterleibes zu einem Schwanzschilde (*Pygidium*) verwachsen. Keine Seitenbewegung möglich. *Trilobitae.*

Hypostoma fehlt. Glieder des Thorax 6. Glieder des Hinterleibes 3, frei beweglich, mit eingelenktem Schwanzstachel und Seitenbewegung: darin mit den *Eurypteriden* übereinstimmend. *Hemiaspidae.*

3. Das letzte Fusspaar des Kopfschildes sehr gross, zum Schwimmen eingerichtet. Metastoma vorhanden. Glieder des Thorax und Abdomen je 6, unter einander frei. Blattfüsse (wohl meist 5) frei an der convexen Bauchseite des Mittelleibes. Endglied (*Telson*) sehr variabel in der Form. Oberfläche mit eigenthümlich schuppenartiger Sculptur. *Eurypteridae.*

Die Kaufusspaare ziemlich gleich unter einander, ragen nicht über den Kopfschild hervor. Metastoma rudimentär. Glieder des Mittel- und Hinterleibes mehr oder weniger unter einander verwachsen. Die Blattfüsse (6) in die muldenförmig vertiefte

1) Bulletin of the museum of comparative Zoology at Harvard College Vol. VIII, № 10, p. 209. 1881.

Bauchseite des Mittelleibes eingesenkt. Das Endglied (*Telson*) immer als langgestreckter Stachel ausgebildet. *Limulidae.*

Bei den *Eurypteriden* werden manche der hier vorläufig gemachten Angaben, namentlich was die Verwandtschaftsverhältnisse derselben mit den *Limuliden* oder *Xiphosuren* betrifft, noch näher besprochen werden. Es wird sich eine grössere Analogie beider Gruppen ergeben als man gewöhnlich anzunehmen geneigt war.

II. Fam. Eurypteridae.

Was die systematische Stellung der *Eurypteriden* betrifft, so stimme ich vollkommen mit Nieszkowski[1]) und Woodward[2]) überein, wenn sie dieselben als besondere Familie neben die *Limuliden* oder *Xiphosuren* in die Ordnung der *Poecilopoden* (Merostomata) stellen. Die Charakteristik der *Eurypteriden*, wie sie Woodward (l. c. p. 9) giebt, kann ich nicht vollständig anerkennen. Nach dem mir vorliegenden Material stehen beide genannte Gruppen, ganz entsprechend den schon von Nieszkowski ausgesprochenen Ansichten, einander viel näher als Woodward zugeben mochte. Er nimmt an der Unterseite des Mittelleibes nur 1—2 Blattfüsse an, während doch schon Nieszkowski bei *Eurypterus* 6 dergleichen beschrieb (die wir jetzt auf 5 reduciren) und ich bei *Eurypterus* jetzt ausser den bekannten 5 Paaren von Kaufüssen noch ein Fühlerpaar am Vorderrande der Mundöffnung (wie schon Nieszkowski vermuthete) nachweisen (T. III, F. 1) kann, wodurch die Sechszahl der Gliederfüsse am Kopfschilde ganz wie bei *Limulus* erreicht wird. Ich wage nicht zu behaupten dass diese Zahl bei allen Eurypteriden nachgewiesen werden müsse, aber ein Blick auf die Woodward'schen Tafeln zeigt uns, dass bei den übrigen Gattungen unserer Familie noch lange nicht alle Details der Unterseite des Kopfes aufgeklärt sind. Nur bei *Slimonia acuminata* Salt. (l. c. T. 17, F. 1) erhalten wir den Eindruck, als ob wirklich kein 6tes Fusspaar mehr vorhanden sein könne, weil die Stücke so vollständig erhalten sind. Aber auch hier sind die 5 vorhandenen Fusspaare sämmtlich Kaufüsse, während das vorderste Fusspaar bei *Limulus* (hier sind die Ansichten getheilt) und *Eurypterus* aber nur als Fühler und an seinem Grunde nicht zum Kauen zu dienen scheint. Die grossen Scheerenfüsse von *Pterygotus* dienen mit ihrem Grunde so viel wir wissen, auch nicht zum Kauen. Dagegen sind die übrigen Fusspaare lange nicht so vollständig und im Zusammenhange gefunden wie bei *Eurypterus*, so dass wir bei ihm ganz wohl noch ein 5tes vorderstes Paar Kaufüsse erwarten können, wie Hall ja wirklich auch den Sachverhalt bei *Pterygotus Osborni*

1) Der *Eurypterus remipes* von der Insel Oesel, Archiv für Naturkunde Liv-, Est- und Kurlands. Ser. I. Bd. II. p. 336.

2) Monograph of the british fossil Crustacea of the order Merostomata. Palaeontograph. soc. vol. 19 (1866), p. 8—10.

(l. c. p. 419, T. 80 *A*, F. 9) dargestellt hat und sogar auch Woodward selbst bei *Pterygotus anglicus* (Merostom. l. c. T. II, F. 1), obgleich er hier seiner Annahme zu Liebe eine zufällige Verschiebung einzelner Kaufüsse von einer auf die andere Seite wahrscheinlich zu machen sucht.

Prof. Gerstäcker hat in Bronn's Klassen und Ordnungen des Thierreichs Bd. 5, p. 1136—1141 die Ansichten Woodward's und Nieszkowski's über die nahe Verwandtschaft der *Eurypteriden* und *Limuliden* ziemlich abfällig beurtheilt, wenn er gleich zugiebt, dass keine andere Crustaceengruppe mit den *Eurypteriden* verglichen werden könne als die *Limuliden*. Es bleiben ja allerdings Unterschiede genug übrig — die Zwölfzahl der freien Leibesglieder, die Ruderfüsse und das Metastoma, — aber diese hindern doch nicht der vielfachen typischen Analogien wegen beide Familien in eine gemeinsame Gruppe zu bringen. Die jetzt nachgewiesene Sechszahl der Extremitäten am Kopfschilde von *Eurypterus* und wohl auch von *Pterygotus* habe ich schon erwähnt. Ferner muss ich gegen Gerstäcker und mit Nieszkowski die grosse Uebereinstimmung der Blattfüsse von *Limulus* und *Eurypterus* nochmals nachdrücklich hervorheben. Leider hat Gerstäcker damals im Berliner Museum nicht bessere Exemplare der Unterseite von *Eurypterus* vorgefunden, sonst wäre er sicher zu andern Ansichten gekommen und hätte sich nicht mit der Darstellung der mangelhaften Stücke auf T. 35, F. 13—16 und den sehr ungenauen Kopien der allerdings etwas schematischen Darstellung von Nieszkowski (T. 43, F. 1 und 2) begnügt. Er sagt, der Nachweis sei nicht zu führen, dass die Blattfüsse Kiemen getragen haben, aber Woodward hat doch bei zwei Arten: *Pterygotus bilobus* (l. c. T. 11, F. 2. T. 12, F. 1 *d* und T. 13, F. 1 *f*) und *Slimonia acuminata* (l. c. T. 19, F. 3, 4) diese Kiemen deutlich nachgewiesen; ferner glaubt Gerstäcker, dass bei *Eurypterus* nur drei Blattfüsse vorhanden seien, während Nieszkowski doch deutlich 6 beschreibt (die ich wie gesagt auf 5 reducire), von denen freilich die drei hintern durch den Mangel des mittlern Zipfels sich von den vordern unterscheiden. Weiter stösst er sich daran, dass die Blattfüsse nicht in einer Mulde liegen wie bei *Limulus*, sondern frei an der convexen Bauchseite artikuliren. Ich verstehe nicht warum dieser Umstand gegen die Homologie und die gleiche Bedeutung der genannten Organe bei *Eurypterus* und *Limulus* und somit gegen ihre nahe Verwandtschaft sprechen soll.

Von den übrigen Eurypteriden kann ich jetzt auch bei *Pterygotus* die Mehrzahl der Blattfüsse sicher nachweisen, und bei *Slimonia acuminata* sind 2—3 derselben neben einander gefunden und von Woodward (l. c. p. 116, F. 35) ganz richtig als Blattfüsse gedeutet.

In Ergänzung der frühern Darstellung der Eurypteriden muss ich hier noch hervorheben, dass die 6 ersten Leibesglieder, oder die des Thorax nach Woodward, nach unten zu nicht geschlossen sind, sondern in der Mitte offen bleiben wie bei den Trilobiten. Ich habe diese Beobachtung sowohl bei *Eurypterus* als *Pterygotus* gemacht. Nur die 6 hintern (Abdominal-)Glieder bilden vollständige Ringe.

Von ächten Eurypteriden giebt es nach Ausschluss der Hemiaspiden, wenn wir

der Darstellung von Woodward folgen, fünf Gattungen: *Eurypterus*, *Pterygotus*, *Slimonia*, *Stylonurus* und *Adelophthalmus*, zu denen als 6te nach Prof. Möller[1]) noch die Gattung *Campylocephalus* Eichw. (*Limulus oculatus* Kut.) kommt, die zugleich, da sie im Perm'-schen System Russlands gefunden wurde, das neueste Glied der ganzen Gruppe darstellt. Die grösste Menge von hierher gehörigen Arten kommt in den obersten Silur- und den tiefsten Devonschichten vor. In der uns hier beschäftigenden Ablagerung auf Oesel haben wir 3—4 Arten, 2—3 *Eurypterus* und 1 *Pterygotus*. Im Russischen Reich kennen wir ausserdem nur einen *Eurypterus* (die nämliche Art: *E. Fischeri* Eichw. wie bei uns) aus dem Obersilur am Dniestr in Podolien, und den obenangeführten *Campylodiscus oculatus* aus dem Perm; eine neue von Czekanowski entdeckte Form aus dem Devon von Padun am Angaraufer in Ost-Sibirien wird Gegenstand einer spätern Mittheilung sein. Auch im Silur der Tschonaufer (Nebenfluss des Wilui) in Ost-Sibirien haben Maydell und Pawlowski Stücke von hierher gehörigen Integumenten gefunden, die am meisten an *Eurypterus* erinnern.

Von den 4 besser bekannten Eurypteridengattungen *Eurypterus*, *Pterygotus*, *Slimonia* und *Stylonurus* gehören *Eurypterus* und *Stylonurus* näher zusammen durch nicht facettirte auf der Fläche des Kopfschildes sitzende Augen und ein schlankes stachelartiges Schwanzglied, während *Pterygotus* und *Slimonia* (die früher auch vereinigt waren) durch randständige grosse facettirte Augen und ein verbreitertes Schwanzschild sich auszeichnen.

Gen. Eurypterus Dek. T. II, III, III *A*, VI. F. 6, 7.

Die Organisation unserer Gattung ist namentlich von Nieszkowski[2]) und Hall[3]) fast gleichzeitig ausführlich erörtert worden. Ausserdem sind zahlreiche Arten, deren Zahl sich nach allen nöthigen Einschränkungen doch noch auf über 20 (Woodward giebt 23 an) belaufen wird, namentlich von Salter und Woodward beschrieben worden, die jedoch nichts Wesentliches zur Erläuterung der Gesammtorganisation hinzugefügt haben. Die Darstellungen von Nieszkowski und Hall ergänzen einander, wie wir schon im Eingang unserer Arbeit hervorgehoben haben. Das reichere und besser erhaltene Material hat Nieszkowski vorgelegen, daher ist auch seine Beschreibung vollständiger geworden, wenn auch im Einzelnen verschiedene Fehler nachzuweisen sind. Die Tafeln haben bei den beschränkten pekuniären Mitteln der Dorpater Naturforschergesellschaft fast nur schematische Darstellungen liefern können und lassen im Einzelnen viel zu wünschen übrig, namentlich auch deswegen, weil sie vor der Beschreibung hergestellt wurden, und daher Manches nicht ent-

1) Протоколъ засѣданія отдѣленія Геологіи и Минералогіи С. Петербургскаго общества естествоиспытателей 24 Марта 1874.

2) Der *Eurypterus remipes* aus den obersilurischen Schichten der Insel Oesel. Archiv für Naturk. Liv-, Est- und Kurl. Ser. I, Bd. II, p. 345—85 mit 2 Taf. 1858.

3) Palaeontology of New York. III. p. 395—414. T. 80—84. 1859.

halten, was in dieser vorkommt. Hall hat bei weniger vollständigem Material lange nicht Alles sehen können, was Nieszkowski richtig erkannt hat; namentlich ist ihm die Mehrzahl der Blattfüsse an der Unterseite des Mittelleibes entgangen, obgleich er die hintersten derselben bei *Eurypterus robustus* (Palaeont. New York III, T. 81 *C*) schon ganz richtig mit ihrer Mediannath abbildet. Dafür aber ist das Meiste was Hall uns giebt, vollkommen genau und richtig und auf vielen Tafeln mit allen Details abgebildet. Freilich aber werden wir im Einzelnen auch an seiner Darstellung manches zu corrigiren haben.

In der gegenwärtigen Darstellung ist in mannigfacher Beziehung eine Vervollständigung und Berichtigung der Nieszkowski'schen enthalten, an deren Mängeln sowohl als Vorzügen ich übrigens so ziemlich denselben Antheil habe wie der Verfasser selbst, da ich damals (1858) das ganze Material mit ihm zusammen bis in alle Einzelheiten durchgearbeitet habe[1]). Die Verbesserungen und Vervollständigungen der gegenwärtigen Arbeit bestehn nun wesentlich in Folgendem:

1. Das vorderste (Fühler-) Fusspaar wird zum ersten Mal bei *Eurypterus* nachgewiesen.

2. Die Details der übrigen (Kau-) Füsse werden vollständiger und richtiger dargelegt; sie stimmen zum Theil mit der Hall'schen Darstellung, zum Theil mit der Nieszkowski'schen überein.

3. Die Blattfüsse auf der Bauchseite des Mittelleibes werden genauer und richtiger beschrieben als bei Nieszkowski und ihre Zahl auf 5 festgestellt, während Nieszkowski 6 annahm und Hall nur einen (d. Operculum) kannte.

4. Es wird nachgewiesen, dass die Glieder des Mittelleibes nur einen kurzen Umschlag nach der untern Seite zeigen und hier, auf der Bauchseite, nicht geschlossen sind, also ähnlich wie bei den Trilobiten sich verhalten.

5. Die Artikulation der einzelnen Leibesglieder untereinander wird genauer erörtert.

Endlich sind alle Details die in der Beschreibung vorkommen durch zahlreiche Originalabbildungen auf 3 Tafeln erläutert.

Bisher war bei uns nur eine Art *E. Fischeri* Eichw. bekannt; gegenwärtig fügen wir noch eine zweite Art *E. laticeps* n. sp. hinzu, von der wir freilich erst den Kopf kennen; und ausserdem noch eine var. *rectangularis* des *E. Fischeri.*

In der nachfolgenden Beschreibung des *Eurypterus* unterscheiden wir Kopf, Thorax und Abdomen, ebenso wie bei den *Hemiaspiden* und *Pterygotus*, vorzugsweise aus Bequemlichkeitsgründen, weil wir bei unsern Beschreibungen vorzüglich die Woodward'sche Monographie zum Vergleich im Auge haben, welche die nämliche Bezeichnungsweise angenommen hat.

1) Ein paar ergänzende Bemerkungen zu Nieszkowski's Beschreibung habe ich schon früher in meinen «Nachträgen und Berichtigungen zu den Untersuchungen über die silurische Formation von Estland, N. Livland und Oesel im Archiv für Naturkunde Liv-, Est- und Kurlands. Ser. I, Bd. II, p. 470» gegeben.

Eurypterus Fischeri Eichw. Tab. II; III; III *a*, F. 1—14; T. VI, F. 7.

1839. *Eurypterus tetragonophthalmus* Fisch. in Bull. de Mosc. 1839 p. 1, T. VII, F. 1.
1852. — *remipes*, A. Schrenk, im Archiv für Liv-, Est- u. Kurl. Ser. I, Bd. I, p. 35, 47, 86.
1853. — *remipes*, Graf Keyserling im Bull. de la soc. geol. de France, 2 Ser. XI, p. 153.
1854. — *remipes*, Eichwald, in Bull. de Mosc. 1854 I, p. 49, 100, T. I.
1857. — *Fischeri*, Eichw. in Bull. de Mosc. 1857, p. 336.
1858. — *remipes*, F. Schmidt, in Archiv. l. c. Ser. I, Bd. II, p. 191.
1859. — *remipes*, Nieszkowski in Archiv. l. c. Bd. II, p. 299—344, T. I, II.
1859. — *remipes*, F. Schmidt, l. c. p. 470.
1860. — *Fischeri*, Eichw. Leth. ross. anc. per. p. 1355. (hier zuerst die Unterschiede von *remipes* angegeben).
1866. — *nanus Angelin*, nach Woodw. Monogr. foss. Merostometa I, p. 13 in Palaeontogr. soc. Vol. 19.
1875. — *Fischeri*, F. Schmidt, Bemerkungen über die Podolisch-Galizische Silurformation und deren Petrefacten, in Verh. d. Mineral. Gesell. 1875, p. 13.
1876. — *remipes*, F. Römer, *Lethaea palaeozoica.* T. 18, F. 4. (Kop. nach Nieszkowski).
1879. — *remipes*, Gerstäcker, in Klassen und Ordnungen des Thierreichs, T. 35, F. 13—16, (Originale), T. 43, F. 1, 2. (Kopien nach Nieszkowski).
?1859. — *linearis*, Salt. quarterl. Journ. Geol. soc. vol. 15, p. 234, T. 10, F. 15, 16.
?1872. — *linearis*, Woodward, Monograph of the british fossil crustacea of the order Merostomata IV, p. 147, T. 28, F. 10—12, s. Palaeontograph. soc. vol. 26.

Das ganze Thier ist von eilanzettlicher Form, 4 mal so lang als breit. Der Kopf nimmt etwa $^1/_5$—$^1/_6$ der ganzen Länge ein, ist flach gewölbt, nach hinten ansteigend, trapezförmig, mit abgerundeten Vorderecken, $^2/_3$ bis $^3/_4$ so lang als breit. Die grösste Breite am Grunde. Der Vorderrand ist geradlinig oder etwas bogig vorspringend, letzteres besonders bei kleinern oder jüngern Exemplaren. Die Seitenränder geradlinig, divergiren etwas nach hinten. Der Hinterrand schwach concav, kurz vor den scharfen Hinterecken unter stumpfem Winkel nach vorn gebrochen (T. II, F. 1 *a*, T. III, F. 11). Die Augen etwas vor der Mitte, um $^2/_5$ ihrer Entfernung von einander (von der Höhe des Augendeckels gerechnet) vom Seitenrande abstehend. Die Sehfläche nierenförmig, mit einigen Längsfalten, ohne Spur von Netzaugen (wie schon Nieszkowski hervorhebt, der die Augen mit ihrem Deckel genau beschreibt). In der Mitte zwischen ihnen und fast genau in der Mitte des Schildes die punktförmigen zwei Nebenaugen. Von den Hinterecken beginnend verläuft längs den Seitenrändern und dem Vorderrand eine deutliche Randfurche (T. II, F. 1 *a*), die zum Rande hin von einer flachen Leiste begränzt wird, die nach den Hinterecken zu sich verschmälert. Die Leiste zeigt eine innere Kante nach der Randfurche zu und neigt sich schräg nach aussen nach der scharfen äussern Randkante, an welcher der scharfe Umschlag der Schaale nach unten stattfindet. Auf der Oberfläche unterscheidet Nieszkowski eine ganze Anzahl von Wülsten, und bildet sie etwas zu hervorspringend ab, namentlich in der Umgebung des Auges. Für gewöhnlich (T. II,

F. 1 *a*, T. III *a*, F. 1 *a*) erkennen wir nur eine spitz dreieckige Anschwellung, die am Hinterrande beginnt und mit schmaler Spitze bis zu den Nebenaugen reicht. Von hier gehn zwei breite dreieckige Anschwellungen (in Form von Kreisausschnitten) zum Vorderrande und lassen eine flache längliche Furche zwischen sich, die von den Nebenaugen zur Vorderrandfurche reicht. Der grösste, flache Theil der Kopfoberfläche zeigt keine Verzierungen, sondern bisweilen nur einige Längsrunzeln. Die oben genannten Erhöhungen aber sind mit ziemlich dichten, schwarzen, erhabenen, warzenartigen Pünktchen bedeckt; ebenso erscheinen diese auch in der flachen Vertiefung vor den Nebenaugen, in der Randfurche und besonders deutlich, in eine Reihe gestellt, auf den beiden (der innern und äussern) Kanten der Randleiste (s. Nieszk. l. c. T. I, F. 1 u. unsre T. III *a*, F. 1 *a*). Ausserdem treten parallel und nahe dem Hinterrande, am Grunde und zu beiden Seiten der von hier ausgehenden spitz dreieckigen Erhöhung eine Reihe von 4—6 kurzen schwarzen dreieckigen Schuppen hervor, die im Leben wohl als Dornen erschienen; dazwischen sieht man feinere Schuppen. Der Hinterrand selbst zeigt eine schmale wulstige, fein längsgestreifte Kante, die einen ganz kurzen Umschlag nach unten macht, der kaum bis zur obenerwähnten Schuppenreihe reicht. Nach den Ecken zu, an dem nach vorn gebrochenen Theil des Hinterrandes, verliert sich die wulstige Kante. Die flache, fast rechtwinklige Ecke ist mit schwarzen Pünktchen besetzt.

Die Unterseite des Kopfes, mit den Kaufüssen, ist für den Beschreiber am schwierigsten in allen Details festzustellen. Sowohl Nieszkowski als Hall haben ausführliche Darstellungen gegeben, die aber im Einzelnen vielfach nicht übereinstimmen, obgleich Verschiedenheiten bei der nahen Uebereinstimmung der beiderseitigen Objecte, kaum anzunehmen sind. Ich muss zum allergrössten Theil die Nieszkowski'sche Beschreibung bestätigen, während seine Abbildungen viele Ungenauigkeiten enthalten.

Die Unterseite des Kopfes wird zunächst vorn und an den Seiten von dem zarten Umschlage der obern Schaale bis auf etwa $^1/_3$ ihrer ganzen concaven Fläche ausgekleidet, ganz wie bei *Limulus*, (T. III, F. 3). Die Schaale zeigt hier feine Reihen von schuppenartigen nach aussen convexen Erhabenheiten die in wellenförmige Linien angeordnet sind (F. 3 *a*), die dem äussern Rande parallel verlaufen. In der Mitte der Schaale ist die Mundöffnung gelegen, die ebenfalls ganz wie bei *Limulus* von den Hüftgliedern von 5 Paar Kaufüssen umgeben wird, die von hinten nach vorn dachzieglig über einander gelagert sind. Zwischen dem 1sten Paar der dreiseitigen Hüftglieder erkennt man an einigen wenigen Exemplaren (T. III, F. 1, 1 *a*) ein äusserst fein gegliedertes Fühlerpaar, dessen Fäden von einem gemeinsamen Grundgliede auszugehn scheinen, wieder wie bei *Limulus*. Die Fühler erreichen mit ihren Spitzen den Vorderrand des Kopfschildes nicht, und sind daher von oben immer verdeckt. Sie sind so äusserst zart, dass es kein Wunder ist, wenn sie früher nicht nachgewiesen wurden. Durch ihre zarte Beschaffenheit und den Mangel an Scheeren am Ende unterscheiden sie sich wesentlich von den Scheerenfühlern von *Pterygotus* und *Limulus* und erinnern eher an die feinen Fühler andrer Crustaceengruppen. Da ich diese feinen Fühler, die nur ein paar mm. lang und höchstens $^1/_{10}$ mm. stark sind, zweimal sicher an derselben Stelle constatirt

habe, so ist ein Irrthum wohl ausgeschlossen. Die Zahl der Fühlerglieder, die cylindrisch, länger als breit erscheinen, ist schwer festzustellen.

Die 5 Kaufusspaare nehmen vom 1sten zum 5ten stetig an Länge zu. Die 3 ersten Paare sind analog gebildet, das 4te und besonders das 5te Paar zeigen verschiedene Besonderheiten. Die drei ersten Paare (T. III, F. 1, 2, 3, 4, 5, 10, 11, 14, 15, 17, T. III *a*, F. 5), können ganz unter das Kopfschild gezogen werden, so dass sie von diesem verdeckt sind (T. III, F. 2, 5). Sind sie ausgestreckt, so ragt das erste Paar nur mit der äussersten Spitze, oder mit etwa 2 Gliedern hervor, das zweite mit 3 und das dritte mit 4 Gliedern. Die Grundglieder aller drei Fusspaare nehmen etwa die Hälfte des von der Kopfschaale bedeckten Theils der Füsse ein; sie haben so weit sie frei unter dem nächstfolgenden Grundgliede hervortreten eine fast gleichschenklig dreieckige Form, deren Spitze, mit einigen starken Zähnen bewaffnet, zur Mundöffnung gerichtet ist. Die Schenkel des Dreiecks sind beim ersten Gliede fast geradlinig, bei den nächsten je mehr nach hinten desto stärker gebogen, so dass die vordere Seite convex, die hintere concav wird. An den soeben besprochenen freien Theil der Hüftglieder schliesst sich, durch eine hervortretende Kante geschieden, die etwa ebenso breite vom nächst hintern Grundgliede bedeckte Partie an, die ich nur beim 3ten Fusspaar (T. III, F. 5, rechts) nachweisen kann, bei dem sie nach hinten in einem stumpfen Winkel vorspringt, so dass das ganze Hüftglied eine schief viereckige Gestalt mit herabgebogener Spitze aufweist. Nieszkowski hat für alle 4 ersten Fusspaare eine gleichartige vierseitige Form angenommen (l. c. T. I, F. 6), was wohl so ziemlich mit der Wahrheit stimmen wird. Ueber die Einlenkung der Grundglieder in die Unterseite des Kopfschildes bin ich bei den 3 ersten Fusspaaren nicht in's Klare gekommen, diese ist mir nur beim 4ten und 5ten Fusspaar bekannt.

Das 2te Glied der 3 ersten Fusspaare (oder wenigstens des 2ten und 3ten) scheint verkürzt, ringartig, darauf folgen einige gedrungene, gewölbte, fast ebenso breite wie lange Glieder, die an ihrem distalen oft fein gezähnten Ende beiderseits (beim 1ten und 2ten Fusspaar) oder nur auf einer Seite (so meist beim 3ten Fusspaar, wo die eingelenkten Stacheln vorzüglich an der äussern Seite des Fusses vorkommen), eingelenkt pfriemenförmige Stacheln tragen, die zum Theil wenigstens (T. III, F. 16) von sehr zierlicher Form, auf einer Seite convex, auf der andern als Hohlkehle erscheinen. Das kurze und schmälere, vorletzte Glied geht vorn jederseits in einen kräftigen Stachel aus, der bisweilen eine Spur von Einlenkung zeigt. Zwischen diesen beiden vorspringenden Spitzen erscheint nun das Endglied als kräftiger, etwas gekrümmter, pfriemenförmiger Stachel, der die beiden seitlichen Spitzen meist merklich überragt (T. III, F. 14, 15). Da nun auch das drittletzte Glied meist jederseits einen eingelenkten Stachel trägt, so erscheinen die vorragenden Spitzen der drei ersten Fusspaare als aus 5 Stacheln gebildete Büschel (T. III, F. 10, 11, 17), wie sie als solche schon in der ursprünglichen Abbildung von Dekay angedeutet sind (S. Bronn's Lethaea 1. Aufl. T. IX, F. 1) und auch von Eichwald in seiner ersten Beschreibung unsres *Eurypterus* (Bull. de Mosc. 1854 I, p. 102) erwähnt werden.

Ueber die Zahl der Glieder bin ich nicht ganz in's Reine gekommen. Nieszkowski nimmt beim 1sten Paar (ohne den Endstachel) 6, beim 2ten 7, beim 3ten 8 an; ich zähle beim ersten Fusspaar ebenfalls 6, beim 2ten und 3ten 7 Glieder, ohne den Endstachel. Beim 2ten und 3ten Paar sehe ich nur ein kurzes ringförmiges Glied, das gleich auf das Hüftglied folgt, während Nieszkowski deren 2 annimmt. Auch hat Nieszkowski nur die drei Endstacheln abgebildet, während er die übrigen eingelenkten Stacheln nur im Text als bisweilen vorkommend erwähnt.

Hall nimmt für alle 3 Fusspaare 9 Glieder an, aber er zählt den Endstachel mit und hat irrthümlicher Weise das grosse Grundglied in zwei Glieder getheilt, von denen das innere die Zähne tragen soll, die er übrigens nicht nachweist. Es kommt also bei ihm auf 7 Glieder, ohne den Endstachel heraus, womit meine Beobachtung nahe übereinstimmt. Was die Abbildungen beider Verfasser betrifft so hat Nieszkowski die Grundglieder mit den Zähnen, Hall die Endglieder mit den Stacheln richtiger dargestellt.

Das 4te Fusspaar (T. III, F. 1, 2, 4, 5, 6, 9, 10, 12, 13) hat wie gesagt schon einen etwas abweichenden Bau. Es ist viel schlanker als die ersten drei Paare und ragt immer seitlich über das Kopfschild heraus. Es besteht aus 8 Gliedern und einem Endstachel, wie auch die beiden frühern Monographen richtig angegeben haben. Das vollständige Grundglied (T. III *a*, F. 4) ist in seiner allgemeinen Form schon ziemlich richtig von Nieszkowski (l. c. T. II, F. 8) dargestellt worden; es ist schief viereckig, viel grösser als bei den ersten 3 Gliedern, da es bis fast hart an den Kopfrand reicht; die vordere (proximale) Spitze mit den Zähnen biegt sich nach hinten (T. III, F. 4), die Zähne etwa 6 an der Zahl, sind vorn lang und schmal, nach hinten kürzer. Von der Oberfläche tritt nur ein verhältnissmässig kleines dreieckiges Feld (T. III, F. 4) frei hervor, das durch eine erhabene Kante begränzt wird, die vor der nach hinten gebogenen bezahnten Spitze am Vorderrande mündet; diese Spitze wird demnach regelmässig von dem vortretenden grossen Grundgliede des 5ten Fusspaars bedeckt. Am äussern und vordern Ende des Grundgliedes erkennen wir (T. III, F. 1, 5, 6) einen länglich dreieckigen, zipfelförmigen, nach aussen gewandten Vorsprung, den wir mit Grund als Gelenkkopf betrachten zu können glauben, mit dem das Grundglied nahe am Aussenrande der Innenseite des Kopfschildes eingelenkt war. Dieser Gelenkfortsatz zeigt am Grunde einen Einschnitt und befindet sich gerade über der Einlenkungsstelle des 2ten Gliedes. Auf das Grundglied folgen zwei kurze ringförmige Glieder, von denen das erste durch einen vorspringenden stielförmigen Gelenkfortsatz (T. III, F. 5, 6) mit dem Grundgliede artikulirt. Das vierte Glied ist gestreckt oblong, cylindrisch, etwa noch einmal so lang als breit, am Grunde mit einer kleinen Einbucht versehn, an der Einlenkungsstelle des zweiten ringförmigen Gliedes (T. III, F. 12). Auf der Oberfläche bemerken wir jederseits einen scharfen Längskamm; der Vorderrand ist gerade abgeschnitten, jederseits an den Ecken mit einem kurzen Zahn. Dem 4ten Gliede gleichen auch das 5te, 6te und 7te Glied, nur dass diese als fernrohrartig eingeschoben, allmählich immer schmäler und auch etwas kürzer werden.

Das letzte, 8te Glied ist kürzer, endet jederseits vorn in einen langen lancettlichen nicht eingelenkten Dorn; zwischen diesen beiden Enddornen ist der bewegliche Endstachel eingelenkt, der mit den beiden Dornen von gleicher Länge ist; in Folge davon erscheint das Endglied gleichmässig dreispitzig, (T. III, F. 12, 13. T. III *a*, F. 1), ein Charakter, der nur dem 4ten Fusspaar zukommt und nicht zugleich allen früheren, wie Nieszkowski irrthümlich angegeben hatte. Gewöhnlich beginnt der hervorragende Theil des 4ten Fusspaares mit der Mitte des 4ten, also des ersten gestreckten Gliedes; dieser hervorragende Theil bildet gewöhnlich einen leichten nach hinten offenen Bogen und kommt in seiner Länge etwa $^2/_3$ der Breite des Kopfschildes gleich.

Das 5te Fusspaar, (T. III, F. 1, 2, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 17, 18, 19, 20, 21, 22, T. III *a*, F. 1, 2, 3), als gewöhnlich am vollständigsten erhalten, ist sowohl von Nieszkowski als Hall grösstentheils richtig beschrieben und von Hall auch gut abgebildet worden. Nur in einigen Details werde ich Zusätze zu machen haben. Es ist ein mächtiger Ruderfuss, dessen Grundglieder mit dem zwischen ihnen eingefügten Metastoma die ganze Breite des hintern Theils des Kopfschildes einnehmen und nach hinten auch über dasselbe hervorragen. Die Länge des seitlich frei hervorragenden Theils der Ruderfüsse übertrifft die Breite des Kopfschildes etwa um $^1/_3$ derselben. Das Grundglied ist von vierseitiger rhomboidaler Form; die vordere Seite schiebt sich unter (von der Bauchseite gesehen über) das Grundglied des 4ten Fusspaars und verdeckt dessen hintern Theil; die hintere Seite schiebt sich unter den vordern Theil des ersten Blattfusses, oder des Operculum (T. III, F. 7, T. III *a*, F. 6, 11), das am Hinterrande des Kopfschildes entspringt und die innere Seite schiebt sich seitlich unter das Metastoma, so dass sie dieses an der untern freiliegenden Seite des Kopfschildes in einer concaven Linie begränzt (T. III, F. 1, 2, 4 von unten, F. 7 und T. III *a* F. 6 von oben gesehn). Die beiden Zahnvorsprünge an der vordern und innern Ecke (T. III, F. 2, 4, T. III *a*, F. 2, 3) liegen nicht in einer Ebene; der vordere stumpfe Zahn kommt vor das Metastoma zu liegen; der hintere leicht aufwärts gerichtete wird vom vordern Ende des Metastoma (von unten gesehen) verdeckt und besteht aus 6 feinen kurzen Zähnen, die wie bei *Pterygotus* von vorn nach hinten an Stärke abnehmen, (T. III, F. 9). Der rundliche, zipfelartige Gelenkfortsatz der hintern und äussern Ecke, ist auf der untern Seite (T. III, F. 1, 4, 8, T. III *a*, F. 3) nur durch 2 Einkerbungen von der Platte des Grundgliedes geschieden, von denen die auf der Vorderseite belegene schwach, die auf der äussern Seite dicht über der Einlenkung des 2ten Fussgliedes belegene dagegen tief eingreifend ist. Auf der obern Seite (T. III, F. 9) erscheint der genannte Gelenkfortsatz durch eine deutliche durchgehende Furche vom übrigen Grundgliede geschieden.

Das 2te und 3te Fussglied (T. III, F. 1, 2, 5, 9) sind kurz, ringförmig, das 2te Glied (T. III, F. 1, 2, 8, 9) zeigt ähnlich wie schon beim 4ten Fusspaar bemerkt, einen stielförmigen, unter spitzem Winkel aufsteigenden Fortsatz auf der proximalen Seite, der zur Gelenkverbindung mit dem Grundgliede dient. Das 4te Glied (T. III, F. 1, 2, 5, 17, 18) ist oblong, etwa noch einmal so lang als breit, etwas bogig nach vorn convex gekrümmt, mit einer deutlichen Längs-Crista und deutlichen Spitzen an der äussern Seite zu beiden Seiten der

Einlenkung des 5ten Gliedes. Diese Spitzen wiederholen sich auch beim 5ten und 6ten Gliede. Das 5te Glied (T. III, F. 2, 17, 18) ist kürzer, fast quadratisch, am Aussenrande an der Einlenkungsstelle etwas ausgeschweift. Das 6te Glied (T. III, F. 2, 17, 18, 19), erweitert sich nach aussen, ist von halbovalem Umriss und springt in der Mitte der Aussenseite mit einem Gelenkfortsatz vor, an den sich das grosse platte 7te Glied ansetzt. Bei Nieszkowski sind diese Details ungenau gezeichnet. Bei Hall finden wir die entsprechende Darstellung bei den grossen Exemplaren auf T. 81 *C* und 83. Die tiefen Einbuchtungen des 5ten und 6ten Gliedes wie auf T. 80 *A*, F. 1 und 3, und beim Diagramm, Seite 397 kennen wir bei unsrer Art nicht. Die beiden grossen platten Glieder 7 und 8 (T. III, F. 2, 17, 18, 19, 20, 21, 22), bilden zusammen fast einen Halbkreis und dienten wohl als eigentliche Ruderplatte. Der hintere proximale vorspringende Fortsatz des 7ten Gliedes (T. III, F. 2, 17, 18, 19, 21) entspricht nicht einer Einbuchtung im Aussenrande des 6ten Gliedes, wie man nach Analogie der Hall'schen Darstellung (l. c. p. 397) erwarten sollte, sondern schiebt sich seitlich unter dasselbe. An der distalen und hintern Seite des 7ten Gliedes befindet sich eine 3 seitige Platte (T. III, F. 2, 18, 20, 21), die mit dem übrigen Gliede durch eine Nath verbunden ist. Diese Platte hat Hall richtig dargestellt und Nieszkowski nicht bemerkt. Hart vor ihr, nach vorn in einer Bucht, liegt die Artikulationsstelle des eiförmigen 8ten Gliedes, das sich bei der Bewegung über die genannte Platte, wie ein Scheerenblatt über das andere schiebt[1]), wie Hall gleichfalls schon richtig bemerkt hat (Nieszkowski nahm noch eine tiefe Gelenkgrube an). Eine weitere Verschiebung des 8ten Gliedes als bis zur Nath kommt nicht vor. Das 8te Glied ist bekannt; (T. III, F. 2, 17, 18, 20, 22), es zeigt an der Vorderseite eine feine Zähnelung (F. 20, 22) und an der distalen Spitze eine tiefe Einbucht, die von einem stumpfen, beweglichen, platten Zahn ausgefüllt wird, den wir als 9tes (Endglied) bezeichnen können.

Die Oberfläche der Kaufüsse zeigt auf den Grundgliedern deutlich die charakteristische Schuppenzeichnung (T. III, F. 3, 9, T. III *a*, F. 3), sowohl auf der untern als der obern Seite, auf den übrigen Gliedern ist dieselbe nur selten wahrzunehmen.

Das Metastoma (T. III, F. 1, 4, 7; T. III*a*, F. 1*b*, 6) ist schon von Nieszkowski (l. c. T. II, F. 1, 3) richtig abgebildet. Es ist von ovaler Form, etwa 1 mm. in der Mitte dick, etwa $1^3/_4$ mal so lang wie breit, die grösste Breite in der Mitte. Am vordern Rand ist eine seichte, kurze Furche zu erkennen; in Folge davon erscheint dieser vordere Rand von oben oder der Rückenseite gesehn (T. IV, F. 4: hier ist der obere Vorderrand, durch Abtragung der Masse des Metastoma, von unten sichtbar) ausgebuchtet, was von unten her nicht der Fall ist.

Diese Ausbuchtung bildet das untere Ende der Mundöffnung. Seitlich reicht das Metastoma bis zur concaven Kante an der Innenseite des Grundgliedes vom grossen Fusspaar, von der an der Randsaum dieses Gliedes sich oben über das Metastoma schiebt (T. III, F. 2, 4, von unten; F. 7 und T. III *a*, F. 6 von oben).

---

1) Wie es scheint, kann übrigens das 8te Glied sowohl über als unter die dreieckige Platte geschoben werden.

Der Mittelleib oder Thorax, vom Rücken gesehn, besteht (T. II, F. 9, 10, T. III *a*, F. 9) aus 6 Gliedern, die zusammen etwa den 4ten Theil der Gesammtlänge des Thieres ausmachen. Die Breite wächst allmählich bis zum 4ten Gliede (zugleich die grösste Gesammtbreite), um dann allmählich wieder etwas abzunehmen. Die Glieder sind in der Mitte leicht erhaben, senken sich etwas nach den Seiten, um dann nach den Seitenrändern zu wieder anzusteigen (T. II, F. 9).

Diesem Relief entsprechend ist der Vorderrand der Thoraxglieder in der Horizontalebene in der Mitte convex, an den Seiten concav, und springt zu den Vorderecken wieder etwas vor (T. II, F. 9; T. III *a* F. 1 *a*, 12). Man kann in der beschriebenen Configuration eine schwache Andeutung von Rhachis, Dorsalfurchen und Pleuren der Trilobiten finden.

Die einzelnen Glieder sind wie bei den Trilobiten unten nicht geschlossen, sondern zeigen an den Seiten nur einen Umschlag (T. II, F. 3, verbessert III *a*, F. 8) der sich bis auf etwa ¼ der ganzen Breite des Gliedes erstreckt und von hinten nach vorn gerade abgeschnitten ist. Zu gleicher Zeit zeigt jedes Glied auch an seinem hintern Rande (T. III *a*, F. 9) noch einen schmalen Umschlag, mit dem es sich über die Gelenkfläche am Vorderrand des nächstfolgenden Gliedes schiebt, und so mit diesem artikulirt, wie es auf dem Durchschnitt des *Eurypterus Scouleri* bei Woodward (l. c. p. 137, F. 8), deutlich zu sehn ist und auch auf unsrer restaurirten Figur (T. III *a*, F. 1 *c*) hervortritt. Die Artikulation ist an dem Original von F. 10 auf T. II gut zu sehn und darnach in der schematischen Figur gezeichnet. Die Beweglichkeit der einzelnen Glieder ist eine sehr beschränkte, die mit dem Auseinanderschieben und Zusammendrängen der einzelnen Glieder zusammenhängt und den Uebergang aus der horizontal gestreckten Form in eine schwach convexe oder concave Form des Thorax bedingt. Eine Biegung zur Seite kommt nicht vor.

Das erste Glied ist kürzer als die übrigen, es artikulirt nicht mit dem Kopfschild, (T. II, F. 1 *a*; T. III *a*, F. 9), daher sich auch kein vorderer Articularsaum erkennen lässt, wie bei den übrigen Gliedern. An dessen Stelle sehen wir (T. III *a*, F. 9) am convexen Vorderrande einen dunkeln, schmalen, fein quergestreiften Randwulst, der vom Kopfschild meist durch einen schmalen linearen Zwischenraum (T. II, F. 1 *a*) getrennt erscheint, der im Leben wohl mit cartilaginöser Masse ausgefüllt war. Dieser schmale Randstreif erstreckt sich nicht über die nach vorn vorspringenden Seitenlappen des ersten Gliedes; diese schliessen sich genauer an die schräg abgeschnittenen Hinterecken des Kopfschildes an und erscheinen mit diesen wie durch eine Nath verbunden. An den meisten isolirt gefundenen Kopfschildern ist dieser Zusammenhang mit dem ersten Leibesgliede erhalten geblieben.

Die Oberfläche der Thoraxglieder (T. III *a*, F. 12; Nieszk. l. c. T. I, F. 5) zeigt am Grunde der zugleich etwas abwärts gewandten vordern Gelenkfläche einen etwas hervortretenden dunkeln Streifen, der in der Mitte eine schwache Einbuchtung hat; dieser Streifen besteht aus einer dichten Reihe von feinen schuppenartigen Erhöhungen, deren Convexität nach hinten geht. Die Gelenkfläche selbst ist von ähnlichen aber schwächern, nicht regelmässig angeordneten Schuppen dicht bedeckt; ebenso erkennen wir ein breites Band solcher

Schuppen gleich hinter dem obenerwähnten Streifen, das die Mitte des Gliedes (von vorn nach hinten) aber nicht erreicht und nach den Seiten zu schmäler wird. Nahe dem Hinterrande des Gliedes sehen wir eine Reihe von 4—6 starken spitzdreieckigen Schuppen, die im Leben als kurze Dornen hervorstehn mochten; die mittlern Spitzen sind die stärksten, über jeder derselben sehen wir noch eine Gruppe von feinern Schuppen, die bis zum vordern Bande reicht, und ebenso ist der Zwischenraum zwischen den grossen schwarzen Spitzen von feinern Schuppen eingenommen. Der Hinterrand des Gliedes, der hintere Umschlag und die nach vorn gewandten Seitenflügel zeigen keinerlei Verzierungen. Der Umschlag reicht bis zur Dornenreihe.

Die Unterseite des Thorax zeigt eine durchaus eigenthümliche Bildung, die von Nieszkowski im Ganzen richtig erkannt, von Andern aber wiederholt falsch aufgefasst worden ist. Die Thoraxglieder sind wie oben gesagt unten nicht geschlossen, sie wurden hier aber von einer Reihe von 5 beweglichen blattfussartigen Platten bedeckt, die dachzieglig übereinander liegen, indem jede Platte bis zu ihrer Mitte von der nächstvorhergehenden bedeckt wird und der Hinterrand einer vordern Platte mit dem Vorderrand der übernächsten zusammenfällt.

Die 5 Platten entspringen in gleicher Höhe mit den entsprechenden Dorsalgliedern und kommen in ihrer Längenausdehnung zwei derselben gleich, so dass die 1ste das 1ste und 2te, die 2te das 2te und 3te, die 5te das 5te und 6te Dorsalglied von unten deckt. Die Platten sind durchaus frei von den Dorsalgliedern und hatten eine stärkere Wölbung als diese, wie aus dem Durchschnitt T. II, F. 10 hervorgeht und dem Umstand, dass bei den gewöhnlichen von oben nach unten zusammengedrückten Exemplaren, die Seitenränder der untern Platten seitlich über die Rückenglieder hervorragen, (T. II, F. 9, T. III, F. 17; in F. 9 ist eine vorragende Platte zu viel gezeichnet). Die Oberfläche der Platten ist durchweg mit feinen schuppenartigen Erhabenheiten bedeckt (T. III *a*, F. 7, 8, 9), und zwar auf beiden Seiten, der obern und der untern. Dass die Platten wirklich von oben und unten geschlossen sind und aus zwei Lamellen bestehn wie das Metastoma, liess sich wiederholt deutlich erkennen.

Die vorderste Platte, oder der vorderste Blattfuss (T. II, F. 1, 2, 3, 6, 7, 8, T. III *a*, F. 1*b*, *f*, 6, 7, 8, 10, 11), ist schon von Hall und Woodward richtig dargestellt und mit dem Operculum bei *Limulus*, das die Generationsorgane trägt, richtig verglichen worden; er entspringt in gleicher Höhe mit dem Hinterrand des Kopfschildes und endet entsprechend dem Hinterrande des 2ten Thoraxgliedes; sein Vorderrand schiebt sich über den Hinterrand des Metastoma und der Grundglieder des grossen Fusspaars und springt in der Mitte etwas vor. Er besteht (s. T. III *a*, F. 1 *f*) aus zwei Seitenlappen (*b*) und einem mittlern Zipfel, (*a*), der am Grunde durch Näthe mit den Seitenlappen verbunden ist. Der mittlere Zipfel zeigt zwei dreieckige Grundglieder, (a_1) deren Basen unter stumpfem Winkel zusammenstossen; die äussern Seiten sind gebogen, die innern bilden eine gebrochene Linie, in deren vordern Theil die beiden Grundglieder in einer kurzen Nath zusammenstossen, während die

hintern Theile unter spitzem Winkel divergiren und die vordere Spitze des Hauptgliedes (a_2) des mittlern Zipfels zwischen sich aufnehmen. Dieses Hauptglied liegt bis auf seine dreieckige Basis frei zwischen den Seitenlappen und ist von oblonger Form; es ragt etwas über die Seitenlappen hervor und zeigt am hintern Ende 2 divergirende Spitzen.

Auf das Hauptglied folgen noch zwei kurze schmälere Glieder, von denen das 2te (a_3) in seiner Form das Ende des Hauptgliedes mit seinen divergirenden Spitzen wiederholt, während das 3te (a_4) aus zwei getrennten, nach hinten gekehrten an den Spitzen nur wenig divergirenden kurzen Fortsätzen besteht (T. II, F. 6; T. III *a*, F. 1 *f*). Der ganze Zipfel reicht mit seinem (übrigens selten erhaltenen) Ende bis über den Hinterrand des 2ten Blattfusses, also bis über das 3te Rückenglied hinaus (T. II, F. 6; T. III *a*, F 1 *b*). Die Seitenlappen des Operculum oder ersten Blattfusses sind von viereckiger, fast rectangulärer Form, der vordere äussere Winkel ist abgerundet, der innere hintere springt zu beiden Seiten des freien Mittelzipfels in scharfer Ecke vor. Jeder Seitenlappen ist durch eine horizontale Nath in ein vorderes (b_1) und ein hinteres Glied (b_2) getheilt. Die Nath verläuft horizontal nach beiden Seiten von den Grundgliedern des Mittelzipfels angefangen und biegt sich am äussern Rande der Seitenlappen nach vorn, wo sie zugleich undeutlicher wird, T. III *a*, F. 7, 8). Das vordere Glied (b_1) zeigt vorn noch einen horizontalen Streifen, der aber keine Nath darstellt, sondern nur durch langgezogene aneinandergereihte Schuppenränder gebildet wird, (T. III *a*, F. 7, 8). Diese falsche Nath entspricht der Gränze bis zu welcher der erste Blattfuss von den Grundgliedern des grossen Fusspaars bedeckt wird. Zwischen dieser falschen und der wahren Nath nun, sehen wir häufig zu beiden Seiten der Grundglieder des Mittelzipfels auf den Seitenlappen ein ovales (T. II, F. 2, 3; T. III *a*, F. 1 *f*), durch eine Nath begränztes Feld (*c*), das, da es nicht immer sichtbar hervortritt, etwa mit den Geschlechtsfunktionen oder auch mit der Geschlechtsdifferenz des *Eurypterus* in Verbindung gebracht werden kann.

Noch muss ich beim ersten Blattfuss oder Operculum hervorheben, dass er am Grunde oder an seiner vordern Seite zwei verschiedene Formen trägt. Entweder springt der Vorderrand deutlich in der Mitte im stumpfen Winkel vor (T. III *a*, F. 7), dann divergiren die äussern Seiten der Grundglieder des Mittelzipfels stärker nach vorn und die falsche Nath scheidet jederseits vorn ein dreiseitiges Stück von den Seitenlappen ab, — oder die Mitte des Vorderrandes springt kaum oder gar nicht vor, die äussern Seiten der Grundglieder des Mittelzipfels sind stärker gebogen und divergiren weniger, während die falsche Nath auf der Aussenseite der Seitenlappen mündet und ein langgestreckt, vierseitiges Stück vorn an den Seitenlappen abschneidet (T. III *a*, F. 8). Es ist schwer zu sagen, ob diese Verschiedenheiten vielleicht auf Geschlechtsdifferenzen beruhen. Das ovale Feld (*c*) kommt bei beiden Formen vor.

Der 2te Blattfuss (T. II, F. 1, 2, 3, 4, 8), zeigt noch eine gewisse Analogie mit dem Ersten, insoweit als man einen mittlern Zipfel mit paarigen Grundgliedern und freiem Ende von den Seitenlappen scheiden kann, die jede wieder durch eine Nath in einen vordern und einen hintern Abschnitt getrennt werden; aber die beiden Grundglieder des mittleren

Zipfels (T. II, F. 1, 4) sind fast vollständig unter einander verwachsen, so dass sie ein einziges breit dreieckiges Feld bilden, aus dessen Spitze der eigentliche Medianzipfel entspringt, der eine verkümmerte, griffelförmige Form zeigt (T. II, F. 4), ohne Spur einer weitern Gliederung. Die freien hintern und innern Ecken der Seitenlappen werden abgerundet, wodurch sich der 2te Blattfuss am hintern Ende leicht erkennen lässt (T. II, F. 2, 3).

Auffallender Weise ercheint an manchen Stücken (T. II, F. 5, T. III, F. 1), der erste Blattfuss in der Form des zweiten mit verkümmertem Zipfel und abgerundeten innern Ecken der Seitenlappen; es folgen dann 4 Blattfüsse von gleichartiger Form, ganz ohne Zipfel. Vielleicht auch hier ein Geschlechtsunterschied.

Der 3te, 4te und 5te Blattfuss sind immer gleichartig gebildet und viel einfacher als die frühern beiden. Der mittlere Zipfel fehlt ganz und die Seitenlappen sind durch eine gerade von vorn nach hinten laufende Nath unter einander verbunden; ebenso lassen sich auch nicht durch Näthe geschiedene vordere und hintere Abschnitte der Seitenlappen unterscheiden. Wir sehen in der Mitte der Seitenlappen, dem Ursprung des nächstfolgenden Blattfusses entsprechend nur eine falsche Nath, die durch lineare Anordnung der schuppenartigen Ornamente der Oberfläche gebildet wird, (T. II, F. 2, T. III *a*, F. 9).

Hall und nach ihm Woodward haben, wie schon früher erwähnt, blos das Operculum gekannt und die übrigen Blattfüsse nicht constatirt, obgleich Hall (s. oben S. 49) wenigstens die mittlere Verticalnath auf den hintern Blattfüssen bei *Eurypterus robustus* richtig dargestellt. Nieszkowski ist in einen andern Fehler verfallen; er hat der Analogie mit *Limulus* zu Liebe 6 Blattfüsse angenommen, während ihrer nach meinen Beobachtungen an zahlreichen Stücken doch nur 5 sind, ich wüsste auch nicht, wo der 6te zu suchen wäre. Ferner hat er den 2ten und 3ten Blattfuss (l. c. T. II, F. 5 u. 6), falsch dargestellt. Er glaubte die 3 verschiedenen Glieder des Medianzipfels am Operculum auf die Zipfel der 3 ersten Blattfüsse vertheilen zu müssen, die mit ihren Enden einer hinter dem andern hervorragen. Nachdem sowohl Hall als ich (T. II, F. 6; T. III *a*, F. 1 *f*), den dreigliedrigen Zipfel richtig dargestellt und ausserdem die wahre Beschaffenheit des Medianzipfels am 2ten Blattfuss (s. oben) richtig erkannt ist, kann von einer solchen Auffassung nicht mehr die Rede sein, die ich allerdings früher mit Nieszkowski getheilt habe. Die F. 5 bei ihm stellt ebenso wie F. 4 den ersten Blattfuss dar, nur ohne die ovalen Platten (*c*) an den Seitenlappen, wie solche Exemplare häufig genug vorkommen. Der zweite Blattfuss (l. c. F. 6) ist von ihm als 3ter aufgefasst und falsch ergänzt worden. Das Original seiner Darstellung bildete das auf unsrer T. II, F. 1 abgebildete Stück des Dorpater Museums, bei dem das Ende des Zipfels nicht erhalten ist.

Was nun endlich die Homologie unsrer 5 Platten zu den Blattfüssen des *Limulus* betrifft so besteht für uns wenigstens (wie schon früher erörtert) kein Zweifel mehr wegen ihrer analogen Anordnung, Lage und Beschaffenheit. Von Kiemen habe ich allerdings keine Spuren gesehn, von denen wie früher (S. 47) erwähnt Woodward solche bei *Pterygotus* nachgewiesen hat.

Das Abdomen oder der Hinterleib (bei Nieszkowski T. I, F. 1 und T. II, F. 1 schon richtig dargestellt) besteht aus 6 geschlossenen (T. III *a*, F. 11) ringförmigen Gliedern, die von vorn nach hinten sich schnell verschmälern und verlängern. Die Glieder (T. II, F. 2) erscheinen in einander geschoben wie die Auszüge eines Fernrohrs; jedes von ihnen zeigt am äussern Winkel des Hinterrandes kurze spitze Zähne, die beim Endgliede zu zwei vorspringenden Lappen werden, welche die Basis des Endstachels zwischen sich einschliessen. Die hintern Abdominal-Gliedern schieben sich mit ihrem vordern Gelenksaum unter den hintern Umschlag des vorhergehenden Gliedes und artikuliren mit demselben nach allen Seiten, so dass wir das Abdomen mit dem Endstachel nach allen Richtungen zu dem fast unbeweglichen Thorax verstellt finden. Die Länge des Abdomen ohne den Endstachel nimmt etwas über den 3ten Theil der Gesammtlänge des Thieres ein.

Die Abdominalglieder sind einfach gewölbt, auf der Unterseite etwas stärker als auf der obern: ihre Oberflächenbeschaffenheit ist von Nieszkowski schon vollkommen genau und richtig beschrieben und abgebildet. Die obere Seite ist analog beschaffen wie die der Thoraxglieder (s. d. restaurirte Fig. T. III *a*, F. 1 *a*), wir sehen vorn am Grunde der Gelenkfläche den erhabenen Streifen aus dichtgedrängten Schüppchen gebildet, dahinter eine Reihe von dornenartigen, schwarzen dreieckigen Vorsprüngen, deren Zahl sich je mehr nach hinten desto mehr verringert. Auf dem 1sten Abdominalgliede sind noch etwa 5 Spitzen zu erkennen, denn folgen 4, 3 und endlich auf dem vorletzten 2; bei diesen Gliedern lässt sich vor jeder Dornenspitze eine Gruppe von kleinen Schüppchen erkennen, die bis zur vordern Schuppenreihe reicht. Auf dem letzten zweilappigen Gliede endlich sind nur zwei divergirende Verticalreihen von Schuppchen zu sehn ohne stärkere, dornenartige Vorsprünge; zugleich ist der Seitenrand des letzten Gliedes fein gezähnt. Die Unterseite der Abdominalglieder (T. II, F. 2) erscheint in der Mitte dunkel an den Seiten heller. In der Mitte sehen wir eine Anhäufung grosser schuppenartiger Erhebungen, die sich nach den Seiten zu verlieren. Die Gränze der Gelenkfläche ist ähnlich durch einen Streifen markirt wie auf der Oberseite; der Hinterrand erscheint durch vorspringende Schüppchen gezähnt. Die hintern Vorsprünge des Endgliedes erscheinen von verschiedener Stärke bald spitzer, bald mehr gerundet, (bei grössern Exemplaren) doch habe ich hierauf keine specifischen Unterschiede gründen können, die Gelenkfläche des Endgliedes (T. III *a*, F. 13) erhebt sich etwas über die Fläche des Gliedes.

Der Endstachel oder Telson der Engländer nimmt etwas mehr als den 4ten Theil der (T. II, F. 2; T. III *a*, F. 1) Gesammtlänge des Thieres ein. Er ist ebenfalls schon von Nieszkowski genügend beschrieben und abgebildet. Er ist ziemlich linear, von dem angeschwollenen Gelenkkopf zur Spitze allmählich verschmälert, etwa 5—6 mal so lang als die Breite am Grunde, vierkantig, mit kurzer Furche am Grunde auf der obern Seite; die Kanten fein gezähnt. Häufig findet man ihn gequetscht, dann erscheint die Spitze verbreitert (T. III *a*, F. 14 links). Ich glaube nicht, das hier eine wirkliche Formverschiedenheit zu Grunde liegt.

Maasse:

Ganze Länge.	Grösste Breite.	Kopflänge.	Kopfbreite.	Endstachel.
56 mm.	14 mm.	9,5 mm.	12,5 mm.	15 mm.
62 »	15,5 »	11 »	14,5 »	17 »
72 »	17,5 »	12 »	16 »	20 »
80 »	20 »	13,5 »	17,5 »	—
101 »	25 »	18 »	24 »	27 »
120 »	30 »	21 »	29 »	—
—	—	23 »	32 »	—
—	—	25 »	35 »	—
—	40 »	25 »	37 »	—
—	—	39 »	60 »	—
—	—	40 »	55 »	—
—	—	47 »	62 »	—
—	—	—	—	42 »

Nach den grössten Köpfen zu urtheilen dürfte die Gesammtlänge 240 mm. erreichen, doch sind solche Exemplare selten.

Geschichte der Art und Beziehungen zu verwandten Arten. Der Entdecker unsres Oeselschen *Eurypterus*, Dr. A. v. Schrenck, unterschied ihn nicht vom amerikanischen *E. remipes* Dek., darin folgten ihm anfangs Eichwald (1854), ich selbst in frühern Arbeiten und unser Monograph Nieszkowski. Das Verdienst zuerst auf die Identität unsrer Art mit dem podolischen[1]) *E. tetragonophthalmus* Fisch. aufmerksam gemacht zu haben, gebührt Eichwald (1857), der auch den auf ein mangelhaft erhaltenes Exemplar gestützten Namen *tetragonophthalmus* ganz passend in *E. Fischeri* umwandelte. Hall erwähnt auch (Palaeontology New York III, p. 384), dass die Fischer'sche Art von *remipes* verschieden sei, giebt aber die Unterschiede nicht an. In seiner Uebersicht sämmtlicher bekannten Merostomata zu Anfang seiner Monographie dieser Gruppe (I p. 63) führt Woodward auch einen *E. nanus* Ang. auf, der nachher auch in Bigsby's *Thesaurus siluricus* übergegangen ist. Diese Art ist nirgends beschrieben und beruht, wie mir Prof. Lindström in Stockholm schreibt, nur auf einer Mss. Etikette, die von ihm einen kleinen Exemplar des *E. Fischeri* aus Gotland in einer Sendung an das British Museum beigelegt war. Jetzt ist auch Lindström überzeugt, dass der Name *E. nanus* ganz zu streichen ist. Auf Gotland kommt nur der *E. Fischeri* vor.

Von den besser bekannten englischen Arten steht keine unsrer öselschen nahe, nur der blos durch seinen Schwanzstachel bekannte *E. linearis* Salt. könnte möglicherweise identisch sein. Der Stachel ist vierkantig wie bei unsrer Art, scheint aber doch noch etwas

---

1) S. über das Vorkommen in Podolien meinen oben (S. 50) citirten Artikel über die podolisch-galizische Silurformation S. 13.

weniger schlank, also kürzer und breiter zu sein. Ein Umstand der für seine Identität sprechen würde, ist sein Zusammenvorkommen mit *Pterygotus gigas*, der unsrer öselschen Art ebenfalls vorzugsweise nahe steht.

Die amerikanischen Arten *E. remipes* Dek. und *lacustris* Harl. stehen dagegen unsrer Art ganz besonders nahe und es ist kein Wunder, dass man sie lange mit ihr identificirt hat. Sie kommen genau in den nämlichen geologischen Niveau vor und könnten ganz gut als lokale geographische Varietäten unsrer Art angesehn werden. Der Kopfform nach steht unsre Art ziemlich in der Mitte zwischen den beiden amerikanischen, doch ist bei letztern die bei uns gewöhnliche trapezoidale Form selten so ausgeprägt. Auch das Metastoma weist einen kleinen Unterschied auf, indem seine grösste Breite bei unsrer Art in die Mitte, bei den amerikanischen etwas vor dieselbe kommt. Die grössere Zahl der Schuppenreihen auf der Oberseite bei unsrer Art, auf die Eichwald aufmerksam macht, scheint mir kein ganz genügendes Kennzeichen zu sein. Am meisten scheint sich der Schwanzstachel von dem der amerikanischen Arten zu entfernen, da er bei keiner derselben so schlank wird; ebenso ist auch das letzte Leibesglied bei den amerikanischen Arten am Grunde nie so tief eingeschnitten wie bei unsrer, bei der in dieser Beziehung allerdings auch Variationen vorkommen.

Vorkommen: Da die Fundorte unsrer Eurypteren schon oben ausführlich besprochen sind, so könnten hier noch ein paar Worte über die Art des Vorkommens im Gestein Platz finden. Ganze Exemplare sind verhältnissmässig selten; am häufigsten an solchen Stellen, wo grosse Mengen von Eurypteren zusammen und übereinander liegen. An solchen Stücken lösen sich gewöhnlich schon beim Brechen ein Theil der Exemplare ab. Am häufigsten findet sich der Kopf allein, oder mit dem 1sten Thoraxgliede verbunden. Ebenso sind auch nicht selten Exemplare, die Kopf und Thorax im Zusammenhang zeigen; auch findet sich häufig das Abdomen isolirt, mit und ohne Schwanzstachel, es sind aber dann die Exemplare mit freigelegter Bauchseite häufiger als die von der Rückenseite; das gilt auch von den ganzen Exemplaren, so dass die letzten Abdominalglieder vom Rücken freigelegt, geradezu selten sind. Die stärkere Wölbung der Bauchseite mag es bedingen, dass an ihr das Gestein sich leichter beim Schlage ablöst.

Ausser dem typischen *Eurypterus Fischeri* kommen bei Rootziküll noch zwei Formen vor, von denen ich die eine als var. *rectangularis* von *E. Fischeri*, die andre als besondre Art *E. laticeps* n. sp. bezeichnen möchte.

Die Var. *rectangularis* m. (T. III *a*, F. 15) kommt nicht ganz selten vor; sie unterscheidet sich wesentlich dadurch, dass die Seiten des Kopfschildes fast gar nicht nach hinten divergiren und dasselbe daher die Form eines Rechtecks, statt eines Trapezes wie bei der typischen Art, annimmt. In Folge davon wird auch das Kopfschild schmäler und das Verhältniss von Länge zu Breite wie $^3/_4$ bis $^4/_5$ zu 1.

Ausserdem erkennen wir einen breiten dunkeln Streifen längs dem Hinterrande des

Kopfschildes, von dem sich in der Mitte ein scharf ausgeprägter, gleichschenklig dreieckiger dunkler Fleck nach vorn erstreckt, dessen Spitze die Nebenaugen erreicht. Bei der Hauptform kennen wir einen ähnlichen dreiseitigen Fleck, der aber hier aus getrennten dunkeln Pünktchen auf hellem Grunde zusammengesetzt ist, die bei der Varietät auf dem schwarzen Grunde kaum zu bemerken sind.

Es liegen fast ganze Exemplare der Varietät vor, die auch an den Thoraxgliedern (T. III *a*, F. 12) einen ähnlichen compacten dunkeln Streifen zeigen wie am Hinterrande des Kopfes, im Uebrigen aber vollständig mit der Hauptform übereinstimmen.

Maasse des Kopfes:

Länge.	Breite
21 mm.	27 mm.
24 »	31 »
31 »	38 »
31 »	40 »

Eurypterus laticeps n. sp. T. III *a*, F. 16; T. VI, F. 6.

Es liegen nur zwei nicht ganz vollständige Kopfschilder dieser Art vor, die sich von *E. Fischeri* wesentlich dadurch auszeichnet, dass die grösste Breite des Kopfschildes in die Mitte und nicht in den Hinterrand desselben fällt, ferner durch die convexen, nicht geradlinigen Seitenränder und die grössere Entfernung der Augen vom Seitenrande, die nur $1\frac{1}{2}$ mal kleiner ist als die Entfernung der beiden Augen von einander. Die grösste Länge des Kopfes beträgt etwa $\frac{2}{3}$ der grössten Breite. Das Kopfschild ist also viel mehr in die Breite gezogen. Auch der Vorderrand ist convex und geht in allmähliger Rundung in die Seitenränder über, die mit dem Hinterrande einen Winkel von über 90, etwa 100 Gr. bilden. Auch die Ornamentation des Kopfschildes zeigt Unterschiede. Die schwarzen Pünktchen sind vorhanden, aber grösser und weniger dicht gestellt. Längs dem Hinterrande lässt sich ein lockres Band von Punkten erkennen; aus dessen Mitte geht ein schmaler Punktstreifen vertical zu den Nebenaugen und zwei andre divergiren zum hintern Ende der grossen Augen. Von hier sehen wir 2 concave Punktstreifen an den Nebenaugen vorbeigehn und sich nach vorn mit zwei dreiseitigen Feldern aus locker gestellten Punkten verbinden, die ähnlichen Punktfeldern bei *E. Fischeri* entsprechen und bis an den Vorderrand reichen. Besonders deutlich und weniger dicht gestellt als bei *E. Fischeri* sind die Punkte auch an der Randleiste zu sehn.

Von grössern dornartigen Schuppen am Hinterrande des Kopfes oder an dem bei einem Exemplar erhaltenen 1ste Leibesgliede ist keine Spur zu erkennen. An diesem Leibesgliede sehen wir vorn wiederum eine lockere Punktreihe.

Maasse des Kopfes:

Länge.	Grösste Breite.	Hinterrand.
44 mm.	67 mm.	62 mm.
40 »	60 »	—

Also wird die Art grösser als *E. Fischeri.*

Sämmtliche Exemplare der neuen Art wie der Varietät gehören dem Revaler Museum an, in dem auch der grösste Theil des vorhandenen Materials des typischen *E. Fischeri* aufgespeichert liegt.

Gen. Pterygotus Ag. T. IV; V; V *a*, F. 1—16; VI, F. 1—5; VII, F. 7—11.

Obgleich in der grossen Monographie von Huxley und Salter[1]) und namentlich der von Woodward[2]) die Gattung *Pterygotus* schon recht ausführlich abgehandelt worden ist, so glauben wir doch jetzt, auf unser Material gestützt, Manches zur Kenntniss der Gattung hinzufügen zu können und namentlich Manches anders deuten zu können, als man früher gethan hat.

Die Gattung *Pterygotus* gehört ausschliesslich dem obersten Silur und dem untersten Devon an. Ausser einigen Spuren in Amerika, Böhmen und Galizien ist die Gattung bisher vorzüglich in England und Schottland bekannt, von wo 9 Arten beschrieben werden, von denen übrigens nur 2: *P. anglicus* Ag. und *P. bilobus* Salt. genauer bekannt sind, zu denen jetzt als 3te unsre öselsche Art kommt.

Die Gattung *Pterygotus* unterscheidet sich von *Eurypterus* wesentlich durch die grossen am Seitenrande des Kopfes belegenen deutlich facettirten Augen (bei *Eurypterus* fehlen die Facetten), die grossen Scheeren tragenden Fühler, die verschiedenartige Sculptur und Einlenkung der Leibesglieder und das breite Endglied (Telson), das zugespitzt oder ausgerandet, aber nie als Limulusartiger Stachel ausgebildet ist wie bei *Eurypterus.*

Die einzelnen Kaufüsse sind ebenfalls verschieden ausgebildet, doch können wir hier nichts Neues zu ihrer Kenntniss beitragen. Die Zahl der zum Kopf gehörenden Fusspaare beträgt 6 und nicht 5, wie Woodward annimmt. Wie schon oben (S. 47) erwähnt, können wir auf den von ihm selbst und Hall gegebenen Abbildungen ausser den Scheeren und den Ruderfüssen noch 4 Fusspaare (Endognaths) nachweisen, deren Woodward seiner Theorie zu Liebe nur 3 annehmen wollte und daher lieber eine unnatürliche Verschiebung (Monogr. Merost. T. II, F. 1) statuirte, als die Vierzahl der erwähnten Fusspaare zugab. Eine eigenthümliche zum Kopf gehörige Platte, das *Epistoma* finden wir bereits bei Huxley und Salter (l. c. T. I, F. 1 *a*) abgebildet, und auf dem restaurirten Exemplar des *P. bilobus* (l. c. T. XV, F. 6) am Vorderrand des Kopfschildes angebracht. In seiner Monographie

1) Memoirs of the geological survey of the united Kingdom. Figures and descriptions illustrative of British organic remains. Monograph I, London 1859.

2) A Monograph of the british fossil Crustacea belonging to the order Merostomata (Palaeontographical society 1866—71) p. 33—92, T. I—XVI.

übergeht Woodward dieses *Epistoma* mit Stillschweigen, nachdem er das Operculum, das ebenfalls früher für ein *Epistoma* gehalten wurde, an seinen richtigen Platz gebracht hat. Auf unsrer T. IV, F. 2 ist nun eine Platte abgebildet, die in einem Stück mit dem Kopfschild F. 1 gefunden, augenscheinlich zu diesem gehört und in ihrer Form deutlich an das erwähnte Huxley-Salter'sche *Epistoma* erinnert. Die Deutung dieses Stücks hat mir anfangs schwierig geschienen, da es aber in seinem bogigen Vorderrand genau die Contur des dahinter liegenden Kopfschildes wiederholt, so kann es nicht gut etwas Anderes als der bisher unbekannte innere Umschlag des Kopfschildes selbst sein, der auch bei *Eurypterus* öfters getrennt gefunden wird. Die Schuppenzeichnung spricht ebenfalls für unsre Deutung, da die Convexität der Schuppen ganz wie bei dem vordern Kopfumschlag des *Eurypterus* (T. III, F. 3 *a*) nach dem Vorderrande zu gewandt ist. Unser Umschlag besteht aus mehren Stücken: zunächst aus einer mittlern vierseitigen Platte, die durch Näthe jederseits mit einer dreiseitigen Platte verbunden ist. Die Andeutung dieser Dreitheilung finden wir bereits bei der oben erwähnten Figur T. I, F. 1 von Huxley und Salter. Die Vorderränder aller drei Platten bilden einen zusammenhängenden Bogen, der dem Vorderrande des *Pterygotus*-Kopfes bis hinter die Augen entspricht. Die mittlere Platte zeigt noch eine Mediannath, die nach vorn nicht ganz bis zum Vorderrande reicht und nach hinten in eine feine Spalte übergeht. Vom hintern Rande der Mittel-Platte gehn noch ein paar stumpf dreieckige Plättchen nach hinten, von denen ich annehme, dass sie zu den Grundgliedern der grossen Scheerenfühler gehören oder mit ihnen in Verbindung stehn, deren Ansatzpunkt also nicht so weit nach vorn gerückt werden darf, wie es bisher geschehn ist. Er kommt vielmehr so ziemlich in die Mitte des Kopfschildes zu stehn. An den vordern Bogenplatten ist absolut nichts von irgend einer Ansatzstelle vorhanden.

Wir hatten oben darauf hingewiesen, dass unsere Umschlagsplatte mit dem Epistoma von Huxley und Salter identisch sei: das bezieht sich aber nur auf die Originalzeichnung T. I, F. 1 *a*, die restaurirte Figur T. XV, F. 6 zeigt das Epistoma mit der Convexität nach hinten, gewissermaassen als äusseres Vordach vor der Mundöffnung. Ich hatte versucht auch für unsre fragliche Platte eine solche Deutung anzunehmen, musste aber davon abgehn, weil bei einer Umkehrung der Platte eine gar zu unnatürliche Figur herauskam; ihre Beschaffenheit ist auch so zart, dass sie ganz wohl als innerer Umschlag, aber nicht wohl als besondere frei hervorragende Platte behandelt werden kann; zu dem stimmt wie gesagt die Anordnung der schuppenartigen Erhabenheiten gut zu unsrer Deutung. Ein freies Epistoma musste eine obere und untere Schaale haben, wie das Metastoma; das ist aber nun bei unserer Platte durchaus nicht der Fall; es ist nur eine dünne Haut zu sehn, die eben dem vordern Umschlag des Kopfschildes angehört.

Das Kopfschild liegt nicht ganz flach ausgebreitet auf wie bei *Eurypterus*, sondern biegt sich an den Seiten ein (T. IV, F. 1, 2, 3), so dass das halbe Auge und der Seitenrand auf die Unterseite kommen; erst hier schliesst der Seitenrand mit scharfer Kante ab.

Am Thorax des *Pterygotus* sind wir ebenfalls im Stande einige neue Beobachtungen mit-

zutheilen und zwar sowohl für die Ober- als die Unterseite desselben. Es ergiebt sich, dass dieser Theil ganz analog wie bei *Eurypterus* gebildet ist. Es gehören 6 Rückenglieder zu ihm, die unten nicht geschlossen sind (ebenso wie bei *Eurypterus*) sondern an den Seiten nur einen kurzen Umschlag zeigen, und 5 frei bewegliche Platten der Unterseite, welche die 6 Rückenglieder von unten decken, — wiederum wie bei *Eurypterus*. Wir stützen unsre Ansicht sowohl auf unser eignes Material als auf vergleichendes Studium der zahlreichen in den beiden obenangeführten Monographieen enthaltenen Abbildungen.

Die dorsalen Thoraxglieder zeigen eine ähnliche schwache Trilobation wie bei *Eurypterus*. Der mittlere Haupttheil springt in einem schwach convexen Bogen vor und trennt sich durch eine flache Bucht (hier das Fulcrum nach Salter), von den gleichfalls schwach (geradlinig) vorspringenden kürzern Seitentheilen. Der ganze vordere Theil der Glieder ist etwa bis zur Hälfte von einem breiten Bande gerundeter schuppenartiger Erhabenheiten, deren Convexität nach hinten gerichtet, bedeckt. Am Vorderrande sind die Schuppen fein und werden nach hinten zu grösser. Auf den vordern Thoraxgliedern ist der hintere Theil derselben ganz von Schuppen entblösst, auf den hintern dagegen reichen diese über die ganze Fläche, wobei sie nach hinten zu immer spitzer und zugleich schwächer werden (T. V *a*, F. 6), ganz wie bei den Abdominalgliedern (T. V, F. 6 *b*). Eine Vertheilung der Schuppen in Gruppen, die sich an vorragende Dornen anschliessen, wie bei *Eurypterus*, kommt bei *Pterygotus* nicht vor.

Die Gelenkverbindung der einzelnen Glieder zeigt auch Unterschiede von *Eurypterus*. Während dort die vordere Gelenkfläche gleichmässig den vordern Rand der Glieder einnimmt, zeigt bei *Pterygotus* nur der vorspringende Mitteltheil (die Rhachis) eine deutlich abgesetzte Gelenkverbindung, die in einem Falz (einer vertieften Rinne) zur Einfügung des vorhergehenden Gliedes und einem sich vorn daran schliessenden schmalen nicht ornamentirten Bande (T. V *a*, F. 7, 8) besteht, das sich unter den hintern Umschlag des vorhergehenden Gliedes schiebt. Dieses Band, wegen seiner Zartheit selten erhalten (T. V *a*, F. 8) setzt sich auch seitwärts bis in die Nähe der Vorderecken fort, ist aber an den Seitentheilen (den Pleuren) durch keinen Falz oder Rinne von denselben geschieden. An den Vorderecken verliert sich die zarte Gelenkmembran; hier sehen wir die kräftige Schuppenzeichnung bis an die Ecken selbst vorrücken und diese häufig nach vorn als förmliche Ohren vorspringen, an deren Aussenrand die seitliche Umschlagskante beginnt.

In der Monographie von Huxley und Salter T. XIII, F. 12 finden wir ein grosses Dorsalsegment von *P. arcuatus* dargestellt, das an den Seitenenden eine deutliche Umschlagskante und ein nach vorn vorspringendes Ohr am Umschlag selbst zeigt; ebenso sehen wir in T. IV, F. 1 *a* ein solches Ohr an einem dorsalen Thoraxsegment von *P. anglicus* in einer Figur, die schon von Agassiz mitgetheilt wurde, weiter auf T. I, F. 13 dieselben Ohren an den Vorderecken der Thoraxglieder von *Pt. perornatus* Salt. Auch Woodward (l. c. T. II, F. 2 *a*) hat solche Ohren bei *P. anglicus* deutlich abgebildet. Er hält sie (l. c. p. 42) für innere Schaalenfortsätze, welche die einzelnen Leibesglieder an einander befestigten und zum Ansatz kräftiger Muskeln dienten. Ich kann diese ohrförmigen

Fortsätze, deren ich auf T. V*a* eine ganze Reihe abgebildet habe (F. 1, 5, 6; s. auch T. VII, F. 10), für nichts Anderes halten als für einfache Vorsprünge der Vorderecken der dorsalen Thoraxglieder, die der Krümmung der Hinterecken dieser Glieder entsprechen und also einfach zum Schutz der Aussenwand des Thieres dienten. Die Muskelansätze an den besprochenen Fortsätzen sind keine andere als in den übrigen Theilen der Thoraxglieder, wenn wir mit Nieszkowski[1]) die schuppenartige Zeichnung der Schaale bei den Eurypteriden als den Muskelansätzen entsprechend ansehn. Dass es sich wirklich so verhält, davon habe ich mich an jungen dünnschaaligen Exemplaren von *Limulus* selbst überzeugen können.

Der hintere Umschlag der Leibesglieder besteht wie bei *Eurypterus* aus einer nicht schuppig ornamentirten Lamelle, die sich über das hinterste Drittel der Segmente in einem breiten Bande hinzieht. Die Lamelle ist aber nicht solid wie bei *Eurypterus,* sondern von zahlreichen feinen Poren (vergrössert T. V*a*, F. 16 *b*) durchbohrt, die besonders am Hinterrande (T. IV, F. 3) und an den Seiten dichter gedrängt erscheinen. Zu den Löchern verlaufen oft feine Gefässe (T. V, F. 6 *b* unten; T. V*a*, F. 8 *a*), die ich aber nie in ein so regelmässiges Netzwerk angeordnet gesehn habe, wie es Alth (über die palaeozoischen Gebilde Podoliens 1874, p. 53 T. IV, F. 10 *a*, *b*) darstellt. Er hat übrigens die wahre Natur des abgebildeten Stücks, als einer besondern Lamelle angehörig, nicht erkannt, sondern glaubt eine Modification der gewöhnlichen Schuppenzeichnung vor sich zu haben. Dennoch ist er der Erste, der auf das in Rede stehende Gebilde aufmerksam gemacht hat. Die englischen Arbeiten erwähnen nichts dergleichen.

Die erwähnten feinen Poren stehn, wie gesagt, in Verbindung mit feinen Gefässen, deren Spuren als feine schwarze Röhrchen sich stellenweise noch im Gestein nachweisen liessen. Und zwar besonders an einer Stelle (T. V*a*, F. 8 *a*) wo zwei solcher durchlöcherter Lamellen (*n* und *o*) in geringem Abstande von einander verlaufen, nämlich am Seitenumschlage eines Thoraxgliedes. Dieser Seitenumschlag ist an mehren Stellen von mir constatirt worden (z. B. T. V*a*, F. 2, 7, 8), wenn ich ihn auch nicht so vollständig habe bloss legen können wie bei *Eurypterus* und nicht genau sagen kann, wie weit er auf den Pleuren nach innen reicht. Er schlägt sich unter scharfer (wohl auch gesägter T. IV, F. 3) solider Kante nach unten um und entfert sich je mehr nach innen, desto mehr von der obern Schaale der Pleuren (T. V*a*, F. 7). Er ist sofort von der im übrigen gleichartigen obern Schaale zu unterscheiden durch die im entgegengesetzten Sinn ausgeprägten Schuppenornamente (T. V*a*, F. 8 *a* in *m* und *p*). Erscheinen diese auf dem Umschlag convex, so sind sie auf der angränzenden Oberschaale concav, und umgekehrt. Der Seitenumschlag zeigt ebenso an seinem hintern Rande den durchlöcherten hintern Umschlag und hier, wo zwei solche hintere Umschlagslamellen in ganz geringem Abstande von einander verlaufen habe ich auch diese Gefässe auf beiden Lamellen (*n* und *o*) constatirt (T. V*a*, F. 8 *a*).

---

1) Archiv für Naturkunde Liv-, Est- und Kurlands, Ser. I, Bd. II, p. 335.

Auf der Unterseite des Thorax ist das Operculum oder der erste Blattfuss schon Woodward bekannt und von ihm an die richtige Stelle gebracht worden, auch wir liefern in T. V, F. 1, 2 Abbildungen davon. Was die übrigen Blattfüsse betrifft, die nach der Analogie mit *Eurypterus* zu erwarten waren, so habe ich mich von deren Vorhandensein wiederum sowohl durch genaue Betrachtung der früher publicirten Zeichnungen als durch Untersuchung des selbst gewonnenen Materials überzeugt. Sehen wir uns die von Woodward (l. c. T. I, F. 1) dargestellte Unterseite des *Pterygotus anglicus* an, so erkennen wir deutlich, dass die ersten 5 Glieder, die wir für Blattfüsse oder freibewegliche, Kiemen tragende Platten halten, und die den 6 Rückengliedern des Thorax entsprechen, einen besondern Habitus haben, gegenüber den 6 letzten, den Abdominalgliedern, die zu vollständigen Körperringen gehören. Sie greifen stark übereinander hinüber, wie die Blattfüsse des *Eurypterus* und nicht wie eingelenkte Segmente, und in der Anordnung der Schuppenzeichnung auf dem 2ten Gliede oder Blattfuss lässt sich eine deutliche Ausbuchtung nach hinten erkennen, die in Verbindung mit einer medianen Theilung zu stehn scheint. Auf T. XIII, F. 1 *a* sehen wir bei *P. perornatus* in einer Rückenansicht ganz deutlich die seitlich links hervorgepressten Enden der kiementragenden Blattfüsse (wie das bei *Eurypterus* so häufig der Fall ist). Woodward selbst hat an einem abgelösten Stück eines dieser Blattfüsse die Kiemen (l. c. F. 1 *h*) nachgewiesen. Ebenso sind auch auf T. XV, F. 1 die seitlich vorragenden Blattfüsse zu erkennen.

Von meinem eigenen Material gehören die Figuren 2, 3, 4, 5 auf T. V *a* hierher. Besonders wichtig war mir das Stück F. 4, weil ich an diesem zuerst etwas der verticalen Mediannath bei den hintern Blattfüssen des *Eurypterus* Aehnliches constatiren konnte. Zunächst erschienen die Blattfüsse ganz continuirlich, ohne Spur einer Theilung in der Mitte, wie sie ja auch auf der Darstellung der Unterseite von *Pt. anglicus* von Woodward (l. c. T. I, F. 1) dargestellt sind. Ich wurde nur veranlasst sie als solche Blattfüsse anzusehn wegen ihrer bedeutenden Ausdehnung von vorn nach hinten, und wegen des Uebergreifens des vordern Blatts über das hintere fast bis auf die Hälfte, ohne Spur einer Einfügung, wie solche bei den geschlossenen Ringgliedern des Abdomens doch immer deutlich hervortritt. Bei näherer Untersuchung liess sich aber in der Mitte, an der Stelle wo bei *Eurypterus* die Mediannath auftritt, ein ganz schwacher schmaler Streifen erkennen (F. 4), der aus zwei parallelen Linien besteht, die durch zahlreiche feine Querlinien mit einander verbunden sind. Diesen verticalen Medianstreifen habe ich nun später auf mehren andern Stücken wiedererkannt, namentlich in F. 2 auf T. V *a* auf dem letzten Blattfuss V (nebenbei in V *a* vergrössert), wo er als vielgliedrige Kette erscheint, an deren einzelnen Gliedern die Seiten etwas nach aussen divergiren. — Einen ähnlichen Bau zeigt bei genauer Untersuchung auch die Nath in F. 4 auf T. V*a*. In F. 3 erkenne ich auf der vordern Platte eine Andeutung des Medianzipfels in der undeutlichen dreiseitigen Platte in der Mitte des Vorderrandes und der von ihr nach hinten ausgehenden breiten verticalen Furche mit veränderter feinerer Schuppenzeichnung. Ich glaube hier den zweiten Blattfuss vor mir zu haben. In

F. 2 auf T. V *a* sehen wir die Unterseite des Rumpfs unsres *Pterygotus* von oben. Wir sehn hier alle 5 Blattfüsse, die einzelnen mit ihrem vordern Rand über den hintern Rand des nächstvorhergehenden sich hinüberschieben. Zugleich sind die Blattfüsse von vorn nach hinten abwärts geneigt, wie das bei der natürlichen Lage derselben nach Analogie mit *Eurypterus* zu erwarten war. Die Sculptur der Aussenseite zeigt grosse Schuppenzeichnung, die über die ganze Oberfläche verbreitet ist. Die Schuppen sind am Vorderrand feiner, nach hinten grösser, ganz wie auf den Thoraxgliedern der Oberseite; nur zeigen sie überhaupt eine stärkere Tendenz zu spitzer Endigung als auf der Oberseite. Die Innenseite (nach der Leibeshöhle zugekehrte Seite) der Blattfüsse, die bei *Eurypterus* eine ähnliche Schuppenzeichnung zeigt wie die Aussenseite, besteht bei *Pterygotus* ebenfalls aus einer durchlöcherten Lamelle (T. V *a*, F. 4 *a*, wo auch Andeutungen von Gefässen zu sehn sind) wie der hintere Umschlag der dorsalen Thoraxglieder (die oben S. 67 citirte Figur von Alth bezieht sich auf den vordersten Blattfuss), nur dass diese Lamelle bei den Blattfüssen über die ganze Innenfläche sich erstreckt und nicht blos längs dem Hinterrand verläuft wie bei den Dorsalgliedern. Es sind eben geschlossene Platten. Die Poren in der innern Lamelle mögen zu den auf ihrer Oberfläche befindlichen Kiemen in Beziehung gestanden haben, die in England (s. oben S. 47) wiederholt nachgewiesen, bei uns aber trotz der sonst guten Erhaltung unsres Materials nicht zu erkennen gewesen sind. Aehnliche Poren wie auf der Innenlamelle der Blattfüsse konnte ich auch auf der innern der Kopfhöhle zugewandten Seite des Metastoma (T. V *a*, F. 16 *a*) nachweisen.

Was den Bau der Abdominalglieder und des Schwanzgliedes (Telson) betrifft, so habe ich kaum Neues hinzuzufügen. Die Einlenkung erfolgt ganz analog wie bei den dorsalen Thoraxgliedern und ist durch einen rinnenartigen Falz am Vorderrande charakterisirt, an den sich die vordere glatte, nicht ornamentirte, nur fein quergestreifte Gelenklamelle anschliesst (T. V *a*, F. 10); der Falz reicht wie bei den Thoraxgliedern nicht bis an die Vorderecken, die auch hier wie bei den letztern vorspringen und bis zum Vorderrande schuppig gezeichnet sind. Es liegt hier also wieder ein Unterschied von *Eurypterus* vor, bei dem die regelmässig gebildete und abgegränzte Gelenkfläche den ganzen Vorderrand der Ringglieder einnimmt. An den Vorderecken ist die Vorder- und Hinterseite der Ringglieder durch eine übergespannte schuppig gezeichnete Brücke verbunden, (T. V, F. 5; T. V *a*, F. 9), durch deren Zusammenfalten bei von oben nach unten zusammengedrückten Exemplaren die Vorsprünge an den Vorderecken entstehn mögen. Bei den Abdominalgliedern springt der Vorderrand der Bauchseite convex (s. Holzschn. 3 u. 4 und T. V *a*, F. 11) vor, während derjenige der obern Seite gerade verläuft oder selbst concav ist. Die Schuppenzeichnung ist gleichmässig auf beiden Seiten und analog wie bei den Thoraxgliedern ausgebildet, nur dass die Schuppen die ganze Fläche der Glieder einnehmen, wenn sie auch nach hinten zu schwächer (T. V, F. 6 *b*) werden.

In Rootziküll kommt eine *Pterygotus*-Art in zahlreichen Bruchstücken und isolirten Gliedern vor (namentlich Leibesgliedern), die dem *P. bilobus* Salt. und auch dem *P. gigas* Salt. nahe steht, die ich aber doch einiger Abweichungen wegen als *Pterygotus osiliensis* neu beschreiben muss. Abweichungen in der Form des Metastoma und des Schwanzschildes

und wohl auch der Leibesglieder, machen es wahrscheinlich, dass wir noch eine zweite Art oder doch noch eine ausgezeichnete Varietät haben; doch fällt es bis jetzt schwer jeder Form die ihr zugehörigen Stücke zuzutheilen.

Pterygotus osiliensis n. sp. T. IV; V; V *a*, F. 1—16; VI, F. 1, 2, 4, 5; T. VII, F. 7, 8, 10, 11.

1854. *Pterygotus anglicus*, Eichwald, Bull. de Moscou, p. 105, T. II, F. 5.
1859. *Pterygotus sp.* Nieszkowski, Zusätze zur Monographie d. Trilobiten d. Ostseeprovinzen im Archiv für Naturkunde Liv-, Est- und Kurl., Ser. I, Bd. II, p. 382, T. I, F. 19. (Metastoma, copirt bei Woodward l. c. p. 180).
1859. *Pterygotus sp.* F. Schmidt, Nachträge und Berichtigungen zu den Untersuchungen über die silurische Formation von Estland, Nord-Livland und Oesel, im Archiv für Naturkunde Liv-, Est- und Kurl., Ser. I, Bd. II, p. 470.
1860. *Pterygotus anglicus*, Eichwald, Leth. ross. anc. Per. p. 1357.

Vom öselschen *Pterygotus* waren früher nur einzelne Leibesglieder und ein Metastoma bekannt. Im Laufe vieler Jahre wiederholte Nachforschungen haben mich in den Stand gesetzt jetzt so ziemlich alle Theile des Thieres darstellen zu können, (bis auf die vordern Kaufüsse oder Endognaths von Woodward, von denen bisher nur geringe Spuren gefunden sind), wenn es auch bisher nicht gelungen ist ein ganzes Exemplar zu finden. Doch glaube ich für die unten mitgetheilte Restauration so ziemlich einstehn zu können. Die gute Erhaltung unsrer Stücke macht es möglich, wie schon oben ausgeführt, dass wir nicht blos unsre Species zu beschreiben im Stande sind, sondern auch verschiedene Mittheilungen machen konnten, die für die richtige Charakteristik der Gattung von Bedeutung sind.

Unsre Art scheint in ihrer gestreckten Gestalt zunächst, wie gesagt, mit *P. bilobus* Salt. sp. Aehnlichkeit zu haben, mit dem sie auch das ausgerandete Schwanzschild gemeinsam hat; nur ist sie viel grösser. Ebenso nahe dürfte wohl *P. gigas* Salt. stehn, der auch in der Grösse zu unsrer Art stimmt und ebenfalls wie diese ein ausgerandetes Schwanzschild hat.

In der nachfolgenden Beschreibung werden wir auf die im Vorhergehenden schon näher erörterten Punkte nicht specieller eingehn und mehr die specifischen Eigenthümlichkeiten hervorzuheben suchen. Doch werden sich Wiederholungen nicht ganz vermeiden lassen.

Nehmen wir die beifolgende Restauration (Siehe Holzschnitte p. 72 u. 73.) zu Hülfe, die wir in Anlehnung an die Darstellungen von *P. bilobus*, auf vielfache Messungen an unseren Exemplaren gestützt, ausgeführt haben, so beträgt die Gesammtlänge fast 4 mal so viel wie die grösste Breite. Die Länge des Kopfes ist, wenn wir die Maasse des *P. bilobus* zu Grunde legen, reichlich 6 mal in der Gesammtlänge enthalten. Die Form des Kopfes, von dem uns nur zwei unvollständige Exemplare (T. IV, F. 1 u. 3) vorliegen, können wir halboval oder fast trapezförmig nennen; er ist etwa $1\frac{1}{4}$ mal so breit wie lang; der Vorderrand sowie die Seitenränder sind convex, der Hinterrand concav; die Vorderecken sind gerundet,

die Hinterecken scheinen scharf und bilden einen Winkel von etwa 60 Gr. (hier ist die Zeichnung T. IV, F. 1 nicht genau). Die grossen ovalen facettirten Augen liegen an den vordern Ecken; ihre Entfernung von einander beträgt fast so viel wie die ganze Länge des Kopfschildes. Die beiden punktförmigen Nebenaugen liegen etwas hinter der halben Länge des Schildes. Die Oberfläche desselben ist flach convex nach hinten sanft ansteigend. Der Vorder- und Hinterrand des Kopfschildes erscheinen scharf; die Seitenränder biegen sich in der Umgebung des Auges in steiler Wölbung nach abwärts, so dass der grösste Theil des Auges auf die untere Seite des Kopfes zu liegen kommt, (T. IV, F. 2, 3). Der abwärts gewandte Theil der Oberseite bildet ein breites Schaalenstück, das vom Auge nach vorn sich schnell verschmälert und in den scharfen Vorderrand übergeht, nach hinten aber nach den Hinterecken zu sich allmählig verjüngt und diese fast erreicht. In F. 2 berührt das Auge den Rand der Umbiegung (den eigentlichen scharfen Kopfrand) in F. 3 sehen wir noch einen schmalen Streifen des Bandes zwischen dem Auge und dem eigentlichen Rande. Auf diese Umbiegung des Seitenrandes ist früher nicht aufmerksam gemacht worden. In den Schiefern, in denen grösstentheils die Englischen Exemplare gefunden wurden, mag diese Beobachtung schwer zu machen sein, da dort die Exemplare meist ganz platt gedrückt sind.

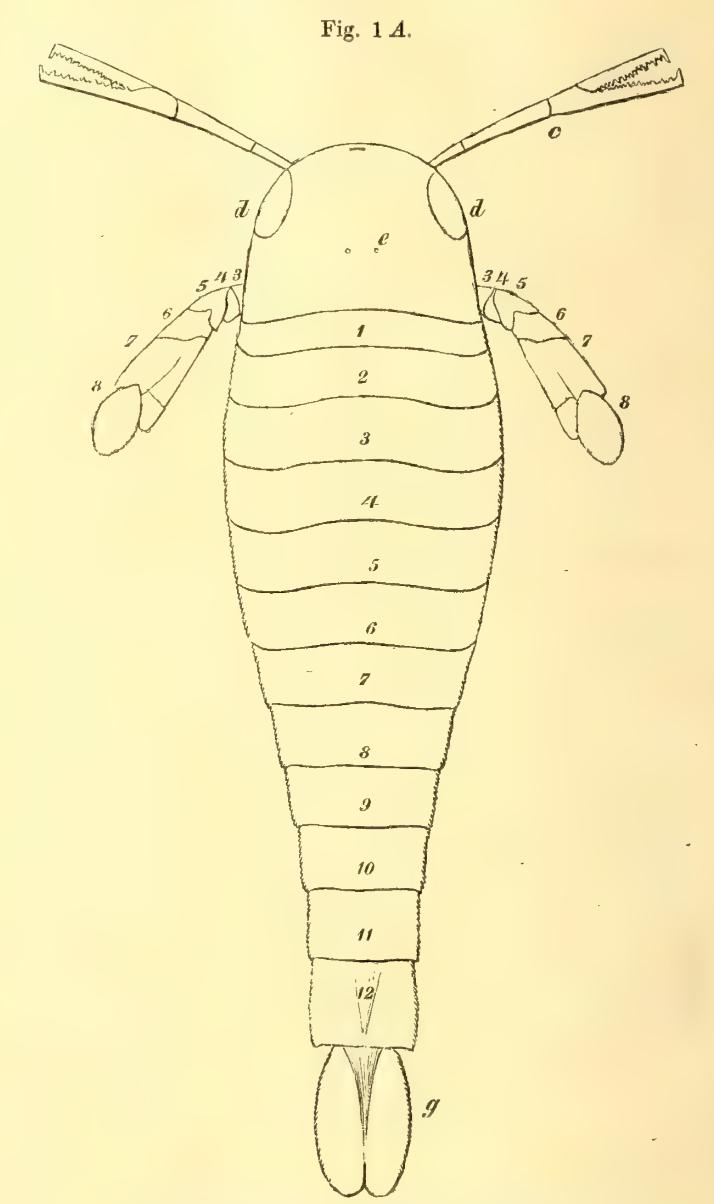
Die Oberfläche des Kopfschildes zeigt verschiedenen Quer- und Längsrunzeln, sowie hellere und dunklere Flecke, aber sonst keinerlei Spur von Ornamention, namentlich auch keine schuppenartigen Erhabenheiten, die auf den übrigen Körpertheilen eine so grosse Rolle spielen. Der kleinere Kopf (T. IV, F. 1) ist (bei seiner Unvollständigkeit) etwa 110 mm. breit, bei 90 mm. lang; der grössere (T. IV, F. 3) 130 mm. lang.

Das eigenthümliche vorn bogig gerundete Schild, das in F. 2 (T. IV) vor der Unterseite des Kopfes abgebildet ist, haben wir schon oben (S. 64) als den vordern Umschlag des Kopfschildes bezeichnet. Es ist noch nie früher beschrieben (wenn auch vielleicht als Epistoma von Salter und Huxley, l. c. T. I, F. 1 einmal erwähnt) und war daher schwer zu deuten. Es besteht wie gesagt aus drei Stücken, einem mittlern 4 seitigen mit convexen Vorder- und concaven Seitenrändern, und zwei dreiseitigen Seitenstücken, deren Vorder- und Seitenrand einen convexen, der Hinterrand dagegen einen concaven Bogen bildet. Der Hinterrand des Mittelstücks ist in der Mitte gespalten; die Spalte geht in eine Nath über, die bis in die Mitte des Schildes sich fortsetzt. Das ganze als Kopfumschlag gedeutete Stück gehört augenscheinlich zu dem nämlichen Kopfschild, vor dem wir es abgebildet sehn. Der untere Umschlag ist losgetrennt und nach vorn verschoben, was auch bei *Eurypterus* vorkommt. Das Mittelstück liegt zwischen den Augen; die Seitenstücke kommen unter den oben erwähnten abwärts gebogenen Seitenflügel des Kopfes zu liegen. Die ganze Oberfläche ist mit feinen schuppenartigen Erhabenheiten dicht bedeckt, deren Convexität nach dem äussern bogigen Rande zu gewandt ist.

Hinter dem vierseitigen Mittelstück unsres Kopfumschlages, aber getrennt von ihm, liegen noch zwei stumpf dreieckige Plättchen, deren Basis den beiden durch den Spalt getrennten Lappen dieses Mittelstücks gegenüber liegt. Diese Plättchen zeigen ebenfalls feine

Schuppenzeichnung, aber von etwas anderem Charakter und mit der Convexität nach hinten, so dass sie augenscheinlich mit unsrer Umschlagsplatte nicht im Zusammenhang stehn. Ich weiss für diese Plättchen keine andere Deutung, als sie etwa für Grundglieder der grossen Scheerenfühler zu halten, deren Ansatz, ganz entgegen der bisherigen Ansicht, auf diese Weise bis in die Mitte des Kopfes zurück versetzt werden muss. Sonst pflegte man sie vorn am Kopf einzulenken, doch ist diese Einlenkung selbst noch nie beobachtet worden. Dieser stark nach hinten gerückte Ansatz (den ich auf der restaurirten Figur noch möglichst nach vorn geschoben habe) der Scheerenfühler, macht es schwierig die Lage des Mundes zu fixiren, da andrerseits das grosse Metastoma, das an unsrem Kopfschilde (T. IV, F. 2) ebenfalls sichtbar ist, seiner Grösse nach, nach vorn bis weit über die Mitte und etwa bis an die Verbindungslinie der Augen reicht. Auch bei den englischen *Pterygotus*-Arten, bei denen man es mehrfach in natürlicher Lage von oben her erkennen kann (Woodward l. c. T. II, F. 1; T. X, F. 2), misst es mindestens $^2/_3$ der Länge des Kopfes, so dass die Grundglieder aller Kaufüsse (oder der meisten) von ihm bedeckt werden. Bei unsrer Art müsste den Dimensionen des Metastoma nach, der Vorderrand desselben vor den Ansatz der Scheerenfüsse kommen. In der restaurirten Figur 2 haben wir die richtige Grösse des Metastoma angenommen (aber

Fig. 1 *A*.

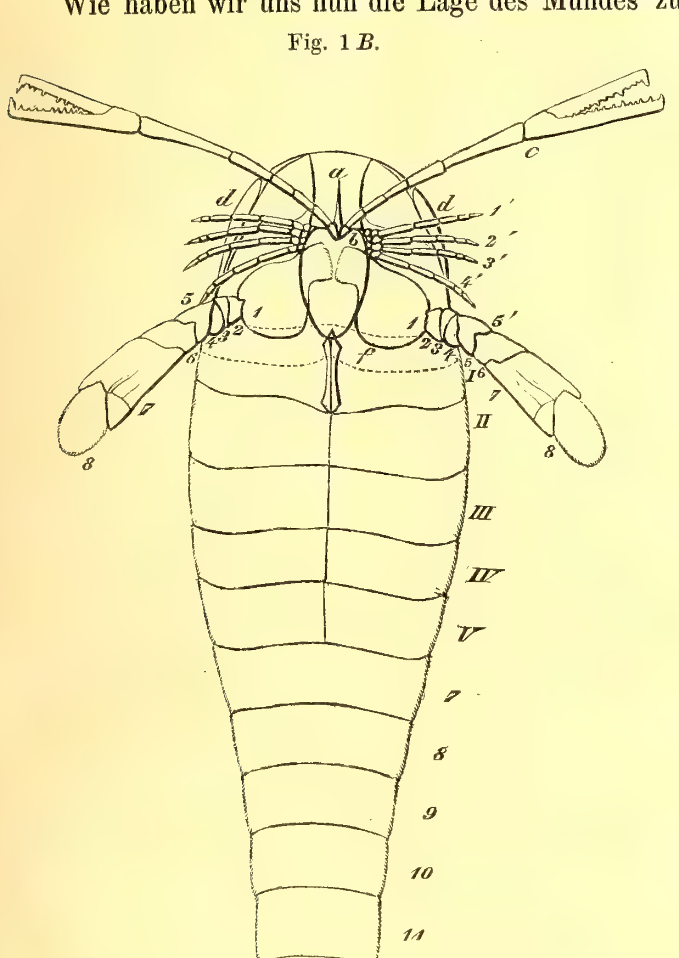


Restaurirte Figur von *Pterygotus osiliensis* n. sp.
a) Der Kopfumschlag; *b*) das Metastoma; *c*) die Scheerenfühler; *d*) die Augen; *e*) die Nebenaugen; *f*) das Operculum; 1′—5′ die Kaufüsse mit den Gliedern des Ruderfusses von 1—8; I—V) die Blattfüsse; 1—12) die Leibesglieder (1—6 dem Thorax, 7—12 dem Abdomen angehörig); *g*) das Schwanzschild.

vielleicht doch noch zu klein); in F. 1 *B* ist es kleiner, als es sein sollte, dargestellt, weil sonst die übrigen Theile schwer zur Anschauung zu bringen waren.

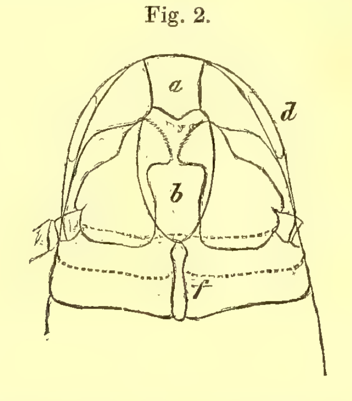
Wie haben wir uns nun die Lage des Mundes zu denken? Ich gestehe, dass ich hier

Fig. 1 *B*.



Siehe die Erklärung bei F. 1 *A*. Bis auf den Ansatz der Scheerenfühler (*c*) und die vordern Fusspaare (1′, 2′, 3′, 4′) beruht die Darstellung auf Autopsie an unsern Exemplaren. Das Metastoma mit den Grundgliedern des Ruderfusses ist kleiner als in der Wirklichkeit, um alle Theile zur Anschauung zu bringen. Siehe die natürlichen Verhältnisse in F. 2.

Fig. 2.



Kopfschild des *Pterygotus osiliensis* von unten, in natürlicherem Verhältniss des Metastoma (*b* mit den Grundgliedern des Ruderfusses, zum Kopfumschlag (*a*) und) den Augen (*d*).

vor einer ungelösten Schwierigkeit stehe. Daher habe ich auch die Grundglieder der vordern Kaufusspaare, die ich ausserdem bei uns auch nicht gefunden, in der restaurirten Zeichnung nicht angegeben und nur die Palpen derselben markirt, obgleich auch diese mir nicht sicher vorgekommen sind. Ich habe ihrer aber vier jederseits gezeichnet auf Grund vergleichender Studien, die ich, wie oben (S. 46) gesagt, an den Abbildungen von Hall und Woodward gemacht habe. Um auf die Scheerenfühler zurück zu kommen, so hätte ich ihren Ansatzpunkt gern, wie meine Vorgänger, nach vorn an der Unterseite des Kopfes verlegt, aber die eben besprochene 3 theilige Umschlagsplatte liess eine andre Auffassung nicht zu, als ich sie oben auseinandergesetzt. An ihrer Oberfläche ist nirgend ein Platz für den Ansatz der Scheerenfühler und zugleich war für diese Umschlagsplatte

selbst keine andre Deutung möglich. Von den Scheerenfühlern sind in meinem Material nur die letzten beiden eigentlichen Scheerenglieder vorhanden, die ersten Glieder, von denen 3—5 angenommen werden, fehlen uns bisher. Die Scheerenglieder selbst sind mir wie gesagt mehrfach vorgekommen und ich habe daher auch 4 Exemplare derselben abbilden können (T. IV, F. 4, 5; T. VII, F. 7, 8). Die erste Figur (T. IV, F. 4) stellt zwei vollständige zu einem und demselben Kopf gehörige Scheeren dar, die aber leider auf dem Transport gelitten haben; die übrigen Figuren einzelne mehr oder weniger vollständige Scheerenglieder. Die Scheerenglieder haben entweder die breitere gekrümmte Form wie auf T. IV, F. 4, die mit der bei *P. anglicus* übereinstimmt; oder die gestreckte Form wie bei *P. bilobus* (so T. IV, F. 5, wo die Zähne missrathen sind; T. VII, F. 7, 8); am meisten stimmt zu unsern Scheeren das grosse Exemplar bei Woodward l. c. T. XI, F. 3, das von ihm zu *P. bilobus* var. *perornatus* gebracht wird. Der grosse Endzahn des festen Scheergliedes scheint über den des beweglichen überzugreifen. Die einzelnen Zähne sind von sehr ungleicher Grösse, die grossen von eilanzettlicher Form, und wie in T. VII, F. 8*a* zu sehn ist, deutlich längsgestreift, so zwar, dass die feinen scharfen erhabenen Streifen besonders an mittelgrossen Zähnen, nach der Basis zu dichotomiren, wie das auch bei *P. gigas* Salt. (Salt. et Huxl. l. c. T. IX, F. 1, 3) angegeben wird. An den grössern Zähnen schieben sich feinere Streifen zwischen die gröbern ein; an den kleinern sind sie gleich stark und spalten sich nach unten. Die Streifen stehn nicht sehr dicht; es kommen etwa 5 auf 1 mm. Specifische Charaktere können wir an unsern Scheeren nicht finden, doch scheinen einige englische Arten solche zu besitzen. Unsre Scheeren erreichen (T. VII, F. 7) die beträchtliche Länge von 145 mm., eine kleinere (T. V, F. 5) ist 70 mm. lang. Wir glauben die Länge der Scheeren ungefähr mit der Länge des Kopfschildes gleich setzen zu dürfen.

Die vordern Kaufüsse (Endognaths nach Woodward), sind uns von der öselschen Art so gut wie gar nicht bekannt. Das Stück T. IV, F. 9 hielt ich anfangs für ein Grundglied eines der vordern Fusspaare, dem die gezahnte Partie fehlt. Erst später habe ich mich überzeugt, dass es weiter nichts ist als ein Fetzen des grossen Operculum der Unterseite; die gebrochene Linie auf der Hinterseite des abgebildeten Stücks entspricht genau dem pfeilförmigen Vorderende des Medianzipfels des Operculum (T. V, F. 1), auch die Sculptur stimmt. Ebenso fehlen mir sichere Palpen. Die beiden gegliederten Fusstheile, die T. VII, F. 9 abgebildet sind, könnte man hierher rechnen, doch weichen sie von den verwandten Arten durch Kürze und Gedrungenheit der Glieder (deren ich an einem Fuss 4, am andern 3 zähle), so wie dadurch ab, dass die Glieder am hintern, distalen Ende beweglich eingelenkte Stacheln tragen, wie solche bei *Eurypterus* bekannt, bei *Pterygotus* aber, mit Ausnahme von *P. taurinus* Salt. (Woodward l. c. p. 75, F. 14), unbekannt sind.

Dagegen ist das letzte Fusspaar (Exognath), der grosse Schwimmfuss, mit seinem mächtigen Grundgliede vorhanden: das Grundglied oder Coxa der Engländer (T. IV, F. 6; T. V*a*, F. 13) sogar in mehren Exemplaren. Es ist von vierseitigem Umriss; die Vorder- und die verkürzte Hinterseite convex, die Innenseite nach vorn vorgezogen und concav;

der hintere innere Winkel springt stark vor. An der vordern Hälfte der Hinterseite sieht man einen Einschnitt, (wie beim *Eurypterus*) an der Stelle, wo der Fuss eingelenkt ist. Der Körper des Grundgliedes ist massiv, in der Mitte 10—15 mm. dick. Am vordern innern Winkel sehn wir einen breiten trapezoidalen blattartigen Vorsprung, der an seinem Grunde etwas eingeschnürt ist und an seiner von vorn nach hinten und innen vorspringenden innern Seite eine Reihe von 15 kräftigen Sägezähnen trägt, die von vorn nach hinten etwas an Grösse abnehmen. Die Oberfläche des Grundgliedes ist mit runder Schuppenzeichnung bedeckt, mit der convexen Seite der Schuppen nach aussen und am Vorderrande nach hinten. Von bekannten Figuren stimmt die F. 14 auf T. I bei Huxley und Salter (von *P. perornatus*) noch am besten zu unsrer Art, doch springt dort die hintere Seite viel mehr nach hinten und innen vor und erscheinen die Zähne viel länger.

Bei unsrer restaurirten Figur bedecken die Grundglieder mit dem Metastoma die untere Breite des Kopfschildes nicht vollständig. Es liegt vielleicht daran, dass der Kopf zu breit gezeichnet ist, was leicht möglich, da auch unser bester Kopf nicht vollständig erhalten ist.

Die übrigen Fussglieder (T. IV, F. 7; T. V *a*, F. 14, 15) stimmen in ihrer Zahl viel besser zu *Eurypterus*, als man früher angenommen hat. Mir liegen drei Exemplare vor, von denen das vollständigste T. IV, F. 7 das 1ste, und 4te bis 8te Glied; T V *a*, F. 14 das Grundglied im Zusammenhang mit dem 2ten bis 5ten Gliede, und F. 15 auf derselben Tafel das 2te bis 6te Glied enthält. Das 2te und 3te Glied (T. V *a*, F. 14, 15) sind kurz, ringförmig, mit concavem Aussenrande. Das 2te Glied springt etwas nach hinten vor und trägt an seinem Grunde einen abgeschnürten Fortsatz (wieder wie bei *Eurypterus*), den ich in F. 14 auf T. V *a* freigelegt habe. An Stelle der beiden Glieder 2 und 3 nimmt Woodward nur eins an (basos), obgleich auf manchen Tafeln (Woodward l. c. T. VII, F. 11; T. XIV, F. 1 links), an dieser Stelle deutlich zwei Glieder zu erkennen sind.

Das 4te Glied (Ischium) wird von Woodward l. c. p. 60 bei *P. bilobus* als «schmal, der innere Rand am längsten» beschrieben. Bei unsern Exemplaren in F. 14 und 15 auf T. V *a* erscheint es verschieden gebildet. In F. 14 erscheint es allerdings schmal, dem 2ten und 3ten Gliede ähnlich; und ebenso auf T. IV, F. 7, wo das 2te und 3te Glied fehlen. In F. 15 auf T. V *a* aber ist es auf der hintern Seite breit, stark convex, und so erscheint es auch bei Woodward in T. XIV, F. 1.

Das 5te Glied (Meros) ist dreieckig halboval, der bogige vordere Rand am längsten, der distale Gelenkrand tief ausgebuchtet. Das 6te Glied (Carpus) von unregelmässig dreieckig rhomboidaler Form; der Vorderrand convex wie beim vorigen Gliede, das proximale Ende zu einem Fortsatz vorgezogen, der mit der Einbucht des vorigen Gliedes artikulirt; das distale in stumpfem Winkel vorspringend, zum Ansatz des vorletzten 7ten Gliedes, ganz wie das entsprechende Glied bei *Eurypterus*. Das 7te Glied (Propodos) ist von oblonger Form, am Hinterrande am längsten, an dem ein Fortsatz zum proximalen und einer zum distalen Ende geht, der durch eine Querlinie als dreieckiges Feld abgeschnitten wird (wiederum wie bei

Eurypterus T. III, F. 20, 21. S. auch den Holzschnitt von *Pt. bilobus* bei Woodward l. c. S. 58, F. 10). Das proximale Ende zeigt doppelte Krümmung, dem Vorsprung des 6ten Gliedes entsprechend, das distale ist tief ausgebuchtet für die Aufnahme des 8ten Gliedes. Von der Bucht verläuft ein scharfer Kiel nach dem proximalen Fortsatz zu, der bei den verwandten englischen Arten nicht erwähnt wird, bei dem sonst verschiedenen *Pterygotus anglicus* aber (Woodward l. c. T. V) eine mächtige Ausbildung erlangt. Das 8te Glied (*Dactylos* bei Woodw. oder ovale Palette) ist flach, von elliptischer Form, am Rande gezähnt, ebenfalls ganz wie bei *Eurypterus* ausgebildet. Es artikulirte wohl auch hier scheerenförmig mit dem dreieckigen Schaltstück des 7ten Gliedes. Am distalen Ende des 8ten Gliedes erkennt man Spuren eines eingefügten kleinen Endzahns (Woodw. p. 58, F. 10*u*), der dem 9ten Gliede bei *Eurypterus* entspricht. Wie aus dem Gesagten hervorgeht ist auch im Bau der einzelnen Fuss-Glieder die nächste Uebereinstimmung da mit den englischen Arten *P. bilobus* und *gigas* Salt.

Das Metastoma liegt uns in 3 Exemplaren vor, die wir sämmtlich abgebildet haben (T. IV, F. 2, 8; T. VI, F. 5); ausserdem hat schon Nieszkowski (Zusätze zur Monogr. d. Trilob. der Ostseeprov. im Archiv für Naturk. Liv-, Est- und Kurl. Ser. I, Bd. II, p. 382, T. I, F. 19) ein solches aus dem Dorpater Museum abgebildet, das Woodward (l. c. p. 180, F. 71) copirt hat, und das unsrer Figur T. V, F. 8 sehr nahe kommt. Die Form ist breit, oval-herzförmig, nach hinten verschmälert und am Ende abgestutzt. Die grösste Breite finden wir am Ende des ersten Drittels der Länge (von der Einbucht zum Hinterrande gerechnet); die Länge ist 1,4 mal so gross als die Breite. Die beiden grössern Exemplare, das Nieszkowski'sche und das T. IV, F. 8 abgebildete (92 mm. lang bei 65 mm. breit) erscheinen an den Seiten stärker und regelmässiger gewölbt, während die beiden kleinern Stücke nach hinten stärker zusammengezogen sind und bei ihnen die Seiten nach hinten zu fast geradlinig verlaufen. Das Stück T. VI, F. 5 ist 68 mm. lang bei 50 mm. breit, das andre kleinere Metastoma (T. IV, F. 2), das in der Form etwa in der Mitte zwischen dem ebenerwähnten und den grössern Exemplaren steht, ist am hintern Ende nicht vollständig. Von den englischen Arten ist das Metastoma bei *P. bilobus* viel schmäler, fast 2 mal so lang als breit (Woodw. l. c. T. XIII, F. 1 *e*; T. XIV, F. 2; T. XV, F. 3), das von *P. gigas* nicht vollständig bekannt; das mit Zweifel hierher gehörige Stück bei Woodward l. c. p. 84, F. 18, ist vorn am breitesten und dadurch abweichend. Vielleicht gehören die grossen an den Seiten convexen Metastomen (T. IV, F. 8 und die Nieszkowski'sche Figur) einer besonderen Var. *laticauda* an, auf die wir bei Besprechung des Schwanzschildes zurückkommen.

Die Oberfläche zeigt die bekannte Schuppenzeichnung, besonders auf der vordern Hälfte. Die Schuppen sind rund, mit der Convexität nach hinten, vorn flacher gewölbt und kleiner als hinten, wo sie zugleich schwächer werden oder ganz fehlen. Die Membran der innern, der Kopfhöhle zugekehrten Seite des Metastoma zeigt, wie man an dem Original der F. 2 auf T. IV, deutlich sehn kann (T. V*a*, F. 16*a*), auch am hintern Theil deutliche, nach hinten ge-

wandte Schuppenzeichnung; zugleich ist die Innenlamelle aber von zahlreichen fast im Quincunx gestellten feinen Poren durchbohrt; die etwa $\frac{1}{4}$ mm. von einander abstehn, wie wir es in F. 16 *b* auf T. V *a* vergrössert dargestellt haben. Dass eine ähnliche Struktur der Haut auch auf der Innenseite der Blattfüsse des Thorax und an den hintern Umschlägen aller Leibesglieder vorkommt, haben wir schon oben (S. 67, 69) auseinandergesetzt.

Den Bau der dorsalen Thoraxglieder haben wir schon oben auseinandergesetzt. Hier wird noch Einiges über deren äussere Form hinzuzufügen sein. Die Thoraxglieder, deren Zahl 6 (wie bei *Eurypterus*), und nicht 7 ist, wie Woodward l. c. p. 56 annimmt, wachsen zuerst sehr allmählig in Breite, die bis zum 4ten und 5ten Gliede steigt, um dann mit dem 6ten und dem 7ten (dem 1ten, ringförmigen, Abdominalglied) schneller abzunehmen. Das vollständigste Bild des Thorax in seiner tonnenförmigen Gestalt, wie bei *P. bilobus* haben wir in T. V *a*, F. 1, wo die ersten beiden Glieder nicht vollständig sind. Die Länge vom 3ten bis zum 6ten Gliede kommt etwa der ganzen Breite gleich. Hier sieht man deutlich die Einfügung der Mittelstücke (rhachis) in einander, sowie die vorspringenden Vorderecken und die abgerundeten Hinterecken der Pleuren. Der Seitenrand ist deutlich gesägt (T. V, F. 3 rechts). Zu beiden Seiten des Randes, oben und auf dem untern Umschlag (T. V *a*, F. 8 *a*) sieht man schwielige polygonale dunkle Figuren aus festerer Schaalenmasse, ähnlich wie wir sie auch vom Seitenrande des Schwanzschildes T. VI, F. 4 abgebildet haben. Der untere Umschlag des Seitenrandes ist in T. V *a*, F. 2 (bei *a*) 7, 8, deutlich zu sehn, wir können aber seine Begränzung nach der Mitte zu nicht genau angeben. Bei isolirten Thoraxgliedern finden wir die Pleuren oft herabgebogen und die natürliche Form des ganzen Gliedes verändert, so dass der mittlere vorspringende Theil, von den Pleuren sich nicht absetzt; so in T. V, F. 4, zu welcher wir das zugehörige herabgebogene Stück mit dem vordern Ohr auf T. V *a* in F. 6 wiedergegeben haben. In F. 5 auf T. V *a* sehen wir eine freie Thoraxplatte oder einen Blattfuss (V), der sich seitlich über zwei zusammenhängende dorsale Thoraxglieder (5 u. 6) hinüberlegt, deren Seitentheile mit den Ohren aus ihrer natürlichen horizontalen Lage herabgebogen sind. Der Seitenrand ist deutlich zu sehn. Dasselbe Stück ist schon auf T. IV, F. 10 in zwei Ansichten (rechts und links auf der Tafel) dargestellt, die aber beide nicht gelungen sind. Das grosse, auf T. VII, F. 10 abgebildete Stück zeigt das 1 bis 5te Thoraxglied, die ebenfalls z. Th. stark verbogen sind und bei nicht ganz richtiger Zeichnung eine falsche Vorstellung von der Form des Thiers erwecken. Nur die rechten Enden der Glieder, vorn mit Ohren und hinten abgerundet, treten gut hervor.

Maasse: Bei einem der vordern Thoraxglieder, das nach hinten breiter wird, ist die Breite vorn 113 mm., hinten vor den abgerundeten Hinterecken 120 mm.; die Länge in der Mitte 38 mm. Bei unsrem grössten Exemplar (T. V, F. 3), die Länge in der Mitte 52 mm.; die grösste Breite vorn 211 mm., hinten 216 mm. Es gehört also auch noch zu den vordern Gliedern, ist aber viel kürzer und breiter als das erst gemessene, das allerdings gewölbter ist.

Bei dem Exemplar F. 1 auf T. V *a*, bei dem das 3te bis 5te Thoraxglied vollständig erhalten sind, ergiebt sich, dass das 4te und 5te Glied am hintern Ende fast gleich breit sind, das 4te vielleicht etwas schmäler. Vorn beträgt die Breite beim 4ten Gliede 128 mm., hinten 132; beim 5ten vorn 130, hinten 133 mm. Die hintere Breite des 3ten Gliedes 130 mm. Die Länge beim 4ten Gliede 38 mm.; beim 5ten 40 mm. Das Verhältniss der Länge zur Breite schwankt also ziemlich unregelmässig wie 1 zu 3—4.

Die Oberflächenzeichnung haben wir schon oben (S. 66) besprochen. Wir können noch hinzufügen, dass bei den vordern Gliedern ihr hinterer Theil ganz ohne Ornamente bleibt, während er bei den hintern, namentlich beim 6ten Gliede bis zum hintern Rande mit Schuppen besetzt ist (T. V, F. 4, V*a*, F. 6), die aber nach hinten bei zunehmender Grösse schwächer und spitzer werden. Auf den grössern Schuppen sehn wir unter der Loupe bisweilen noch kleinere aufsitzen (T. V, F. 6 *b*), wie das auch schon Alth (l. c. T. 4, F. 11) dargestellt hat. Die Struktur des hintern Umschlags mit seinen Poren haben wir auch schon oben (S. 67) besprochen. Die dunkeln Linien, die man zuweilen in Verbindung mit den Poren sieht (T. V, F. 6 *b*) sind weiter nichts als Spuren der in die Poren mündenden Gefässe. (S. auch T. V*a*, F. 4*a* u. 8*a*).

Die Unterseite des Thorax mit den Blattfüssen kann noch nicht so vollständig wiedergegeben werden, wie bei *Eurypterus*, doch konnte immerhin unsre Kenntniss auch dieser Theile bei *Pterygotus* erweitert werden. Dass wir bei diesem ebenfalls 5 Blattfüsse haben, dafür spricht die schon oben (S. 68) besprochene F. 1 auf T. I bei Woodward (l. c.) und die F. 2 auf unsrer T. V *a*, in welcher alle 5 Blattfüsse zu sehn sind, die den 6 dorsalen Thoraxgliedern entsprechen. Der 5te Blattfuss liegt unter dem 6ten Dorsalgliede, welches durch das nachfolgende unten geschlossene 7te Leibesglied ganz sicher festzustellen ist.

Der erste Blattfuss oder das Operculum (T. V, F. 1, 2; T. IV, F. 9) liegt uns in einem vollständigen Exemplar und einigen Bruchstücken vor. Seine Form stimmt ziemlich überein mit der schon von Huxley und Salter (l. c.) auf T. III, F. 5 gelieferten Abbildung. Auch das Bruchstück des Operculum von *P. gigas* in demselben Werk, T. VIII, F. 2 stimmt gut zu unsern Stücken. Bei dem letztern ist namentlich die Uebereinstimmung der Schuppenskulptur, vorn die langgezogenen fast linearen und hinten die convexen Schuppen in die, Augen fallend. Das Operculum besteht aus zwei Seitenlappen und einem Medianzipfel in der Mitte. Der Medianzipfel (T. V, F. 2) ist an seinem rhombisch pfeilförmigen Grunde, durch Näthe mit den Seitenlappen verbunden; seine keulenförmige am Ende breit abgerundete Spitze liegt frei zwischen den nach der Mitte zu spitz vorgezogenen Seitenlappen. Diese bestehn je aus einem Stück und zeigen keine Quernath wie *Eurypterus*. Nur an den Seitenecken der Basis des Medianzipfels sieht man schwache Andeutungen einer schräge nach vorn verlaufenden Furche oder Nath, entsprechend den beiderseitigen dreieckigen Feldern am Grunde des Medianzipfels von *Eurypterus*.

Der Umriss des ganzen Operculum ist ziemlich rectangulär mit abgerundeten Hinterecken, der Hinterrand mit in der Mitte vorgezogener breiter Spitze. Das Operculum, wie die übrigen Blattfüsse, zeigt grössere Längendimensionen wie die dorsalen Thoraxglieder;

die Breite übertrifft nämlich bei allen diesen kaum dreimal die Länge. Anders kann es ja auch nicht sein, da auf der Bauchseite 5 Blattfüsse den 6 dorsalen Thoraxgliedern entsprechen müssen.

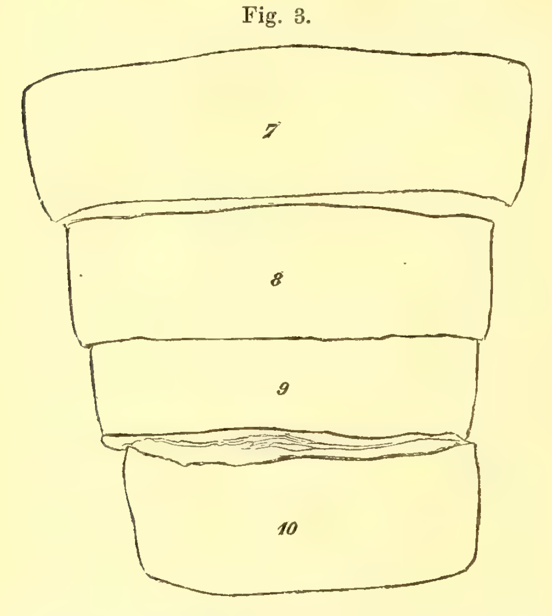
In der Figur 2 auf T. V *a* sehn wir (bei I) ein eigenthümliches elliptisches Feld die Stelle einnehmen, an welcher die Basis des Medianzipfels des ersten Blattfusses zu erwarten wäre, die aber bekanntlich rhombische Form mit scharfen seitlichen Winkeln hat. Ich konnte lange keine sichere Deutung für dieses elliptische Feld finden, bis ich mir die F. 2 auf T. III der Monographie von Huxley und Salter genauer ansah. Hier haben wir ebenfalls ein seitlich abgerundetes Basalfeld des Medianzipfels und die Vergleichung mit der beistehenden F. 5 macht es wahrscheinlich, dass wir in dieser F. 2 ebenso eine innere oder untere Ansicht des Blattfusses haben wie in F. 2 auf unsrer T. V *a*; die Ecken des Medianzipfels treten eben nur auf der Aussenseite des Operculum hervor. Die Deutung unsrer F. 2 wurde nur noch schwieriger dadurch, dass der zweite Blattfuss sich so hart an die hintere Seite der genannten elliptischen Figur anlegt, und sogar zwei kurze Fortsätze zu ihr hinschickt.

Ich wurde unsicher, ob die jetzt als 1ster und 2ter Blattfuss gedeuteten Stücke nicht zusammen gehören, wogegen freilich das plötzliche Aufhören des Medianzipfels über dem Vorderrande des 2ten Blattfusses sprach. Der 2te Blattfuss zeigt in diesem Stück nur die gewöhnliche Schuppenzeichnung und keine eigenthümliche Sculptur wie bei der isolirt gefundenen Platte F. 3 auf T. V *a*, die ich der Andeutung des Medianzipfels wegen (s. oben S. 68) für einen 2ten Blattfuss ansprach. Alle 4 hintern Blattfüsse (II — V) der Platte F. 2 auf T. V *a* sind gleichartig gebildet, hinten concav, die Oberfläche mit grossen dreieckigen (mit der Spitze nach hinten) Schuppen bedeckt. Am Vorderrande erkennt man stellweise eine feine gerundete Schuppenzeichnung wie bei den Dorsalgliedern. Mehr oder weniger deutliche Spuren der Mediannath (s. oben S. 68) sind auch hier an einigen Stellen bemerkt worden und zwar besonders deutlich am Blattfuss V (bei *a*). Isolirte oder zu 2 oder 3 zusammenhängende Blattfüsse finden sich ziemlich oft, die sich leicht durch ihre grössere Längenerstreckung bei geringerer Breite und ihre regelmässig — rectanguläre blattartige Form, beim Mangel aller Gelenkvorsprünge und scharf markirter, gesägter und schwieliger Umschlagskanten von allen dorsalen Thorax- und den Abdominalgliedern unterscheiden.

Die gestreckte Form des 6 gliedrigen Abdomens, dessen Bau wir schon oben (S. 69) besprochen haben, stimmt recht gut mit derjenigen beim wohlbekannten *P. bilobus* überein. Obgleich wir bei keinem Exemplar alle Abdominalglieder beisammen haben, so sind doch so viele aus 2, 3 und 4 zusammenhängenden Gliedern bestehende Stücke vorhanden, dass wir bei Construction unsrer restaurirten Figur uns nicht blos nach *P. bilobus* zu richten nöthig hatten, sondern unsre Zeichnung durch zahlreiche eigene Messungen controlliren konnten. In unsrem Holzschnitt F. 3 (Siehe p. 80) haben wir die Glieder 7, 8, 9, 10 von der Dorsalseite. In F. 4 die Glieder 8, 9, 10 von der ventralen Seite, mit convexem Vorderrande. In F. 7 auf T. V die Glieder 9, 10, 11 und in F. 11 auf T. VII die Glieder

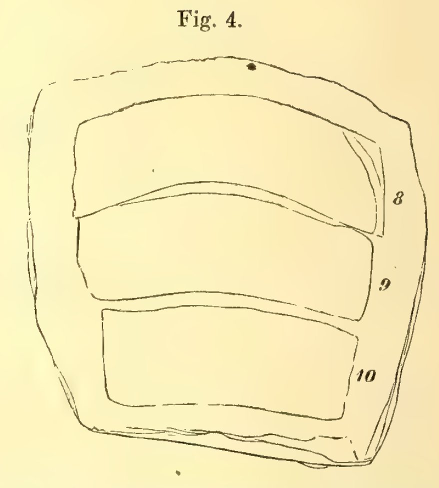
11, 12 mit dem Schwanzschild zusammen. Alle Abdominalglieder zeigen im Unterschied von den dorsalen Thoraxgliedern spitz nach hinten vorspringende Hinterecken, wie bei den übrigen *Pterygotus*-Arten und auch bei *Eurypterus*. Dadurch sind sie sicher, auch isolirt,

Fig. 3.



Das 7te bis 10te Abdominalglied von *Pterygotus osiliensis* von der Rückenseite. Halbe Grösse.

Fig. 4.



Das 8, 9 und 10te Abdominalglied von *Pterygotus osiliensis* von der Bauchseite. Halbe Grösse.

von den Thoraxgliedern zu unterscheiden, die an den Hinterecken abgerundet sind. Die vordern Abdominalglieder 7 und 8 zeigen auf der Rückenseite noch Spuren von der mittlern Vorwölbung (der Rhachis), den Fulcren und den gleichfalls vorspringenden Seitentheilen, den Vertretern der Pleuren bei den Trilobiten, wie das besonders auf dem Holzschnitt F. 3 und fürs 7te Glied auch in der Figur 2 auf T. V *a* zu erkennen ist. Das Verhältniss von Länge zu Breite ist beim 7ten Gliede noch wenig von dem vorhergehenden 6ten (dem letzten Thoraxgliede) verschieden, auch die absoluten Maasse der Länge stimmen noch ziemlich überein. Später wird die Breitendimension immer kleiner und die Längendimension nimmt allmählich etwas zu, bis beim 11ten Gliede die Länge nur 2 mal in der Breite enthalten ist. Das letzte Glied des Abdomens, das 12te (T. V, F. 8; T. V*a*, F. 12; T. VII, F. 11), ist schon abweichend gebildet: es ist nur $1\frac{1}{3}$ mal so breit wie lang, seine Seitenränder sind convexer als bei den frühern Gliedern, bei denen sich eine deutlichere Convergenz der Seitenränder nach hinten erkennen lässt. Zugleich sind die Seitenränder massiver, deutlicher gesägt und mit schwieligen Polygonalfiguren bedeckt, wie am Schwanzschild. Auf dem hintern Theil der Rückenfläche erkennt man deutlich eine mediane Crista (T. V, F. 8 *b*; T. V *a*, F. 12). Der Hinterrand (T. V, F. 8) zeigt eine ausgeschweifte Form zur Einfügung des Schwanzschildes.

Wir fügen noch einige direkte Messungen bei:

Von der Rückenseite:

	7tes Glied.		8tes Glied.		9tes Glied.		10tes Glied.		11tes Glied.		12tes Glied.	
	Länge.	Breite.	Länge.	Breite.	Länge.	Breite.	Länge.	Breite.	Länge.	Breite.	Länge.	Breite.
Holzschn. F. 3.	38 mm.	133 mm.	38 mm.	112 mm.	—	100 mm.	36 mm.	93 mm.	—	—	—	—
T. V, F. 7	—	—	—	—	31 mm.	97 »	33 »	85 »	38 mm.	75 mm.	—	—
T. V*a*, F. 11.	—	—	—	—	—	—	—	—	25 »	47 »	—	—
T. V*a*, F. 12.	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	27 mm.	39 mm.

Von der Bauchseite:

Holzschn. F. 4.	—	—	27 mm.	84 mm.	27 mm.	75 mm.	27 mm.	65 mm.	—	—	—	—
T. V, F. 6.	30 mm.	118 mm.	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
T. VII, F. 11.	—	—	—	—	—	—	—	—	23 mm.	45 mm.	28 mm.	37 mm.

Die Maasse sind, wie auch beim Thorax alle in der Luftlinie und die Breiten in der Mitte der Glieder gemessen.

Das ausgerandete Schwanzschild (Telson bei Woodward) liegt uns in 4 Exemplaren vor, und zwar in zwei verschiedenen Formen: die eine oblong T. VI, F. 1 und T. VII, F. 11; die andre breit oval, fast kreisförmig T. VI, F. 3. Die F. 2 auf derselben Tafel, die unvollständig ist, scheint in der Mitte zu stehn. Ich halte die ersterwähnte oblonge Form für die typische, weil sie mit der beim nahe verwandten *P. gigas* (Huxley und Salter l. c. T. II, F. 16, 17) nahe übereinstimmt. Die breite Form, die zugleich nach der Basis zu sich stark verschmälert, rechne ich zu einer besondern Varietät *laticauda*, die vielleicht mit der Zeit zu einer besondern Art werden wird, zu der dann vielleicht auch das grosse ovale Metastoma T. IV, F. 8 zu ziehen wäre. Da wir in Charakteren andrer Theile noch keine Anhaltspunkte haben, so lassen wir einstweilen die Sache auf sich beruhn.

Das Schwanzschild der typischen oblongen Form ist etwa $1\frac{1}{2}$ mal so lang als breit, etwas weniger lang als das 11te und 12te Leibesglied zusammen genommen. Das grössere der beiden vorliegenden vollständigen Exemplaren ist 77 mm. lang bei 50 mm. breit, das kleinere 47 mm. lang bei 32 mm. breit. Der Vorderrand (T. VI, F. 1; T. V, F. 8*a*) zeigt einen breiten gerundeten Vorsprung in der Mitte zur Einfügung in das vorhergehende letzte (12te) Leibesglied; zu beiden Seiten des Vorsprungs ist der Rand seicht ausgebuchtet, um an den Vorderecken wieder in stumpfen Spitzen vorzuspringen.

Die etwas verschmälerte hintere Seite zeigt in der Mitte einen tiefen Einschnitt der bis zu $\frac{1}{4}$ oder $\frac{1}{3}$ der Fläche des Schwanzschildes eindringt; an seiner Mündung divergirt der Rand jederseits und bildet einen stumpf abgerundeten Lappen, so dass das Hinterende herzförmig erscheint. Die Seitenränder sind flach vorgewölbt und oben und unten mit schwieligen, dichtstehenden polygonalen Figuren (T. VI, F. 4) bedeckt, die am Rande selbst in Zähne übergehn, die namentlich am Hinterrande deutlich hervortreten (T. VI, F. 1). Die uns allein vollständig erhaltene Unterseite ist flach, nach hinten zu etwas concav; vorn mit feinen gerundeten Schuppen bedeckt (mit der Convexität nach hinten), dagegen am hintern Theil ohne alle Ornamentirung. Längs der Mittellinie schimmert am vordern Theil die dorsale Crista durch, die in F. 2 im innern Abdruck der Oberseite deutlich hervortritt.

Auch in dem Abdruck T. VII, F. 11 ist sie andeutungsweise zu erkennen. Der genannte innere Abdruck T. VI, F. 2 sowie die Fig. T. VI, F. 4 zeigen deutlich die Ornamentirung der Oberseite, die aus feinen nach hinten spitz vorspringenden Schuppenzeichnungen besteht, die besonders in der Umgebung der Crista auftreten.

Das von mir zur var. *laticauda* gerechnete Schwanzschild T. VI, F. 3 ist fast kreisförmig, nach vorn verschmälert vorgezogen. Es ist nur etwa $1\frac{1}{10}$ mal so lang als breit, nämlich 105 mm. lang bei 94 mm. breit. Am kurzen Vorderrande, der nicht ganz erhalten ist, lässt sich die Contour der typischen Form nicht erkennen. Die Seitenränder sind halbkreisförmig vorgewölbt mit ähnlicher Randzeichnung wie bei der typischen Form. Die Hinterseite zeigt ebenfalls einen Einschnitt der bis zu $\frac{1}{5}$ der Fläche des Schwanzschildes vordringt, die seitlichen Herzlappen treten viel weniger markirt hervor, als bei der typischen Form. Die Sculptur der Unterseite ist ähnlich wie bei der Hauptform. Vorn sieht man die Oberfläche mit gerundeter Schuppenzeichnung geschmückt. Eine Andeutung des Kiels der Oberseite ist zu erkennen. Nach dem Vorderrande zu sieht man den Abdruck der Oberseite, der zahlreiche feine nach aussen divergirende Längsrippen zeigt.

Was die systematische Stellung unsres *Pterygotus osiliensis* betrifft, so haben wir schon oben darauf hingewiesen, dass er in nächster Verwandtschaft zu den englischen ähnlichen Arten *P. gigas* Salt. und *P. bilobus* Salt. steht. In der That bilden die drei genannten Arten eine besondere Gruppe in der Gattung, die durch das hinten ausgerandete oder zweilappige Schwanzschild charakterisirt wird. Die drei Arten stehen untereinander so nahe, dass es mit der Zeit vielleicht passender sein wird, sie alle drei unter eine Artbezeichnung zusammenzufassen und nur locale Varietäten zuzulassen.

P. gigas, der durch seine Grösse, die Form des Schwanzschildes und des Metastoma, soweit die letztern bekannt sind, unsrer Art am nächsten kommt, unterscheidet sich durch die Form des Kopfschildes, das kaum breiter als lang ist und in seiner Mitte, zwischen den Nebenaugen, eine deutliche Crista trägt, die wir bei unsrer Art nicht bemerken. Auch das Grundglied des grossen Fusspaars scheint verschieden, da es auf der Innenseite hinter dem Zahnfortsatz nach innen vorspringt (Huxley und Salter l. c. T. IX, F. 8). Die übrigen Glieder dieses Fusspaars (Huxl. u. Salt. T. IX, F. 10—12) zeigen dagegen wiederum eine grosse Uebereinstimmung, ebenso wie die Scheeren, deren dichotomische Zahnskulptur sich bei beiden Arten in gleicher Weise entwickelt zeigt.

P. bilobus Salt., namentlich die var. *P. perornatus* Woodw. (*P. perornatus* Salt.) zeigt die allergrösste Uebereinstimmung in allen Theilen und weicht fast nur durch die geringere Grösse ab; nur das Grundglied des grossen Schwimmfusses zeigt eine geringe Verschiedenheit darin, dass es bei *P. bilobus* hinten in eine stumpfe Spitze vorspringt, während es bei *P. osiliensis* mehr vierseitig erscheint; auch ist das Metastoma gestreckter. Da alle drei Arten genau dasselbe Niveau im obersten Silur einnehmen, so ist ja auch die Wahrscheinlichkeit dafür eine grössere, dass sie nur als Resultate localer Variationen aufzufassen sind.

Wie oben gesagt, weisen einige Stücke, wie namentlich das breit ovale Metastoma (T. IV, F. 8) und das nach vorn stark verschmälerte grosse Schwanzschild (T. VI, F. 3) noch auf eine vierte Art innerhalb der oben angenommenen Gruppe von *Pterygotus*-Arten (mit 2 lappigem) Schwanzschild hin, doch können wir wie gesagt einstweilen noch nichts genaueres darüber mittheilen.

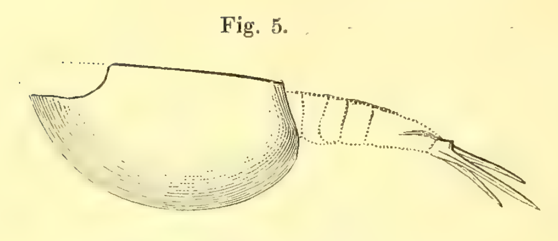
Auf die Maasse des ganzen Thiers genauer einzugehn, lohnt sich nicht, da wir keine einigermaassen vollständigen Exemplare besitzen. Da die Gesammtform dem wohlbekannten *P. bilobus* so ziemlich zu entsprechen scheint, so können wir uns nach den einzelnen erhaltenen Theilen durch Vergleichung eine ungefähre Vorstellung von den Dimensionen des ganzen Thiers machen, wonach sich für unsre grössten Exemplare eine Länge von ca. 750 mm. oder $2\frac{1}{2}$ Fuss ergiebt, die mit den Dimensionen des *P. gigas* gut übereinstimmt, die des *P. bilobus* aber bedeutend übertrifft.

III. Gen. Ceratiocaris M. Coy.

Bei den früher besprochenen Crustaceen der Eurypterusschichten habe ich zunächst die Familie besprochen, der sie angehören und bin erst dann zu den einzelnen Gattungen übergegangen. Bei der jetzt zu erwähnenden Gattung *Ceratiocaris* begnüge ich mich mit der Gattungsangabe, da ihre systematische Stellung noch nicht feststeht und mein Material darüber auch keine neue Auskunft giebt. H. Woodward, der sich viel mit unsrer, namentlich im Obersilur sehr formenreichen, Gattung beschäftigt hat, rechnet sie noch in seiner letzten einschlägigen Publication, dem «Catalogue of british fossil Crustacea» London 1877 p. 70, zu den Phyllopoden. Dagegen hat nun Gerstäcker (Klassen und Ordnungen des Thierreichs (Bd. 5, 1te Abth. p. 1067) sich sehr bestimmt dagegen ausgesprochen, und sich auf die dreistrahlige Schwanzflosse stützend, Beziehungen zu den Decapoden angedeutet. Da der letztere Umstand allerdings sehr ins Gewicht fällt, andrerseits aber die richtige systematische Stellung unsrer Gattung doch noch zweifelhaft bleibt und wie gesagt mein Material in keiner Weise neue Gesichtspunkte für die Kenntniss der Organisation unsrer Gattung liefert, so begnüge ich mich damit die Species zu beschreiben, zu der unsre wenigen *Ceratiocaris*-Reste gehören. Es sind im Ganzen ein paar Schwanzstacheln, von denen einer vollständig, dreistrahlig, gefunden ist, und ein einziges nicht ganz vollständiges Rückenschild. Ich nenne die Art dem Entdecker (s. d. Vorwort) des letztern zu Ehren *Ceratiocaris Nötlingi.* Sie ist zugleich der erste Vertreter unsrer Gattung in Russland. In England führt Woodward (l. c.) 18 Arten an, die vom Unter-Silur bis zum Carbon reichen. Dem Obersilur gehören davon 12 Arten an. Aus Amerika führt Hall in Palaeontology of New York III, p. 421'—423' (T. 84, 80*a*, F. 10) 3 Arten an, die aus dem nämlichen Niveau, der Waterlime group, wie die Eurypteren stammen.

Ceratiocaris Nötlingi. Taf. VI, F. 8, 9; T. VII, F. 12.

Fig. 5.



Ceratiocaris Nötlingi n. sp.
Restaurirte Zeichnung. Etwas verkleinert.

Vom Rückenschild (Cephalothorax?) ist die linke Klappe vorhanden, (T. VII, F. 12), deren vorderes Ende bei unsrem Exemplar abgebrochen ist. Die Form des Schildes ist bei unsrer Art schief oval, hinten abgestutzt. Die Rückenlinie, so weit sie zu verfolgen, ist gerade. Der Hinterrand etwas nach hinten gewandt, steigt steil an, ist am Grunde etwas ausgeschweift und geht in sanftem Bogen in den regelmässig gekrümmten Bauchrand über, der sich nach vorn in eine vorragende Spitze fortzusetzen scheint.

Die Länge der Schaale (c. 72 mm.) ist nicht voll noch einmal so gross wie die grösste Breite in der Mitte (38 mm.). Diese übertrifft das Doppelte der Höhe des hintern Vorsprungs (18 mm.). Die Schaale ist schwach gewölbt und zeigt eine feine concentrische Streifung, die vorzüglich längs dem Bauchrande deutlich ist. Ausserdem verläuft um den ganzen Umkreis (ausser dem Rücken), ein feiner erhabener Rand.

Von bekannten Arten sind die amerikanischen oben citirten *C. Maccoyanus* Hall und *acuminatus* Hall zunächst in Vergleich zu ziehn. *C. Maccoyanus* ist gestreckter, mehr als doppelt so lang wie breit, die Wölbung des Bauchrandes springt weniger vor und der hintere Vorsprung ist durch einen schärfern Winkel (weniger abgerundet) markirt.

C. acuminatus hat bei ungefähr gleichen Dimensionen wie unsre Art, einen rhombisch ovalen Umriss, mit vorspringender Mitte des Bauchrandes und ebenfalls stärker markirtem hintern Vorsprung, dessen Höhe über dem Dorsalrande bei beiden Arten mehr als die Hälfte der grössten Breite der Schaale beträgt.

Von englischen Arten nähert sich der unsern am meisten *C. papilio* Salt. (Ann. and Magaz. III vol. 5, 1860, p. 154, F. 1—3), doch auch bei dieser tritt der hintere Vorsprung schärfer hervor und ist die Contour des Bauchrandes weniger regelmässig gekrümmt. Die Art stammt aus dem gleichen Eurypteriden-Niveau von Lesmahago, Lanarkshire.

Von dem 3 strahligen Schwanzanhange haben wir T. VI, F. 8 ein recht vollständiges Exemplar abbilden können. Der centrale Theil ist breit linear auf dreiseitiger Basis, 38 mm. lang bei 11 mm. Breite am Grunde. Auf seinem Rücken erkennen wir drei kräftige Rippen, die Andeutungen von Tuberkeln zeigen. Nach der Spitze zu sind feinere Rippen zwischen die drei Hauptrippen eingeschoben. Die dreieckige Basis zeigt jederseits vor der Einlenkung der Seitenstacheln einen kurzen Dorn. Die Seitenstacheln sind linear-lancettlich, flach mit schwacher Andeutung eines Längskiels in der Mitte. Ihre Länge beträgt 22 mm., also über die Hälfte des Mittelstachels.

Von bekannten andern Arten ist der Schwanzanhang sowohl von *C. papilio* (Salter l. c.) als von *C. robustus* Salt. (l. c. p. 158, M. Coy palaeoz. Foss. T. I, F. 2 *f*, 7 *c*, *d*, als *Pterygotus leptodactylus*), namentlich von der letztern Art, die auch tuberculirte Rippen hat, so ähnlich gebildet, dass wir nicht gewagt hätten nach ihm allein eine neue Art aufzustellen. Von *C. robustus* ist übrigens das Rückenschild nicht bekannt, so dass wir doch vielleicht noch einmal in die Lage kommen könnten unsre Art einzuziehn.

Erklärung der Abbildungen: T. VI, F. 8. Ein vollständiger Schwanzanhang, aus der Volborth'schen Sammlung; F. 9, Mittelstachel eines grössern Exemplars aus dem Revaler Museum. T. VII, F. 12. Fast vollständiges Rückenschild, aus dem Revaler Museum, im Jahre 1882 von Dr. F. Nötling gefunden.

Weitere Nachträge zu den russischen Leperditien.

Nachtrag zu den Leperditien von Waigatsch.

Auf Seite 25 der vorliegenden Arbeit erwähne ich aus der Nordenskjöld'schen Ausbeute von Waigatsch neben der häufigen *Leperditia Nordenskjöldi* und der *L. Waigatschensis* noch eine dritte, grosse Art mit stark entwickeltem Buckel, die ich wegen Unvollständigkeit der Exemplare mich nicht genauer zu beschreiben getraute. Nachdem ich vor Rücksendung des Materials alle gesammelten Stücke nochmals durchging, überzeugte ich mich, dass nicht nur die erwähnte Form sich ganz wohl charakterisiren lässt — ich nenne sie nach meinem Freunde Prof. G. Lindström in Stockholm, der mich zuerst auf dieselbe aufmerksam machte, *Leperditia Lindströmi* —, sondern von derselben Fundstätte noch eine weitere grosse Form, freilich auch nicht ganz vollständig, vorliegt, die ich einstweilen als var. *mutica* der *L. Lindströmi* beifüge.

Leperditia Lindströmi n. sp. T. V *a*, F. 17—20.

Es liegt eine ziemlich vollständige rechte und eine ebensolche linke Schaale vor; ausserdem ein paar Bruchstücke. Die Schaale ist gross, im Umriss schief eiförmig. Sowohl Vorder- als Hinterrand springen stark vor und zeigen einen breiten, flachen Randsaum, der von einer deutlichen Randfurche begleitet wird. Der Bauchrand steigt von vorn nach hinten

in starkem Bogen an und zeigt an seinem hintern Ende einen deutlichen stumpfen Vorsprung, der durch eine flache Bucht vom Beginn des Hinterrandes getrennt ist. Die grösste Höhe befindet sich hinter der Mitte kurz vor dem Vorsprung. Die Wölbung der Schaale ist vom Schloss- zum Bauchrande hin in der Mitte am höchsten. Bis zu dieser steigt sie vom Schlossrande allmählich an, verläuft dann in geringer Neigung nach der Bauchseite zu und fällt dann zum Bauchrande in steiler (F. 17) oder selbst fast überhängender Wölbung (F. 18) zum Bauchrande ab. Zugleich zeigt die Ansicht von der Bauchseite ein allmähliges Ansteigen von vorn nach hinten bis zur Mitte, dann schwaches Fallen zum Vorsprung, und von diesem an einen steilen und ziemlich plötzlichen Abfall zum Hinterrande (F. 17*b*, 18*b*, 19*b*). Zwischen dem Bauchrande und der starken Wölbung der Bauchseite verläuft eine deutliche Furche, welche die vordere und hintere Randfurche mit einander verbindet. Da der Bauchrand der linken Schaale den für *Leperditia* charakteristischen Umschlag zeigt und dieser bei der rechten Schaale fehlt, so glaube ich ein Uebergreifen der rechten über die linke Schaale annehmen und daher unsre Form zu *Leperditia* stellen zu müssen. Der Augentuberkel (ohne besondern ihn umgebenden Fleck) und der Mittelfleck sind deutlich erkennbar.

Von bekannten Arten wüsste ich keine mit unsrer Art näher zu vergleichen. Durch die Furche an der Bauchseite unterscheidet sie sich von Allen. Die rechte und linke Schaale unsrer Art gehören verschiedenen Exemplaren an und zeigen in ihren Dimensionen Unterschiede, indem die Wölbung des Bauchrandes bei der linken Schaale viel stärker hervortritt, und zugleich die ganze Schaale kürzer und höher ist. Wir haben es hier wohl nur mit einer Veränderlichkeit innerhalb einer und derselben Art zu thun.

Maasse:

	Länge.	Höhe vorn.	Höhe hinten.	Grösste Höhe.	Schlossrand.
Rechte Schaale	37 mm.	17 mm.	22 mm.	23 mm.	28 mm.
Linke Schaale	27 »	14 »	17 »	19 »	21 » ?

Fundort. Cap Grebenny auf Waigatsch. Die Exemplare im Stockholmer Museum.

Erklärung der Figuren: T. V*a*, F. 17 rechte Schaale von oben (*a*), von der Bauchseite (*b*) und im Durchschnitt von der Rücken- zur Bauchseite (*c*). F. 18 Exemplar einer linken Schaale, in den nämlichen Ansichten. F. 19, Stück eines hintern Vorsprungs der linken Schaale von oben (*a*) und von der Bauchseite (*b*). F. 20, Stück der Oberfläche einer linken Schaale mit deutlichem Auge und Mittelfleck.

Leperditia Lindströmi var. *mutica* m. T. V*a*, F. 21, 22.

Die Grössen- und Wölbungsverhältnisse stimmen so ziemlich mit der Hauptform überein; der Unterschied liegt wesentlich darin, dass der markirte Vorsprung an der Hinterseite

der Schaale wenig oder gar nicht ausgebildet ist, obgleich immerhin ein steilerer Abfall der Wölbung an der Hinterseite, dem Vorsprung entsprechend, bestehn bleibt. Auch ist die Schaale im Umriss mehr oblong, die Hinterseite weniger vorgezogen als in der Hauptform. Die Furche am Bauchrande ist ebenso stark oder sogar stärker ausgebildet. Die Oberfläche zeigt zuweilen eine feine zerstreute Tuberkulirung, die andeutungsweise übrigens auch bei der Hauptform vorkommt.

Maasse können nicht angegeben werden, da kein Exemplar einigermaassen vollständig ist. Die Figuren mögen einstweilen genügen.

Der Fundort ist der nämliche wie bei der typischen Form.

Erklärung der Figuren: Es sind zwei Exemplare der linken Schaale in T. V *a*, F. 21, 22 abgebildet, mit der Ansicht von oben (*a*), von der Bauchseite (*b*) und dem Durchschnitt von der Rücken- zur Bauchseite (*c*).

Nachtrag zu den Uralischen Leperditien.

Sämmtliche Uralische Leperditien, die *L. Barbotana*, *Mölleri*, wie *Isochilina biensis* kommen wie oben (S. 22) gesagt, im Niveau das *Pentamerus Baschkiricus* vor, das nach v. Grünewaldt früher mit den obersten böhmischen Etagen F, G, H, und also jetzt mit dem Kayser'schen Hercyn parallelisirt wurde.

Nun hat Hr. Tschernyschew[1]) in seinem vorläufigen Bericht über seine geologischen Untersuchungen am W. Abhang des südlichen Ural, nachgewiesen, dass das genannte Niveau des *P. baschkiricus*, da in ihm Formen wie *Spirifer Archiaci* Murch. und *Stringocephalus Burtini* vorkommen, dem mittlern Devon zuzuweisen und wohl von den gleichfalls früher von Grünewaldt untersuchten Bogoslowsker Schichten mit *Rhynch. nympha*, *Spirifer superbus*, *Pentamerus acutolobatus* zu scheiden ist, die auch auf dem W. Abhang des südlichen Ural am obern Juresan angetroffen werden und wirklich dem obersten böhmischen Silur Barrande's also dem Kayser'schen Hercyn zu parallelisiren sind. Hier findet sich von Leperditien nur die *L. Barbotana*, die also beiden Niveau's angehört. Die *Leperditia grandis* var. *uralensis* (S. oben S. 24), die ich oben als Hinweis auf das silurische Alter des Uralischen Leperditienniveaus auffasste, bleibe einstweilen als Varietät stehn. Weiteres Material wird wahrscheinlich auch ausreichende specifische Unterschiede liefern.

Von der *Leperditia Mölleri* m. (S. oben S. 23, T. I, F. 23—25) habe ich durch Hrn. Tschernyschew neues Material aus dem oben bezeichneten Niveau erhalten, «von

1) Ѳ. Чернышевъ, предварительный отчетъ о геологическихъ изслѣдованіяхъ на западномъ склонѣ южнаго Урала, in Извѣстія геологическаго комитета, Томъ II, № 1 (1883) стр. 31—48. Ein deutsches Referat über den Artikel wird auch im Neuen Jahrbuch für Mineralogie u. s. w. erscheinen.

der Vereinigung der Flüsse Bia und Bolotnaja unterhalb des Dorfes Ailina» aus dem ich eine Schaale mittheile (T. V *a*, F. 24), an welcher der Umschlag sehr schön hervortritt. Zugleich benutze ich die Gelegenheit eine neue (F. 23 *a*) verbesserte Zeichnung des grossen Exemplars der rechten Schaale T. I, F. 25 zu geben, bei dem fälschlich ein Randsaum auch auf der Bauchseite in der frühern Darstellung hervortritt. Zugleich gebe ich hier auch die Ansicht der Bauchseite (F. 23 *b*) des nämlichen Exemplars. Unter den mir zur Verfügung gestellten Exemplaren finden sich auch solche, bei denen die charakteristische Tuberkulirung sehr zurücktritt und die wir daher als eine var. *laevigata* bezeichnen könnten. Sie sind meistens klein, zeigen aber doch den Augenfleck und die charakteristische Verticalfurche hinter dem Auge: sie stammen ebenfalls vom Wege von Ailina zum Satkinski Sawod und sind von Hrn. Tschernyschew gesammelt.

Berichtigungen und Druckfehler.

Seite 5 Zeile 1 von oben lies «ad» statt «at».
» 5 » 9 » unten » «Ostracoden» statt «Ostracaden».
» 13 » 14 » oben » «Fig. 2» statt «Fig. 1».
» 13 » 18 » oben » «1873» statt «1387».
» 30 » 11 von unten ist von kleinen Lingulen die Rede, die für die Tiefseebildung der Eurypterenschichten sprechen sollen. Das ist ungenau, da jetzt die Gattung Lingula vorzüglich in der Littoralzone vorkommt. Nichtsdestoweniger bleibt der Tiefseecharakter der Eurypterenschichten gewahrt. S. auch Fuchs in Neues Jahrb. etc. 1883, Bd. II, Heft 3, p. 564, 565.
Seite 47 Zeile 19 von oben lies «Fig. 2» statt «Fig. 1 und 2». F. 1 ist ziemlich richtig.

ERKLÄRUNG DER TAFELN.

Tafel I.

Leperditien (F. 1—33) und *Hemiaspiden* (F. 34—49). Alles natürliche Grösse, wo nicht Anderes bemerkt ist.

F. 1. (S. 11) Rechte Schaale von *Leperditia Eichwaldi* m. Geschiebe von Kabillen in Kurl. Mus. Dorpat.

F. 2. (S. 11) Rechte Schaale von *L. baltica* His. Geschiebe von Dondangen in Kurl. Mus. Dorpat.

F. 3. Linke Schaale von *L. baltica* His. *a* von oben; *b* vom Umschlag aus gesehn. Geschiebe von Kabillen in Kurland. Mus. Dorpat.

F. 4. (S. 13) *L. Keyserlingi* m. Abweichende Form. Von Merjama in Estland. Mus. Dorpat.

F. 5. (S. 14) *L. Hisingeri* m. Steinkern der rechten Schaale von Laisholm. Mus. Reval.

F. 6 *a*, *b*. *L. Hisingeri* m. Ganzes Exemplar von Wisby.

F. 7. *L. Hisingeri* m. ganzes Exemplar von Wisby, vom Bauchrande aus, um den Umschlag der linken Schaale zu zeigen. Mus. Academ.

F. 8—12. (S. 16) *L. Hisingeri* var. *abbreviata* m. F. 8, grosses Exemplar der rechten Schaale von Nudi bei Raiküll. Mus. Dorpat.

F. 9 *a*, *b*. linke Schaale von Nömmküll bei Raiküll, mit dem Umschlag in 9 *a*. Mus. Reval.

F. 10, linke Schaale vom Koschschen Bach an der Pernauschen Strasse. Mus. Reval.

F. 11, linke und F. 12 rechte Schaale von Keoküll bei Raiküll. Mus. Reval.

F. 13—19. (S. 18) *L. marginata* Keys. von Prof. Stuckenberg am Originalfundorte an der Waschkina im Petschoralande gesammelt. Mus. Academ.

F. 13 rechte und F. 14 linke Schaale der typischen Form.

F. 15 junges Exemplar der rechten, und F. 16 der linken Schaale der nämlichen Form.

F. 17 rechte und F. 18 linke Schaale der var. *rotundata* m.

F. 19 linke Schaale der var. *subparallela* m.

F. 20—22. (S. 21). *L. Wiluiensis* m. an der Tomba, Zufluss des Olenek, von Czekanowski gesammelt. Mus. d. Akademie d. Wissenschaften.

F. 20 grosses Exemplar der rechten Schaale von oben.

F. 21. Schiefe Ansicht einer rechten Schaale von oben um die eingedrückten Punkte zu zeigen.

F. 22. Ganzes Exemplar vom Bauchrande um die Wölbung zu zeigen. Zugleich sieht man das Uebergreifen der rechten Schaale.

F. 23—25. (S. 23). *L. Mölleri* m. vom W. Abhang des S. Ural. Im Museum des Berginstituts.

F. 23. Rechte Schaale etwas vergrössert von oben, *b* vom Bauchrand, *c* im Durchschnitt. Auf dem Wege von Ailina zum Satkinski Sawod.

F. 24. Linke Schaale, *a* von oben, *b* von der Bauchseite mit dem Umschlag. Ebendaher, siehe auch T. V *a*, F. 24.

F. 25. Grosses Exemplar der rechten Schaale, vom linken Ufer der Belaja bei Kaginski Sawod. In der Zeichnung ist fälschlich der Randsaum auch um die Bauchseite herumgeführt. T. V *a*, F. 23 giebt eine verbesserte Darstellung.

F. 26—28. (S. 24). *L. grandis* Schrenk. var. *uralensis* m. vom Ufer der Belaja im S. Ural, unterhalb Katschukowa. Im Mus. des Berginstituts.

F. 26, 27, rechte Schaale von oben (*a*), von der Bauchseite (*b*); im Durchschnitt (*c*), fälschlich von der Bauch- zur Rückenseite, statt umgekehrt gestellt;

F. 28, linke Schaale von oben (*a*), von der Bauchseite mit dem Umschlag in der Mitte (*b*); im Durchschnitt von der Rücken- zur Bauchseite (*c*).

F. 29—32. (S. 25). *L. Nordenskjöldi* m. von Cap. Grebennyi auf der Waigatschinsel. Aus dem Stockholmer Museum.

F. 29. Gestreckte Form der rechten Schaale von oben (*a*), von der Bauchseite (*b*), von der Seite (*c*).

F. 30. Ovale Form der rechten Schaale.

F. 31. Ovale Form der linken Schaale von oben (*a*), von der Bauchseite mit dem Umschlage (*b*), im Durchschnitt von der Rücken- zur Bauchseite (*c*).

F. 32. Gestreckte Form der linken Schaale.

F. 33. (S. 27). *L. Waigatschensis* m. von Cap. Grebennyi auf der Insel Waigatsch. Stockholmer Museum. Rechte Schaale: von oben (*a*), vom Bauchrande (*b*), im Durchschnitt vom Rücken- zum Bauchrande (*c*).

F. 34—43. (S. 35—39 und 41—43). *Bunodes lunula* Eichw. mit der var. *Schrencki* m. (*B. Schrencki* Nieszk. sp. S. 38).

F. 34. Kopfschild und die 4 ersten Thoraxglieder der typischen Form. Coll. Volborth.

F. 35. Originalexemplar des Eichwald'schen *B. lunula.* Im geolog. Cabinet der Petersburger Universität.

F. 36. Wohlerhaltener Thorax derselben Form, mit Gelenkfortsätzen und Mediantuberkeln auf der Rhachis und tuberculirter Crista auf den Pleuren. Von oben (*a*) und von der Seite (*b*). Mus. Reval.

F. 37. Innerer Abdruck der hintern Thoraxglieder mit Gelenkfortsätzen. Mus. Dorpat.

F. 38. Innerer Abdruck der hintern (3—6) Thoraxglieder, der von Nieszkowski als Pygidium gedeutet wurde (S. 37, 38). Mus. Dorpat.

F. 39. Kopf einer Mittelform (S. 42) des typischen *P. lunula* und der var. *Schrenki* (ähnlich T. VII, F. 4). Mus. Reval.

F. 40. Ebenfalls Mittelform (S. 42) des *B. lunula* und der var. *Schrencki.* Rumpf und Hinterleib fast vollständig erhalten. Coll. Valborth.

F. 41. Eine ähnliche Mittelform früher (S. 38) wie die beiden vorigen Exemplare als *B. Schrencki* bestimmt. Coll. Volborth.

F. 42. Originalexemplar des *Bunodes* (*Exapinurus*) *Schrencki* Nieszk. mit concavem Hinterrande des Kopfes. Mus. Dorpat.

F. 43. Isolirte Rumpfglieder derselben var. *Schrencki* (das Stück in T. VII, F. 3 in verbesserter Zeichnung). Coll. Volborth.

F. 44—47. *Bunodes rugosus* Nieszkowski (S. 39, 40).

F. 44. Originalexemplar von Nieszk. Mus. Dorpat.

F. 45. Andrer Kopf aus dem Dorpater Museum.

F. 46. Ganzes Exemplar mit über den Thorax herübergeklapptem Kopfschild. Die Abdominalglieder sichtbar. Coll. Volborth.

F. 47. Kopf mit Thorax ausgestreckt, (schlechtes Exemplar). Mus. Reval.

F. 48, 49. *Pseudoniscus aculeatus* Nieszk. (S. 40, 41).

F. 48. Innerer Abdruck der Rückenseite des Originalexemplars vergrössert. Mus. Dorpat.

F. 49. Kopf mit erkennbaren Gesichtsnäthen und den 2 ersten Thoraxgliedern. Das Uebrige restaurirt. Natürl. Grösse. Mus. Reval.

1 2 3 a 4 11. 10 a 9 8 12 b 13 21. a 23 14 20 19 29 c 22 25 17 36 a 31 a. 15 a 24 18. 30 16 b b c. b b a 26 41 32 c c. 28 b 42 a 27 a 35 b 44 b. 34. 37 38 40 43 39 49 48. 46 45 47

R Koch del. Lith. Ch. Ivanson. Peterb. Seite. Gr. Pr. S. Petersburg.

Tafel II.

Eurypterus Fischeri Eichw. von Rootziküll. (Alles natürliche Grösse).

F. 1 *a*. Ein wohlerhaltener Kopf mit dem Ansatz des ersten Leibesgliedes, ausserdem sichtbar die 4 ersten Blattfüsse (von oben gesehn). Der erste und 2te Blattfuss sind aus einandergezogen und daher auch der Medianzipfel des 2ten Blattfusses sichtbar. Mus. Dorpat.

F. 1 *b*. Das nämliche Stück, im Abdruck.

F. 2. Schönes Exemplar der Unterseite. Die 5 Blattfüsse; der 3te—5te mit der Mediannath und der angedeuteten Quernath. Die Unterseite des Abdomens vollständig, mit den vordern Gelenkflächen der Glieder; ebenso die untere Ansicht des Endstachels. Mus. Reval.

F. 3. Auf der linken Seite die 5 Blattfüsse zu sehn; auf der rechten der untere Umschlag der ersten 8 Dorsalglieder (das nämliche Stück vergrössert wiederholt auf T. III *a*, F. 10). Coll. Volborth.

F. 4. Die 5 Blattfüsse von oben gesehn, namentlich auch der zweite mit dem verkümmerten Medianzipfel. Coll. Volborth.

F. 5. Die 5 Blattfüsse von oben gesehn. Der Medianzipfel des 2ten Blattfusses gar nicht angedeutet; der des 1sten verkümmert, in der sonstigen Form des zweiten (Geschlechtsunterschied?) Mus. Reval.

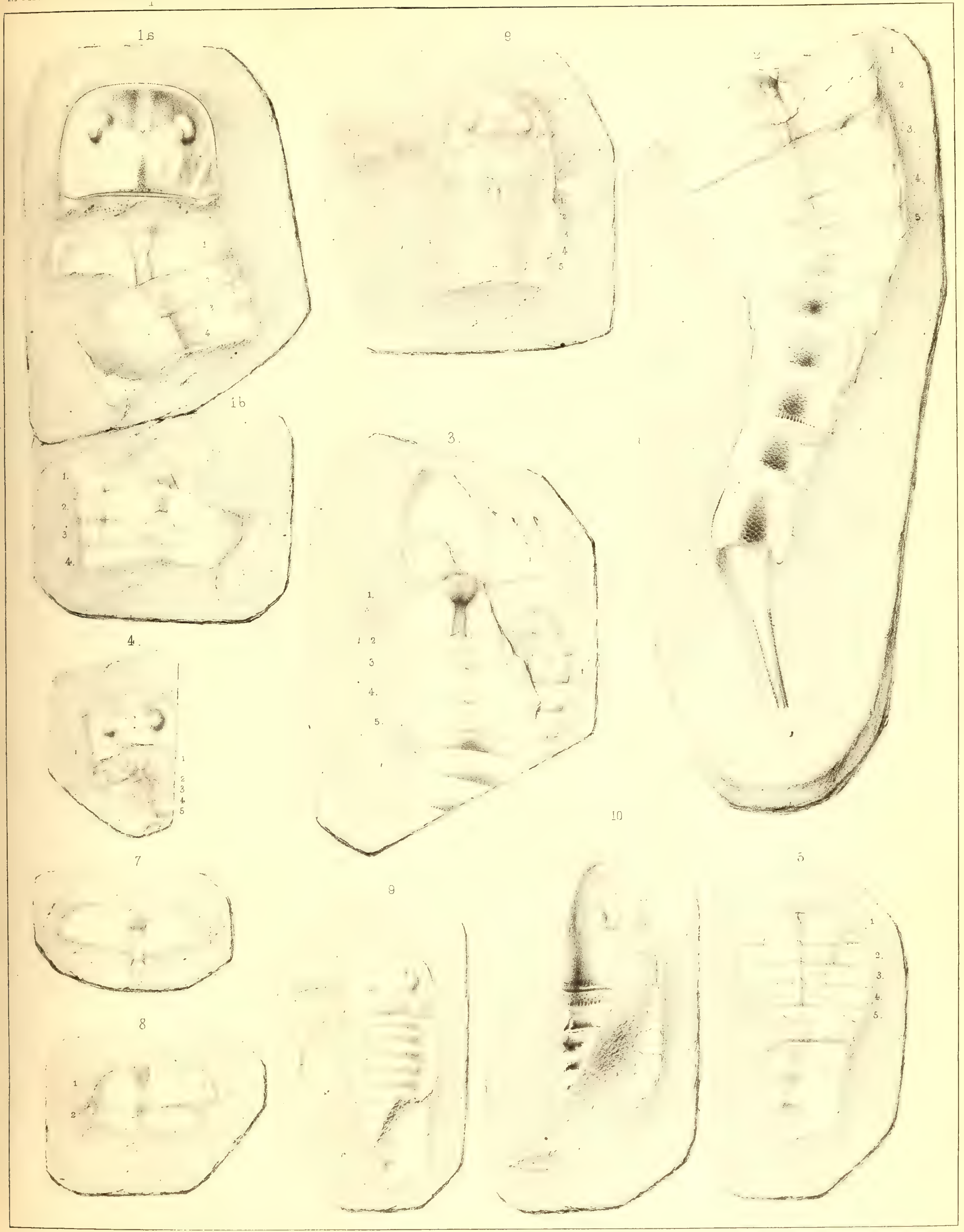
F. 6. (Oben in der Mitte, die Ziffer umgekehrt gestellt). Das grosse Fusspaar mit Metastoma, und die 5 Blattfüsse im Abdruck; der Medianzipfel des 1sten Blattfusses (Operculum) vollständig, mit allen 3 Gliedern, in natürlicher Lage. Coll. Volborth.

F. 7. Erster Blattfuss isolirt: das Endglied des Medianzipfels verzeichnet (die Spitzen divergirend statt parallel), daher wiederholt in schematischer Zeichnung in T. III *a*. F. 1 *f*. Mus. Reval.

F. 8. Der erste und zweite Blattfuss übereinander; der Medianzipfel des zweiten kräftiger als gewöhnlich. Museum Reval.

F. 9. Kopf und Thorax von oben; die Thoraxglieder mit natürlichem Relief, in der Mitte angeschwollen, an den Seiten ausgeschweift. Seitlich links die hervorgepressten Enden der Blattfüssen sichtbar; doch sind ihre im Versehn 6 statt 5 angegeben. Coll. Volborth.

F. 10. Seitlich durchgebrochenes Exemplar, das die natürliche Dicke und die stärkere Wölbung der Unterseite zeigt. Auf der Bauchseite die übereinandergeschobenen Blattfüsse zu sehn. Auf der Rückenseite bei diesem Exemplar die Articulation der Thoraxglieder deutlich, wonach auch die schematische Darstellung in T. III *a*, F. 1 *c* gemacht ist. Coll. Volborth.



R. Koch del.

Lith. Jvanson St. Petersburg
Peterb. S. Gros. Prosp. №1.

Tafel III.

Eurypterus Fischeri Eichw. von Rootziküll (Natürliche Grösse, wo nichts anders bemerkt wird).

F. 1. Schön erhaltenes Exemplar mit der Unterseite des Kopfes und Thorax. Sämmtliche Grundglieder der 5 Fusspaare sind zu sehn, und zwischen denen des ersten Paars erkennt man die feinen Antennen, die in F. 1 *a* (unter *a*) vergrössert dargestellt sind. Auch die 5 Blattfüsse sind vorhanden, der Medianzipfel des ersten aber nur rudimentär. Mit 7, 8, 9, 10 sind die entsprechenden Abdominalringe bezeichnet. Mus. Reval.

F. 2. Ein Kopf von der Unterseite mit allen 5 Fusspaaren jederseits; die ersten 3 Paare sind eingezogen. Beim 4ten Paar ist auf der rechten Seite das 4te Glied gegenüber dem kurzen dritten zu plötzlich verschmälert. Das 5te Fusspaar ist ganz vollständig, mit allen 9 Gliedern. Durch theilweises Fehlen des Metastoma tritt auch die feine Zähnelung am innern Winkel des Grundgliedes hinter dem grossen Zahn hervor. Mus. Reval.

F. 3. Ein Kopf von der Unterseite mit den Grundgliedern aller Fusspaare, an denen die Zähne meist erkennbar sind und die auch deutliche Schuppenzeichnung zeigen. Der innere Umschlag des vordern Kopfrandes ist in 3 *a* vergrössert, um die feinwellige Zeichnung zu zeigen. Mus. Reval.

F. 4. Ein Theil der Unterseite des Kopfes mit einigen Grundgliedern. Das Grundglied des 4ten Fusspaars ist gut zu sehn, mit den Zähnen und der Crista, an die sich der Vorderrand des Grundgliedes des grossen Fusspaars anlegt: an diesem die feinen Zähne gut zu sehn. Das Metastoma zum Theil abgetragen; der obere Rand zeigt eine Ausbuchtung. Mus. Reval.

F. 5. Kopf mit Thorax von oben. Das Kopfschild ist abgesprengt und man sieht die 5 Fusspaare von oben; die vordern sind eingezogen. Das Grundglied des 3ten Paares ist auf der rechten Seite ziemlich vollständig zu erkennen. Auf der linken Seite sieht man den Ansatz der schmalen, ringförmigen 2ten und 3ten Glieder an die Grundglieder des 4ten und 5ten Fusspaars. Coll. Volborth.

F. 6. Ein Theil des abgesprengten Kopfschildes der vorigen Figur von unten gesehn. Man erkennt links die vordere Aussenecke des Grundgliedes des 4ten Fusspaars mit ihrem zipfelartigen am Grunde eingeschnittenen Vorsprung, an den sich links das 2te und 3te Glied ansetzen; das 2te Glied mit stielförmigem Fortsatz. Rechts Kauzähne des Grundgliedes des 3ten Paares zu erkennen. Ebenda.

F. 7. Grundglieder des 5ten (grossen) Fusspaars von oben gesehn; der beiderseitige Innenrand schiebt sich über das Metastoma. Die Zähne am innern vordern Winkel und die Grundglieder der vordern Fusspaare verzeichnet (sie müssten sich über das Grundglied des 5ten Paars schieben) und daher die Figur auf T. IV *a*, F. 7 *a* wiederholt. Man erkennt bei unsrer Figur den Ansatz des ersten Blattfusses über dem hintern Ende der 5ten Grundglieder und des Metastoma. Mus. Reval.

F. 8. Theil des Kopfumschlags mit Wellenzeichnung und Grundglied des grossen Fusspaars in situ, mit dem am Grunde eingeschnittenen Gelenkzipfel und dem 2ten kurzen Gliede, das deutlich den stielförmigen Gelenkfortsatz zeigt. Coll. Volborth.

F. 9. Theile des 4ten und 5ten Fusspaars eines sehr grossen Exemplars. Vom 4ten Fusspaar sind das 2te bis 4te Glied vollständig; vom 5ten das 1ste bis 4te. Man sieht den Gelenkzipfel durch eine Furche gesondert und die feinen 6 Zähne (die nach hinten kleiner werden) am vordern und innern Winkel. Der grosse stumpfe Zahn ist nicht zu erkennen. Mus. Reval.

F. 10. Theil eines Kopfschildes von unten mit Partien des 3, 4 (von diesen 7 Glieder zu sehn) und 5ten Fusspaars. Die Spitze des 3ten Paares erscheint büschelig durch die eingelenkten Stacheln der kurzen Endglieder. Mus. Reval.

F. 11. Kopf von oben mit hervorragenden Enden des 2ten und 3ten Fusspaars. Mus. Reval.

F. 12. Kopf von oben mit sehr vollständigem 4ten Fuss, mit 3 theiliger Spitze und 2—8ten Gliede. Coll. Volborth.

F. 13. Kopf von oben, ebenfalls mit 3 spitzigem Endgliede (die mittelste Spitze eingelenkt) des 4ten Fusspaars; auch die Endigung des 3ten Fusses zu erkennen. Coll. Volborth.

F. 14. Ein einzelner Fuss, wohl dem 2ten Paar angehörig, 7gliedrig, mit freiem Endstachel und eingelenkten Seitenstacheln, am Grundglied fehlt der innere Theil mit den Zähnen. Schuppenzeichnung auf verschiedenen Gliedern zu erkennen. Mus. Reval.

F. 15. Endglieder des 2ten oder 3ten Fusspaars (vergrössert); das vorletzte Glied mit zwei Spitzen vorn, zwischen denen das längere pfriemenförmige Endglied eingelenkt ist. Mus. Reval.

F. 16. Ein Paar Endglieder eines der vordern Füsse mit Seitenstacheln, an deren einem zu sehn war, dass er auf der einen Seite eine Hohlkehle zeigt, auf der andern aber convex ist. Die Zeichnung ist nicht gelungen. Mus. Reval.

F. 17. Kopf und Thorax eines schönen Exemplars, an dem beiderseits der dritte Fuss mit seinen büschelig angeordneten Seitenstacheln gut zu sehn ist. Auf der rechten Seite auch der grosse Ruderfuss sehr schön. Mus. Reval.

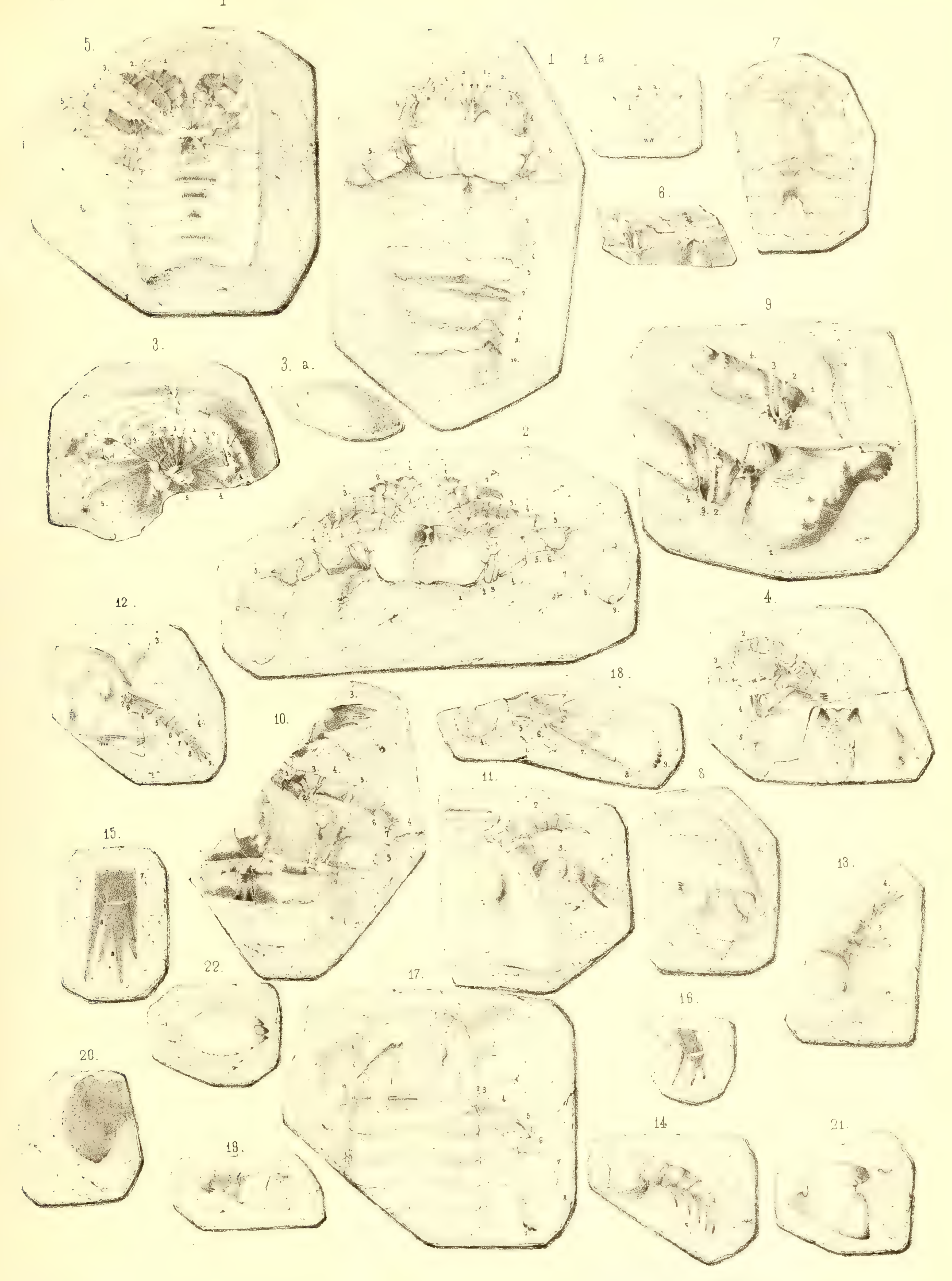
F. 18. Ein Ruderfuss vom 4ten Gliede an, besonders dargestellt. Mus. Reval.

F. 19. Das 5te bis 7te Glied eines Ruderfusses mit Zähnelung am distalen Ende des 5ten Gliedes. Museum Reval.

F. 20. Das 7te und 8te Glied des Ruderfusses im Zusammenhange. Das 8te Glied unter die Dreieckplatte des 7ten geschoben. Coll. Volborth.

F. 21. Das 7te Glied isolirt. Coll. Volborth.

F. 22. Das 8te Glied isolirt, mit dem eingelenkten Endgliede. Coll. Volborth.



R. Koch. del.

Lith. Ch. Jvanson. Peterb. Seite. G. Prosp. St Petersburg Nº1.

Tafel III *a*.

F. 1—14. *Eurygterus Fischeri* Eichw., F. 15 *E. Fischeri* var. *rectangularis*, F. 16 *E. laticeps* n. sp.

F. 1 *a—f*. Restaurirte Darstellung des *E. Fischeri*. Da alle Einzelheiten vorhanden waren und nichts zu ergänzen war, so konnte eine so vollständige Restauration gegeben werden. Dennoch haben sich ein paar kleine Ungenauigkeiten eingeschlichen. In F. 1 *b* ist der Gelenkzipfel des Grundgliedes vom 4ten Fusspaar zu spitz und zu nahe an den Rand gerathen; auch ist das 4te Fussglied, sowohl beim 4ten als 5ten Fusspaar im Grunde etwas zu schmal. S. T. III, F. 9 und 10 für die richtigen Verhältnisse.

F. 1 *a* ist die Ober- und 1 *b* die Unterseite. F. 1 *c* stellt einen Längsdurchschnitt durch das ganze Thier vor, in dieser Figur ist mit *a* der Kopf mit *b* das Metastoma bezeichnet. Im Uebrigen gelten die Zahlen für alle drei Figuren. Die Zahlen 1—12 bedeuten die Leibesglieder; I—V die Blattfüsse der Unterseite. Am Kopf sind die Kaufüsse mit 1′ bis 5′ bezeichnet und deren einzelne Glieder wieder mit 1—9.

F. 1 *d* stellt einen Querschnitt in der Gegend des 3ten Leibesgliedes vor, dessen Seitenumschlag zu sehn ist. Auf der Bauchseite sind die Blattfüsse II und III (fälschlich 2 und 3 bezeichnet) im Durchschnitt zu sehn (S. F. 1 *c*). F. 1 *e* ist der Querschnitt eines der Abdominalglieder.

F. 1 *f* ist eine Wiederholung der F. 7 auf T. II und enthält zugleich die Bezeichnung der Felder (S. 57) des ersten Blattfusses oder Operculum. a_1 bis a_4 sind die Glieder des Medianzipfels; b_1 und b_2 die Glieder der Seitenlappen; *c* die ovalen Felder, die auf einigen Exemplaren an den Seiten der Grundglieder des Medianzipfels auftreten.

F. 2 ein kleines und F. 3 ein grosses Grundglied des Ruderfusses. Nat. Grösse. Mus. Reval.

F. 4. Grundglied des 4ten Fusspaars mit den Zähnen, der Gelenkzipfel fehlt und ebenso ist der aussen sichtbare Theil des Grundgliedes nicht vollständig vorhanden und dargestellt (S. auch T. III, F. 4). Natürl. Grösse. Mus. Reval.

F. 5. Ende eines der ersten Fusspaare, vermuthlich des 3ten, mit gezahntem Distalrand der einzelnen Glieder. Nat. Grösse. Mus. Reval.

F. 6. Ansicht der Grundglieder und das Metastoma von oben nach Entfernung des Kopfschildes. Die Grundglieder des Ruderfusses schieben sich über die Seitenränder des Metastoma und zeigen nur den hintern vielzähnigen Theil ihrer Bezahnung. Die Grundglieder des 4ten Fusspaares schieben sich über die des 5ten sind aber in ihrem hintern Theil abgebrochen. Ebenso schiebt sich die Ansatzstelle des Operculum über das Metastoma und die Grundglieder des Ruderfusses. Es ist die verbesserte Darstellung von F. 7 auf T. III. Natürl. Grösse. Mus. Reval.

F. 7 und 8. Das Operculum oder der erste Blattfuss, in verschiedener Form seines Ansatzes und seiner Querfurchen. (S. 58) Nat. Grösse. Mus. Reval.

F. 9. Der 3te Blattfuss etwas vergrössert nach T. II, F. 2, um die Zeichnung deutlicher zu zeigen (S. 59).

F. 10. Die F. 3 auf T. II vergrössert wiederholt, um dem Seitenumschlag der dorsalen Thoraxglieder deutlicher zu zeigen. Der hintere Umschlag ist nur in der Mitte der Glieder und nicht auf diesen Seitenumschlägen zu sehn. Trotz der Correctur tritt er stellenweise hervor. Auf der linken Seite der Figur die Blattfüsse I bis IV.

F. 11. Die Blattfüsse I bis V von oben gesehn, dahinter das 7te Leibesglied, von oben etwas zusammengedrückt, als geschlossener Ring. Natürl. Grösse. Mus. Reval.

F. 12. Die 4 ersten dorsalen Thoraxglieder mit ihrer Schuppenzeichnung; am Hinterrand derselben der hintere Umschlag zu erkennen. Nat. Grösse. Mus. Reval.

F. 13. Das 12te Leibesglied von oben, mit aufwärts gewandter Gelenkfläche. Natürl. Grösse. Mus. Reval.

F. 14. Zwei Leibesenden mit dem Schwanzstachel. Auf der rechten Seite sind die hintern Lappen des 12ten Gliedes nicht so ausgeprägt wie gewöhnlich; auf der linken Seite ist der Schwanzstachel zusammengedrückt und dadurch verbreitert. Natürl. Grösse. Mus. Reval.

F. 15. *Eurypterus Fischeri* var. *rectangularis* (S. 62) mit den 3 ersten Fusspaaren an der rechten Seite. Natürl. Grösse. Mus. Reval.

F. 16. *Eurypterus laticeps* n. sp. (S. 63, auch T. VI, F. 6). Natürl. Grösse. Mus. Reval.

R. Hoch. del.

Lith. Ch. Ivanson. Peterb. Seite G. Prosp. №1 St. Petersburg.

Tafel IV.

Pterygotus osiliensis n. sp. von Rootziküll. Alles natürliche Grösse bis auf F. 10 (rechts).

F. 1. Der Kopf mit den Augen. Die Nebenaugen nicht angegeben; diese sind auf der restaurirten Figur (S. 72) nachgetragen. Die Hinterecken sind spitz (s. d. restaurirte Fig.), nicht abgerundet wie auf der Zeichnung. Mus. Reval.

F. 2. Das nämliche Stück von unten gesehn. Hinten die eingebogenen Seitenränder des Kopfes mit den facettirten Augen, und das Metastoma zu sehn. Vorn der vordere Umschlag des Kopfes, isolirt (S. 64, 71 s., auch das Epistoma bei Huxley und Salter l. c. T. I, F. 1 *a*).

F. 3. Seitenansicht eines grossen Kopfschildes mit einem Theil des Auges. Coll. Volborth.

F. 4. Zwei Scheeren. Mus. Reval.

F. 5. Eine einzelne Scheerenhälfte. Der eingebogene Endzahn richtig, die kleinern Zähne verzeichnet (s. T. VII, F. 7, 8). Coll. Volborth.

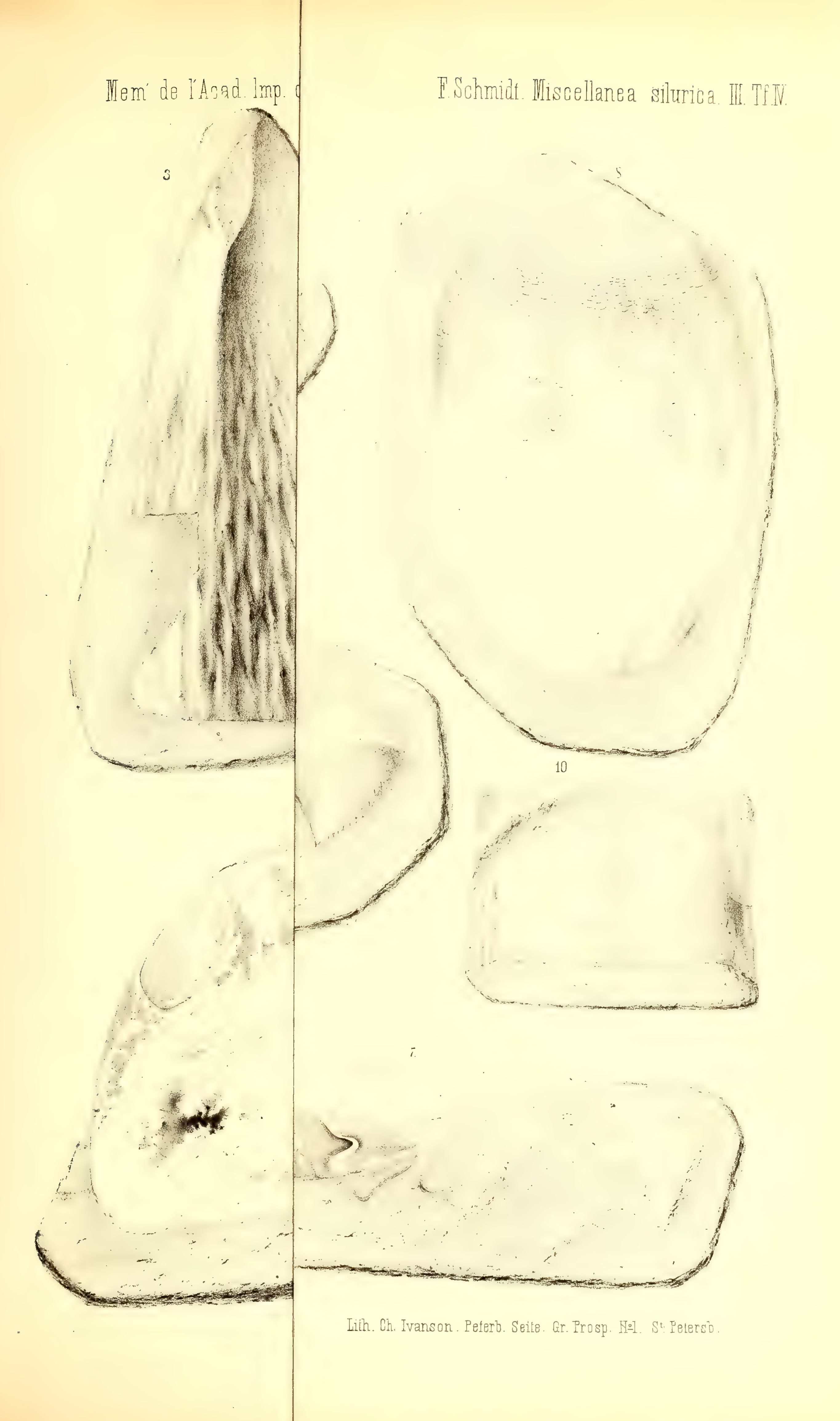
F. 6. Grundglied des grossen Fusspaars, nicht richtig gestellt (s. T. III *a*, F. 13, ein andres Exemplar, an dem auch der hier fehlende Einschnitt der Hinterseite zu sehn ist). Mus. Reval.

F. 7. Ein Ruderfuss. Man sieht einen Theil des Grundgliedes und das 4te bis 8te Fussglied. Am 6ten Gliede ist fälschlich noch ein zweiter Vorsprung am Proximalende angegeben und am 7ten ein Querriss, der irre führen kann (s. d. restaurirte Figur S. 72). Mus. Reval.

F. 8. Grosses Metastoma, mit starker regelmässiger Convexität der Seiten, vielleicht der var. *laticanda* angehörig (S. 76). Mus. Reval.

F. 9. Theil des Operculum oder ersten Blattfusses (s. T. V, F. 1 und S. 74, 78). Das Stück gehört zum linken Seitenlappen des Operculum. Der Einschnitt in den die pfeilförmige Basis des Mittelzipfels (s. T. V, F. 2) passt, ist am Hinterrande deutlich zu sehn. Mus. Reval.

F. 10. Ein Stück mit einem Blattfuss und den Seiten-Theilen zweier dorsaler Thoraxglieder; rechts von unten gesehn (in halber Grösse), links von der Seite in nat. Grösse. Die Zeichnung ist verfehlt und in F. 5 auf T. V *a* wiederholt.



Lith. Ch. Ivanson. Peterb. Seite. Gr. Prosp. №1. St. Petersb.



Lith. Ch. Ivanson Peterb. Seite Gr. Prosp №1 St Peterb

Tafel V.

Pterygotus osiliensis von Rootziküll. Alles natürliche Grösse.

F. 1. Operculum oder erster Blattfuss der untern Seite. Mus. Reval.

F. 2. Ein isolirter Medianzipfel desselben. Mus. Reval.

F. 3. Das grösste vorhandene dorsale Thoraxglied, mit dem hintern durch feine Poren durchbohrten Umschlage und gesägten Seitenrand, rechts. In F. 7 auf T. V *a* ist die linke Hälfte des Stücks wiederholt um die vordere Gelenkfläche und den Seitenumschlag zu zeigen. Mus. Reval.

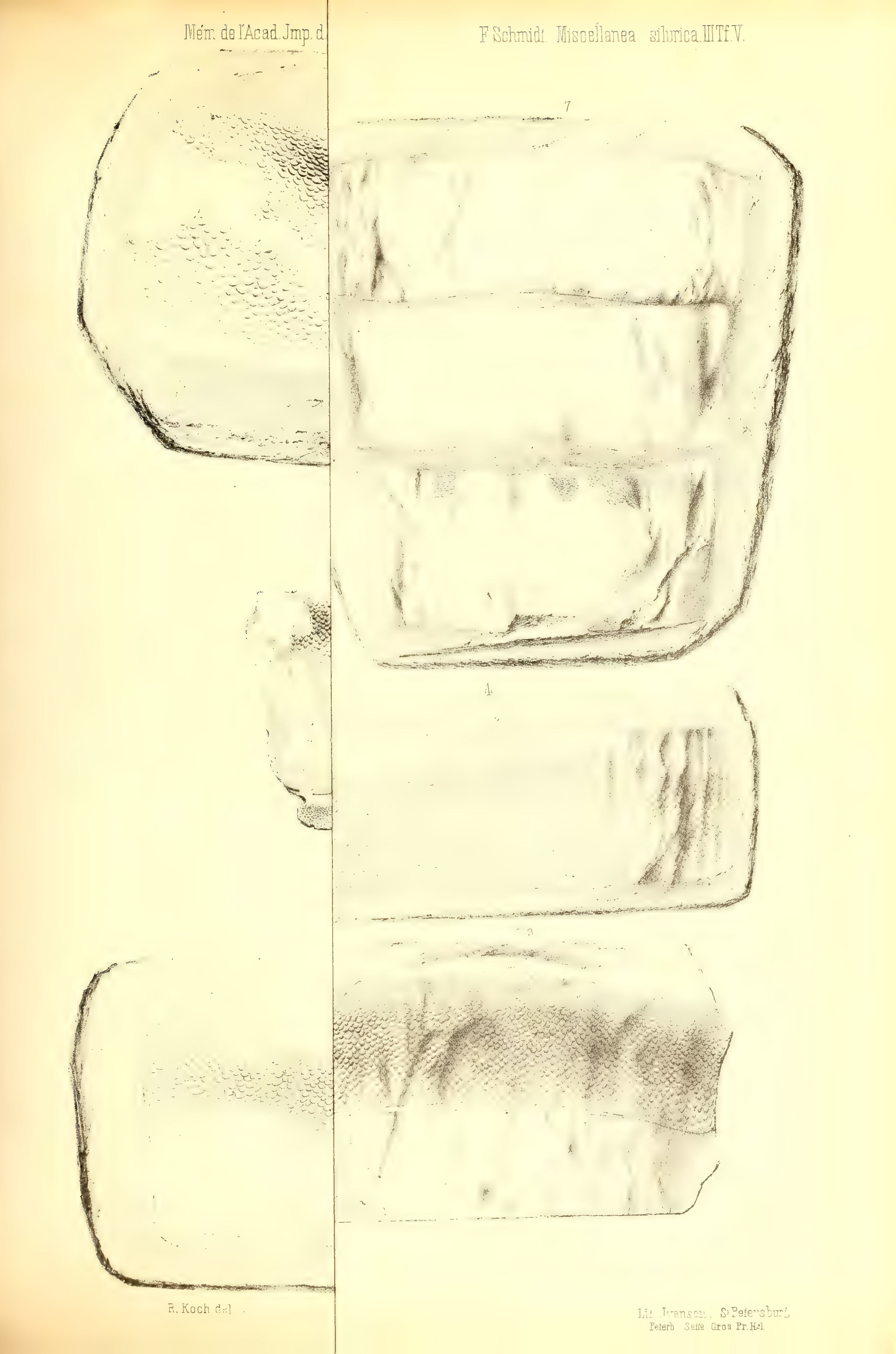
F. 4. Ein Thoraxglied (wahrscheinlich das 6te) mit abwärts gebogenen Seiten, von denen die rechte mit deutlich vorspringendem Ohr in T. V *a*, F. 6 besonders dargestellt ist. Mus. Reval.

F. 5. Ein zusammengedrücktes ringförmiges Abdominalglied (etwa das 7te oder 8te) von der vordern Gelenkfläche gesehn. Die rechte Spitze mit der Verbindungsbrücke der Ober- und Unterseite in F. 9 auf T. V *a* in einer Seitenansicht dargestellt. Mus. Reval.

F. 6 *a*, *b*. Das 7te und 8te (Abdominal-) Leibesglied von der Unterseite. Vorn sieht man einen Theil des Gelenkfortsatzes, der sich mit einem Falz an den Vorderrand ansetzt. Das nämliche Stück, von der Oberseite gesehn, ist am hintern Theil der F. 2 auf T. V *a* zu finden, mit der es zu einem Stück gehört. In F. 6 *b* ein Theil des vordern Gliedes vergrössert, um die Veränderung der Schuppen von vorn nach hinten zu zeigen. Am Hinterrande ein Stück des hintern Umschlags mit den feinen Poren und den Spuren von Gefässen die sich daran schliessen. Coll. Volborth.

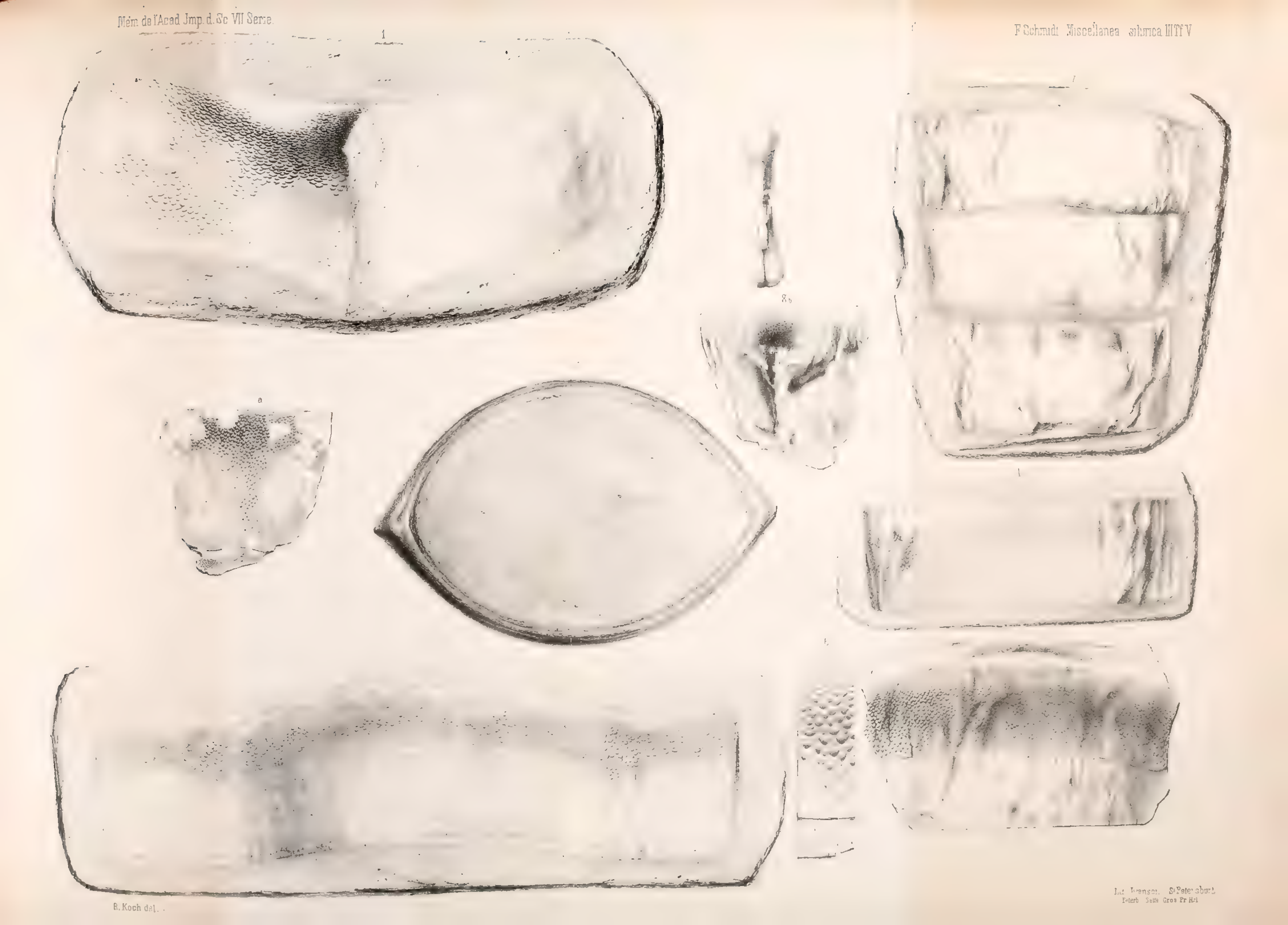
F. 7. Das 9, 10 und 11te (Abdominal-) Leibesglied von oben gesehn. Das 11te Glied mit dem vordern Gelenkfortsatz in F. 10 auf T. V *a* besonders dargestellt. Mus. Reval.

F. 8. Das 12te (Abdominal-) Leibesglied; *a* von unten, *b* von oben, mit Spur der Crista. Die Seitenränder abgebrochen, daher der Gesammtumriss nicht richtig. Am Hinterrande die Einfügungsstelle des Endgliedes zu erkennen, von dem ein Theil des Vorderrandes zu sehn ist. Coll. Volborth.



R. Koch del.

Lit. Ivanson. S:Petersburg
Peterb. Seite Gros Pr. H. 1



R. Koch del.

Lit. Iwanson, St Petersburg

Tafel V*a*.

F. 1—16. *Pterygotus osiliensis* von Rootziküll.

F. 1. Innerer Abdruck des Thorax von der Rückenseite, in halber Grösse. Die ersten beiden Glieder unvollständig erhalten. Das 4te und 5te vollständig in natürlicher Lage.

F. 2. Die Unterseite des Thorax von oben gesehn in halber Grôsse (S. 79) mit den 5 Blattfüssen (I, II, III, IV, V) und der Mediannath (*a* daneben vergrössert) am Blattfuss V; am hintern Ende ein Theil des 6ten dorsalen Thoraxgliedes von oben mit einem Stück des seitlichen Umschlags (*b*), und das 7te und 8te Leibesglied vollständig. Dieser hintere Theil des abgebildeten Exemplars ist in T. V, F. 6 von der Bauchseite dargestellt. Mus. Reval.

F. 3. Wahrscheinlich der zweite Blattfuss, mit medianer Furche, in welcher feinere Schuppenzeichnung sichtbar als auf der übrigen Platte (S. 68). Nat. Grösse. Mus. Reval.

F. 4. Zwei übereinandergeschobene Blattfüsse, wahrscheinlich der 4te und 5te. Dahinter das 7te (ringsgeschlossene) Leibesglied von der Bauchseite. In der Medianlinie der ersten die feine Nath zu erkennen. Halbe Grösse. Museum Reval. In F. 4 *a* ein Stück der Schaale des vordern Blattfusses vergrössert mit der innern porösen Membran, die vollkommen in ihrer Sructur dem hintern Umschlag der Leibesglieder entspricht. An einzelnen Poren sieht man noch die Anfänge der von ihnen ausgehenden Gefässe.

F. 5. Seitenansicht zweier abwärtsgebogener dorsaler Thoraxglieder (wohl d. 5te und 6te) mit dem Ohr an der Vorderecke des 1sten Gliedes. Ueber diese Glieder legt sich ein breiter Blattfuss (V) von fast gleicher Längenerstreckung wie die beiden Dorsalglieder zusammen. Es ist die Fig. 10 (rechts) T. IV verbessert. Halbe Grösse. Mus. Reval.

F. 6. Seitenansicht des in F. 4 auf T. V dargestellten dorsalen Thoraxgliedes mit vorspringendem Ohr: das Original befindet sich nicht in natûrlicher Lage, sondern ist an den Seiten abwärts gebogen. Nat. Grösse. Mus. Reval.

F. 7. Linke Hälfte des grossen Thoraxgliedes T. V, F. 3 um den Vorderrand mit dem mittlern Gelenkfortsatz und dem Fulcrum deutlicher zu zeigen; an der linken Seite (bei *a*) ist ein Theil des seitlichen Umschlags blosgelegt, die scheinbar nach aussen convexe Schuppenzeichnung stellt die äussern Bögen von nach hinten vorspringenden Schuppen vor. Natürl. Grösse. Mus. Reval.

F. 8. Theil eines andern Thoraxgliedes, in natürlicher Grösse, an dem man rechts den Seitenumschlag erkennt mit Abdrücken polygonaler Randschwielen wie auf T. VI, F. 4. Links davon sieht man den doppelten hintern porenführenden Umschlag, der in F. 8 *a* vergrössert dargestellt, sowohl diesen Umschlag des dorsalen Thoraxgliedes selbst als den von dessen Seitenumschlag erkennen lässt. Auch Spuren von Gefässen sind zu erkennen, die zu den feinen Poren führen. In F. 8 *a* sind 4 Schichten zu unterscheiden: die obere Schaale ist mit *m* bezeichnet, ihr Umschlag mit *n*, der hintere poröse Umschlag des Seitenumschlags mit *o* und dieser Seitenumschlag selbst mit *p*. Mus. Reval.

F. 9. Seitenansicht der rechten Spitze des auf T. V, F. 5 dargestellten, niedergedrückten abdominalen Ringgliedes um die convexe Brücke zu zeigen, welche die obere Seite mit der untern verbindet. Nat. Grösse. Mus. Reval.

F. 10. Das Hinterste von den auf T. V, F. 7 dargestellten Abdominalgliedern, das ich nach dem Verhältniss der Länge zur Breite als 11tes Leibesglied erkenne. Am Vorderrande ist die Gelenkfalz mit der vorspringenden quergestreiften Gelenklamelle zu erkennen, die nicht bis zu den vorspringenden Vorderecken fortsetzt. Im 10 *a* Längsdurchschnitt, um die Einfügung der Glieder zu zeigen. Nat. Grösse. Mus. Reval.

F. 11. Ein kleineres 11tes Glied, von oben (*a*) und von unten (*b*). Natürl. Grösse. Mus. Reval.

F. 12. Nahezu vollständiges Exemplar des 12ten Leibesgliedes in natürlicher Grösse, von oben gesehn, mit Andeutung der Crista. Coll. Volborth.

F. 13. Ein Grundglied des grossen Ruder-Fusspaars in natürlicher Stellung und Grösse mit dem Einschnitt an der hintern Seite: dient zur Ergänzung der F. 6 auf T. IV. Coll. Volborth.

F. 14. Theil des Grundgliedes eines grossen Ruderfusses mit den nächsten drei Fussgliedern (2, 3, 4) und der Basis des 5ten Gliedes, der Gelenkfortsatz des 2ten Gliedes mit dem es im Grundgliede artikulirt, ist freigelegt. Nat. Grösse. Coll. Volborth.

F. 15. Theil eines Ruderfusses der andern Seite mit dem 2ten bis 6ten Fussgliede. Nat. Grösse. Mus. Reval.

F. 16 *a*. Vergrösserte Darstellung der Membran der Innenseite des Metastoma T. IV, F. 2 mit erkennbarer Schuppenzeichnung und Poren; zugleich ist ein Stück der Aussenseite mit Schuppenzeichnung zu sehn. F. 16 *b*. Stück einer Umschlagsmembran stärker vergrössert, um die Form und Vertheilung der Poren zu zeigen. Mus. Reval.

F. 17—24. Nachträge zu den russischen Leperditien. Alles natürliche Grösse.

F. 17 *a*, *b*, *c*. Rechte Schaale der *Leperditia Lindströmi* n. sp. (S. 85) von Cap. Grebennyi auf der Waigatsch Insel. Von oben (*a*), von der Bauchseite (*b*) und im Durchschnitt von der Rücken- zur Bauchseite (*c*). Stockholmer Museum.

F. 18 *a*, *b*, *c*. Linke Schaale derselben Art ebendaher, mit den nämlichen Ansichten. In *b* der Umschlag zu sehn.

F. 19 *a*, *b*. Stück eines hintern Vorsprungs der linken Schaale derselben Art ebendaher. Von oben (*a*) und von der Bauchseite (*b*).

F. 20. Stück der Oberfläche der linken Schaale derselben Art ebendaher, um das Auge und den Mittelfleck zu zeigen.

F. 21 und 22 *a*, *b*, *c*. Zwei unvollständige Stücke der var. *mutica* m. von *Leperditia Lindströmi* (S. 86) von Cap. Grebennyi, in denselben Ansichten wie F. 18. Stockholm. Mus.

F. 23 *a*, *b*. *Leperditia Mölleri* m. (S. 23 und 24). Grosses Exemplar von Kaginski Sawod an der Belaja. Verbesserte Darstellung der Fig. 25 auf T. I, mit Hinzufügung der Ansicht (*b*) von der Bauchseite. Mus. des Berginstituts.

F. 24. Ansicht von der Bauchseite einer linken Schaale vom Zusammenfluss der Flüsse Bia und Bolotnaja unterhalb Ailina (S. 88) zur Ergänzung der F. 24 auf T. I. Museum des Berginstituts.

15

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8.

2

16 b

b 6 7 8

a

9

a 17 b c

a 18 b c

20

a. 19 b

a 21. b c

a 22 b c

23 a b.

24

R. Koch del.

Lith. Ch. Ivanson. Peterb. Seite Gr. Prosp. No 1. St. Petersburg.

R Koch del

Lith Ch Ivanson Peterb Seite Gr Prosp h 1 S. Petersburg

Tafel VI.

Pterygotus osiliensis F. 1—5; *Eurypterus laticeps* n. sp. F. 6; *E Fischeri* F. 7; *Ceratiocaris Nötlingi* n. sp. F. 8, 9. Alles natürliche Grösse. Von Rootziküll.

F. 1. Wohlerhaltenes Schwanzschild von *Pterygotus osiliensis* m. von der untern Seite. Mus. Reval.

F. 2. Stück eines grösseren Exemplars desselben im innern Abdruck der Oberseite mit dem Kiel, der vorn deutlich zu erkennen ist. Mus. Reval.

F. 3. Unterseite des Schwanzschildes der var. *laticanda* (S. 81). Mus. Reval.

F. 4. Stück von dem Seitentheil eines Schwanzschildes von unten, mit wohlerhaltenem Rande, der dunkle polygonale Schwielen zeigt. Der Abdruck der Oberseite, mit Schuppenzeichnung, ist links zu sehn. Coll. Volborth.

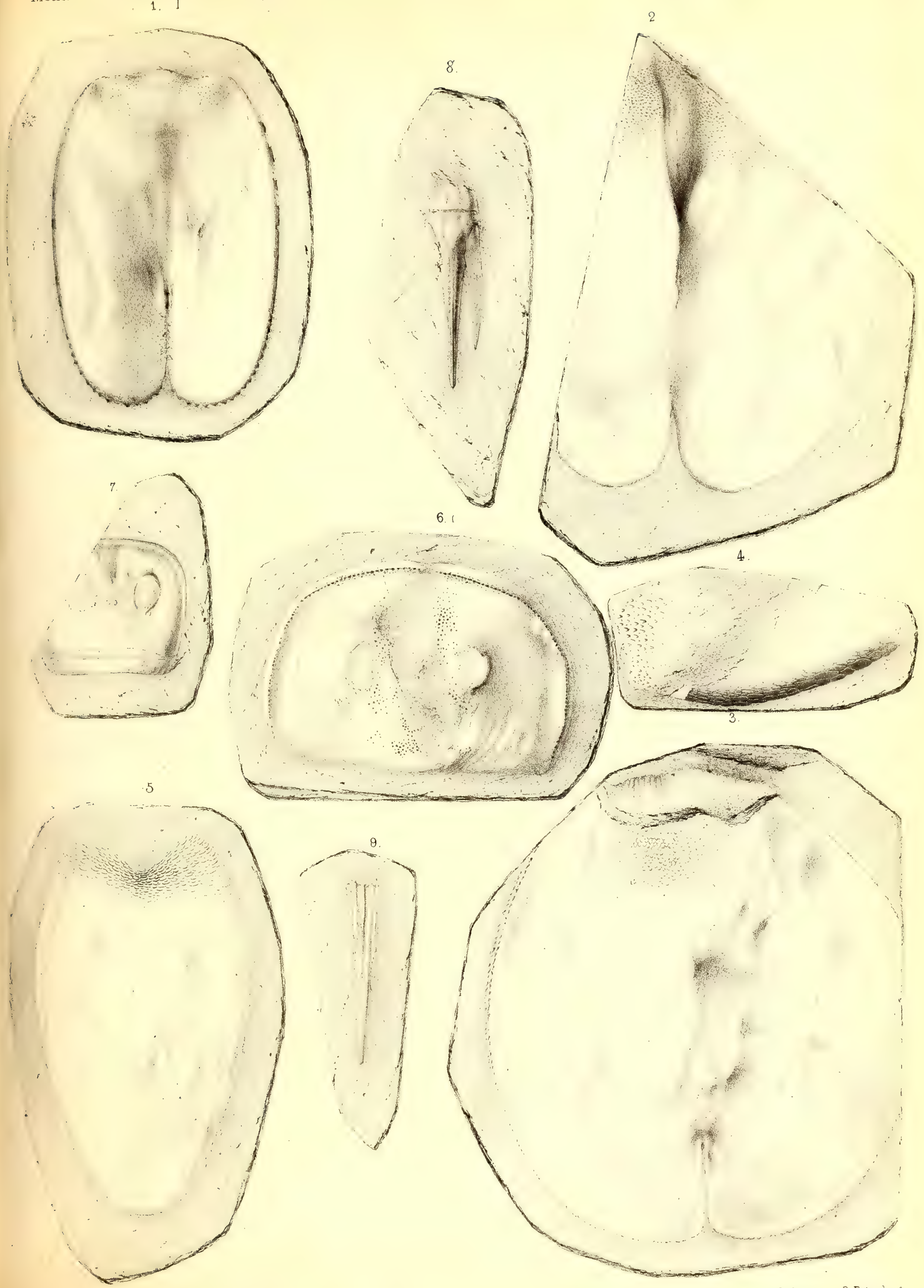
F. 5. Metastoma von der kleinern, typischen Form. Museum Reval.

F. 6. Kopf des *Eurypterus laticeps* m. (S. 63 s. auch T. III *a*, F. 16). Mus. Reval.

F. 7. Kopf von *Eurypterus Fischeri* Eichw. Die rechte Hinterecke herabgebogen, wodurch der ganze Kopf ein fremdartiges, nach hinten verkürztes Ansehn erhält. Es ist aber durchaus nichts Eigenthümliches an ihm und er verdiente nicht abgebildet zu werden. Mus. Reval.

F. 8. Schwanzstachel von *Ceratiocaris Nötlingi* m. (S. 84) mit zwei seitlichen Anhängen. Coll. Volborth.

F. 9. Ein grösserer Mittelstachel allein. Mus. Reval.


1.
2
8.
7.
6.
4.
3.
5
9.
Koch del.
Lith. Jvanson. St Petersburg
петерб. ст. 6. пр. №1.

Tafel VII.

Bunodes lunula Eichw. F. 1—6; *Pterygotus osiliensis* F. 7—10; *Ceratiocaris Nötlingi* m. F. 12. Bis auf die verkleinerte F. 10. Alles natürliche Grösse. Von Rootziküll.

F. 1 und 2 ganze Exemplare des *Bunodes lunula* var. *Schrencki* m. (S. 43). Mus. Reval.

F. 3. Rumpfglieder derselben Art und Varietät; die F. 43 auf T. I verbessert wiederholt. Coll. Volborth.

F. 4, 5, 6. Köpfe des typischen *Bunodes lunula* Eichw. mit erkennbaren Gesichtsnäthen. Mus. Reval.

F. 7. *Pterygotus osiliensis* m. Abdruck eines grossen Scheerengliedes. Am Grunde der Zähne sieht man Mündungen von zu ihnen gehörigen Gefässkanälen. Mus. Reval.

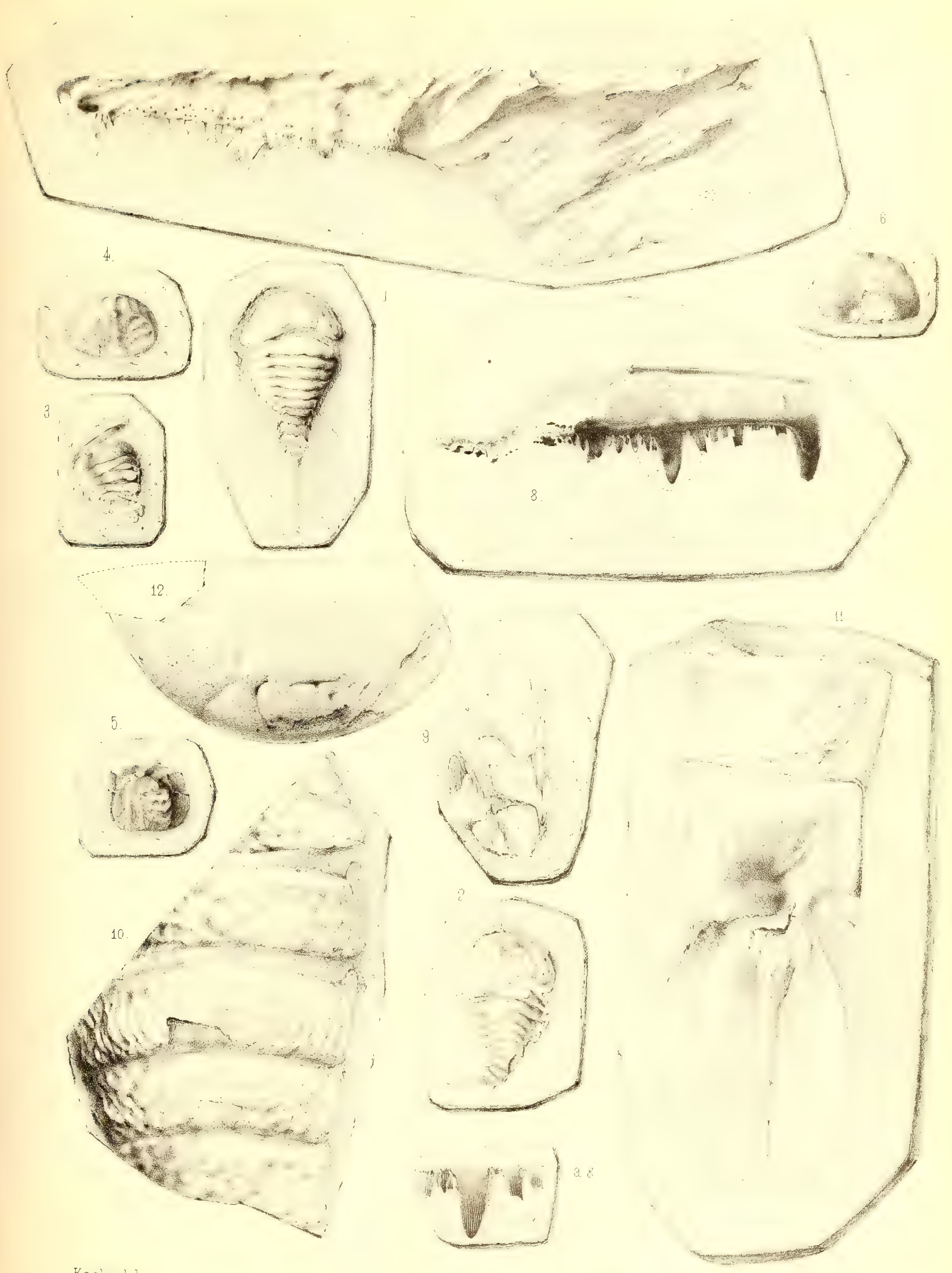
F. 8. Theil eines Scheerengliedes derselben Art mit erhaltener Sculptur der Zähne; in F. 8 *a* ein paar Zähne vergrössert um die Dichotomie der Rippen auf denselben zu zeigen. Mus. Reval.

F. 9. Theile von vordern Kaufüssen, mit eingelenkten Stacheln. Ob von *Pterygotus osiliensis*? Mus. Reval.

F. 10. Theil des Thorax eines grossen Exemplars von *Pterygotus osiliensis* in halber Grösse. Vorn noch eine Ecke des Kopfschildes zu sehn, denn folgen die 5 ersten Leibesglieder, die etwas untereinander verschoben sind. Die Ohren an den rechten Vorderecken gut zu sehn. Sonst die Zeichnung nicht gut gelungen. Mus. Reval.

F. 11. Ein Schwanzschild des *P. osiliensis* in Zusammenhang mit dem 11 und 12ten Leibesgliede. Abdruck der Unterseite. Mus. Reval.

F. 12. Rückenseite von *Ceratiocaris Nötlingi* n. sp. (S. 84). Vordere Spitze abgebrochen. Mus. Reval.



Koch del.

Lith. Ch. Ivanson ...

INHALT.

Ouvrages paléontologiques publiés dans la VII. Série des Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences:

T. VI, № 2. **Volborth, A. v.** Ueber die mit glatten Rumpfgliedern versehenen russischen Trilobiten, nebst einem Anhange über die Bewegungsorgane und über das Herz derselben. 1863. Mit 4 lith. Taf. Pr. 80 K. = 2 Mk. 70 Pf.

T. VIII, № 9. **Volborth, A. v** Ueber einige neue Ehstländische Illaenen. 1864. Mit 2 lith. Taf. Pr. 35 K. = 1 Mk. 20 Pf.

T. XVI, № 2. **Volborth, A. v.** Ueber Achradocystites und Cystoblastus, zwei neue Crinoideen-Gattungen, eingeleitet durch kritische Betrachtungen über die Organe der Cystideen. 1870. Mit 1 lith. Taf. Pr. 30 K. = 1 Mk.

№ 11. **Brandt, A.** Ueber fossile Medusen. 1871. Mit 2 Taf. Pr. 45 K = 1 Mk. 50 Pf.

T. XIX, № 3. **Schmidt, F.** Ueber die Petrefacten der Kreideformation von der Insel Sachalin. 1873. Mit 8 Taf. Abbildungen. Pr. 1 R. 10 K. = 3 Mk. 70 Pf.

T. XXI, № 2. **Schmidt, F.** Miscellanea Silurica. I. Ueber die russischen silurischen Leperditien, mit Hinzuziehung einiger Arten aus den Nachbarländern. 1873. Mit 1 Taf. Pr. 35 K. = 1 Mk. 20 Pf.

№ 11. **Schmidt, F.** Miscellanea Silurica. II. Ueber einige neue und wenig bekannte baltisch-silurische Petrefacten. 1874. Mit 4 Taf. Abbildungen. Pr. 80 K. =2 Mk 70 Pf.

T. XXII, № 12. **Heer, O.** Beiträge zur Jura-Flora Ostsibiriens und des Amurlandes. 1876. Mit 31 Taf. Pr. 5 R. 50 K. = 18 Mk. 30 Pf.

T. XXIV, № 8. **Pahlen, A. v. d.** Monographie der baltisch-silurischen Arten der Brachiopoden-Gattung Orthisina. 1877. Avec 4 pl. Pr. 80 K. = 2 Mk. 70 Pf.

T. XXV, № 6. **Heer, O.** Beiträge zur fossilen Flora Sibiriens und des Amurlandes. 1878. Avec. 15 pl. Pr. 3 R. 20 K. = 10 Mk. 70 Pf.

№ 7. **Heer, O.** Primitiae florae fossilis Sachalinensis. — Miocäne Flora der Insle Sachalin 1878. Avec 15 pl. Pr. 3 R. 20 K. = 10 Mk. 70 Pf.

№ 9. **Möller, V. v.** Die spiral-gewundenen Foraminiferen des russischen Kohlenkalks. 1878. Avec 15 pl. Pr. 2 R. 50 K. = 8 Mk. 30 Pf.

T. XXVII, № 4. **Schmalhausen, J.** Beiträge zur Jura-Flora Russlands. 1879. Avec 16 pl. Pr. 2 R. 20 K. = 7 Mk. 30 Pf.

№ 5. **Möller, V. v.** Die Foraminiferen des russischen Kohlenkalks. 1879. Avec 7 pl. Pr. 1 R. 70 K. = 5 Mk. 70 Pf.

№ 10. **Heer, Prof. Dr. Osw.** Nachträge zur Jura-Flora Sibiriens gegründet auf die von Herrn Richard Maak in Ust-Balei gesammelten Pflanzen. 1880. Mit 9 Tafeln. Pr. 1 R. 30 K. = 4 Mk. 30 Pf.

T. XXVIII, № 5. **Nikitin, S.** Die Jura-Ablagerungen zwischen Rybinsk, Mologa und Myschkin an der oberen Wolga. 1881. Mit 7 Tafeln. Pr. 1 R. 40 K. = 4 Mk. 70 Pf.

№ 8. **Kiprijanoff, W.** Studien über die fossilen Reptilien Russlands. I. Theil. Gattung Ichthyosaurus König aus dem Severischen Sandstein oder Osteolith der Kreide-Gruppe. 1881. Mit 19 Tafeln. Pr. 2 R. 45 K. = 8 Mk. 20 Pf.

T. XXX, № 1. **Schmidt, F.** Revision der ostbaltischen silurischen Trilobiten nebst geognostischer Uebersicht des ostbaltischen Silurgebiets. Abtheilung I. Phacopiden, Cheiruriden und Encrinuriden. 1881. Mit 16 Tafeln. Pr. 4 R. 50 K. = 15 Mk.

№ 6. **Kiprijanoff, W.** Studien über die fossilen Reptilien Russlands. II. Theil. Gattung Plesiosaurus Conybeare aus dem Sewerischen Sandstein oder Osteolith der Kreide-Gruppe. 1882. Mit 19 Tafeln. Pr. 2 R. = 6 Mk. 70 Pf.

Imprimé par ordre de l'Académie Impériale des sciences.

Mai, 1883. C. Vessélofski, Secrétaire perpétuel.

Imprimerie de l'Académie Impériale des sciences.
(Wass.-Ostrow., 9 ligne, № 12.)

MÉMOIRES
DE
L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES DE ST.-PÉTERSBOURG, VIIE SÉRIE.
Tome XXXI, N° 6.

STUDIEN

ÜBER DIE

FOSSILEN REPTILIEN RUSSLANDS.

VON

W. Kiprijanow.

III. THEIL.

GRUPPE THAUMATOSAURIA N.

AUS DER KREIDE-FORMATION UND DEM MOSKAUER JURA.

Mit 21 Tafeln.

(*Lu le 1 mars 1883.*)

ST.-PÉTERSBOURG, 1883.

Commissionnaires de l'Académie Impériale des sciences:

à St.-Pétersbourg:	à Riga:	à Leipzig:
MM. Eggers et Cie et J. Glasounof;	M. N. Kymmel;	Voss' Sortiment (G. Haessel).

Prix: 2 Rbl. 25 Kop. = 7 Mrk. 50 Pf.

MÉMOIRES
DE
L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES DE ST.-PÉTERSBOURG, VII[E] SÉRIE.
Tome XXXI, N° 6.

STUDIEN
ÜBER DIE
FOSSILEN REPTILIEN RUSSLANDS.

VON

W. Kiprijanow.

III. THEIL.

GRUPPE THAUMATOSAURIA N.

AUS DER KREIDE-FORMATION UND DEM MOSKAUER JURA.

Mit 21 Tafeln.

(*Lu le 1 mars 1883.*)

St.-PÉTERSBOURG, 1883.

Commissionnaires de l'Académie Impériale des sciences:

à St.-Pétersbourg: MM. Eggers & C[ie] et J. Glasounof; à Riga: M. N. Kymmel; à Leipzig: Voss' Sortiment (G. Haessel).

Prix: 2 Rbl. 25 Kop. = 7 Mrk. 50 Pf.

Imprimé par ordre de l'Académie Impériale des sciences.
Mai, 1883. C. Vessélofsky, Secrétaire perpétuel.

Imprimerie de l'Académie Impériale des sciences.
(Vass.-Ostr., 9 ligne, № 12.)

Inhalt.

Gruppe Thaumatosauria n.

In der dritten Ergänzung zur Monographie der *Pterosauria* und *Sauropterygia* (vergl. Palaeont. Soc. 1860) entschliesst sich Professor R. Owen, in Folge seiner Untersuchungen eines Theiles des Schädels nebst einem Zahne und des Centrums dreier Halswirbel der Gattung *Polyptychodon*, diese Gattung von der Ordnung der Krokodile abzusondern und sie zu derjenigen der *Sauropterygia* Ow. hinzuzuzählen.

Solch' eine Abänderung war höchst nothwendig, weil Vieles nicht allein darauf deutet, dass der Polyptychodon ohne Zweifel ein zur Gruppe des Plesiosaurus gehöriges Thier war, sondern auch darauf, dass diese Gattung in der Kreide-Periode gerade Nachfolger der Jura-Pliosauren vorstellte.

Ungeachtet der zweifellosen Verwandtschaft zwischen Pliosaurus, Polyptychodon und noch einiger anderer Gattungen mit dem Plesiosaurus, weshalb man sie mit Recht zur Sauropterygia-Gruppe gezählt hat, muss man doch gestehen, dass der Bau des Gerippes dieser Thiere noch nicht hinreichend festgestellt ist, um sie zur allgemeinen Gruppe der *Placocrania* Carus zu verbinden (vergl. J. V. Carus Zoologie 1875, Band I, Seite 412) und wäre es richtiger, aus solchen Gattungen, in der Abtheilung der *Sauropterygia* Ow. eine vom Plesiosaurus abgesonderte Gruppe Thaumatosauria zu bilden.

Sollte die auf Taf. XII, Fig. 1 und 2 dargestellte und die Zähne enthaltende Masse zum Kreide-Boden oder zum Grünsand gehört haben, so müssten diese Zähne, nach den bis jetzt bekannten Hinweisen, zur Gattung Polyptychodon gezählt werden. Das darf man jedoch nicht zulassen, weil diese Masse aus der obern, durch *Ammonites Virgatus* Buch charakterisirten Schicht des Moskauer Jura stammt und die in ihr eingebetteten Zähne, sowie die übrigen, gleichzeitig gefundenen, Ueberreste am meisten Aehnlichkeit mit den Zähnen des *Thaumatosaurus* Meyer, aus dem Oolit zu Neuffen, und mit den Zähnen des *Ischyrodon* Meriani, aus dem Oolit zu Frickthal, haben, so weit man darüber, nach der Beschreibung H. v. Meyer's (vergl. Palaeont. Band VI, pag. 14—18 und pag. 19—21)

und den auf Taf. IV—V und Taf. XI, Fig. 1—4 befindlichen Darstellungen, urtheilen kann.

Alle übrigen Eigenthümlichkeiten der Ueberreste des Wundersaurus (*Thaumatosaurus* Meyer) als: a) das schwammige oder zellige Knochengewebe, b) die geringe Länge der Wirbelkörper und c) eine gewisse Biconcavität der Wirbel — zeigen ihre Verwandtschaft mit den Ichthyosauren an und weisen zugleich darauf hin, dass diese Thiere ausschliesslich im Meere lebten. Andererseits aber haben sie, wegen des Baues und der Form ihrer Zähne, Aehnlichkeit mit *Pliosaurus* Ow. und *Polyptychodon* Ow., deren Zähne eine eben solche Form und gleichen Bau haben.

Wenn man dabei die bereits bekannte Mannigfaltigkeit der Zähne bei verschiedenen Species von Ichthyosaurus berücksichtigt, und sich erinnert, dass solche Mannigfaltigkeit sich mit dem Wuchse dieser Thiere vermehrte, so hat man keinen Grund Pliosaurus, Polyptychodon, Thaumatosaurus und Ischyrodon, die sich, was die Form der Zähne anlangt, weniger von einander unterscheiden[1]), zu verschiedenen Ordnungen zu zählen, ja man würde sie nicht einmal in verschiedene Gruppen bringen dürfen.

Da ich nun eine Thaumatosauria-Gruppe bilde, so will ich alle Thiere, welche dazu gehören, durch folgende charakteristische Merkmale bezeichnen:

1) Ein kurzer Hals, welcher an den Ichthyosaurus und die Meersäugethiere erinnert.

2) Ein solcher Hals trug einen grossen, schweren, vielleicht physeterartigen Kopf.

3) Der Rachen dieser Thiere war mit dicken, conischen Zähnen versehen, welche, wie bei den Plesiosauren, in besondern Alveolen sassen, zwar nicht immer eine ganz runde Form hatten, doch bei entsprechender Entwickelung der Kiefer, des Schädels und der übrigen Theile des Gerippes eine ausserordentliche Grösse erreichten.

4) Die Zahnhöhle aller dieser Zähne erstreckt sich, wie bei denen des Ichthyosaurus, fast bis zur Spitze und nimmt einen bedeutenden Raum ein. Die Wechselzähne aber, welche, mitunter auch von der Seite, wie bei den Plesiosauren, herauskamen, drangen doch allmählig in die Höhlen der alten Zähne ein und schoben durch ihr Wachsen die alten Zähne hinaus. Dabei müssen sich mit dem Wachsthum des Thieres, auch seine Kiefer ausgebreitet haben (vergl. Pl. 1, Fig. 3. R. Owen Monog. Brit. Foss. Rept. Pliosaurus Grandi Ow. Palaeont. Soc. 1868 und Pl. IV, Fig. 2 Polypt. interruptus Supp. № III Sauropt. Palaeont. Soc. 1860 hinsichtlich der Zähne von Plesiosaurus megacephalus pag. 21 u. 22).

5) Die Krone der Zähne ist mit Schmelz bezogen, welcher Streifungen aufweist und auf der Spitze der Krone eine ziemlich dicke Schicht bildet.

---

1) H. v. Meyer Palaeont. Bd. VI, pag. 3 Saurier aus der Kreide-Gruppe; Polyptychodon pag. 3—7; Thaumatosaurus pag. 14—18; Ischyrodon pag. 19—21. R. Owen Palaeont. Mong. Brit. Foss. Rept. Kimmeridge Clay 1861—1868; Pliosaurus Pl. 7, 12; Odontogr. Pl. 68, 72; Report. on Brit. Foss. Rept., Trans. Brit. Assoc. 1841; Polyptychodon Pl. 29, 26, pag. 19, Pl. 72, Fig. 3, 4; History of Brit. Foss. Rept. vol. 4, Pl. 8, 2. Dr. Andr. Wagner. Pliosaurus giganteus, Abh. der Akd. der Wiss. München Bd. VI, Abth. 3, pag. 696, Tf. XX, Fig. 1—3. Fischer v. Waldheim Bull. Natur. de Moscou 1846, № 3, pag. 105, Tb. 3, 4, Pliosaurus Wossinskii Fischer.

6) Kurze, von beiden Seiten mehr oder weniger schwach vertiefte (biconcave) Wirbel und 7) In den langen Knochen der Gliedmassen ist keine Markhöhle vorhanden. Dagegen besteht die Knochenmasse aus grobzelligem oder schwammigem Gewebe als Gegengewicht des ausserordentlich schweren Gerippes gegen die Schwere des Wassers der ehemaligen Meere, in welche sich das Thier versenkte. Solch' ein Knochengewebe war zur Lebenszeit des Thieres ganz von Fett durchdrungen und zeigt jetzt, nach der Versteinerung, grössere oder kleinere Hohlräume, die sich in Folge einer Zerstörung und Auskrümelung der schwachen Theilchen gebildet haben.

I.

Gattung Polyptychodon Owen.

R. Owen. Odontography pag. 19, Pl. 72, Fig. 3 u. 4.
— Report on British Fossil. Reptiles Trans. Brit. Association 1841, pag. 156.
— Monograph. Foss. Rept. Cretac. Format. Palaeont. Soc. 1851, pag. 45—58, Tb. X, Fig. 7—9; Tb. XI, Tb. XIV, Fig. 1—6.
— History of British Foss. Rept. vol. IV.
— Palaeont. Soc. 1860 Supp. № 3 Cret. Pterosauria and Sauropterygia Tb. 4—6, pag. 20—25.

Die Ueberreste dieses grossen Sauriers weisen nach R. Owen auf eine grosse Abweichung von jetzt lebenden Typen, sowohl den schildkröten- als den eidechsartigen Thieren.

Die dicken conischen Zähne des Polyptychodon haben einige Aehnlichkeit mit den Zähnen der Krokodile, doch unterscheiden sie sich von ihnen dadurch, dass sie bedeutend grösser sind und einen weit regelmässigeren, kreisförmigen Querschnitt der Krone, liefern, an welcher die zwei gegenüberliegenden Kanten fehlen. Dabei sind sie mit einer grossen Zahl von Längsstreifen bezogen. An einigen Exemplaren sind diese Streifen fast alle von gleicher Länge und ziehen sich bis zur Spitze der Zahnkrone; an den meisten sind sie jedoch von verschiedener Länge. Nur eine verhältnissmässig geringe Zahl von Streifen reicht bis zur Spitze hin. Einige der grössten Exemplare dieser Zähne, die nicht so viele und weniger lange Streifen haben zeichnen sich durch grössere Glätte und stärkeren Glanz ihres Schmelzes aus. Im Allgemeinen sind jedoch die kürzeren Streifen feiner als die langen.

Auf der eingebogenen (concaven) Seite der Zähne ziehen sich die Streifen grösstentheils fasst bis zur Spitze hinauf, auf der ausgebogenen (convexen) Zahnseite dagegen erreichen diese Streifen nur $^1/_3$ oder $^2/_3$ der Höhe von der Basis des Zahnes bis zur Spitze. Solche kurze

Streifen wechseln mit längeren ab, wodurch sich zwischen diesen am obern Theil der Zahnkrone Schmelz-Glätten bilden.

R. Owen findet bei allen diesen, zuerst in der Kreide entdeckten Zähnen, eine allgemein charakteristische Aehnlichkeit, sowohl im Bau derselben, als auch in ihrer Form und giebt dieser ausgestorbenen Art von Eidechsen den Namen Polyptychodon, durch den das streifige Aussehen ihrer Zähne treffend bezeichnet wird.

Die Zähne des Polyptychodon sind leicht von denen anderer Gattungen zu unterscheiden, theils durch die Festigkeit der Krone, theils dadurch, dass der Bau ihres Dentins einige Aehnlichkeit mit dem der Krokodile und Plesiosauren hat. Dieses feste Dentin zerfällt mitunter durch Verwitterung in concentrische auf einander liegende Schichten.

Die innere conische Markhöhle nimmt im Zahne einen bedeutenden Raum ein, sie beginnt fast an der Spitze der Zahnkrone als ein schmales Kanälchen und bildet in der Mitte der Höhe der Krone einen Conus, der in die cylindrische Zahnwurzel gehend an Breite zunimmt. Die geringe Höhe der Zahnkrone, die Dünnheit der Schmelzschicht auf der Zahnkrone und die Kürze der Wurzel, sowie die beträchtlichere Breite an der Basis der Markhöhle deuten, wie wir später sehn werden, auf eine unvollkommene Entwickelung des Zahnes, ungeachtet seiner Grösse. Bei vollständig ausgebildeten Zähnen dieser Art ist die Krone der Länge nach immer mehr oder weniger gebogen. Die Schmelzschicht ist an der Spitze der Zähne ziemlich dick, an der Basis der Zahnkrone dagegen sehr dünn. Die Streifen bestehn aus Schmelz allein, ohne Betheiligung des Dentins. Die emaillirte gereifte Oberfläche ist am untern Rande durch eine scharfe Linie begrenzt, die Zahnwurzel aber läuft in ein breiter werdendes cylindrisches Ende aus und ist von einer glatten Cement-Schichte bedeckt; die Zahnkrone dagegen spitzt sich allmählig mehr oder weniger zu.

Nach der Meinung R. Owens kann man die Zähne des Polyptychodon sofort von denen des Mosasaurus und des Pliosaurus unterscheiden, indem an seinen Zähnen die fast flache Facette auf der Zahnkrone fehlt; letzere wird durch grosse Streifen oder Ränder begränzt. Von den Zähnen des Poekilopleuron Eudes-Deslongchamps unterscheiden sie sich noch dadurch, dass die Streifen an der Zahnkrone zahlreicher und dichter sind und der Querschnitt ein mehr rundes und kein zusammengedrückt-elliptisches Aussehn hat (vergl. Pl. VI, Fig. 8 et 9. Mémoire sur le Poekilopleuron Bucklandii vol. 6-me des Mémoires de la société Linnéenne 1837).

Nach dem Auffinden einzelner und vollkommen entwickelter Zähne von Polyptychodon, von denen einige noch die langen Wurzeln hatten, kann man schliessen, dass sie, wie die Zähne bei Krokodilen, frei, in grossen getrennten Alveolen sassen und nicht, wie bei Mosasaurus und Leiodon, an der Spitze der Kiefer-Höcker befestigt waren, weshalb sie in Folge des Zerfalls der Gaumen und der übrigen Weichtheile leicht ausfielen. — Man hat Beweise, dass Zähne des Polyptychodon, nicht allein aus einem und demselben Rachen, sondern auch aus einem und demselben Kiefer, ungleich hohe Kronen hatten und dass der Zahnwechsel bei diesen Thieren in denselben Alveolen vor sich ging, wie bei den jetzt

lebenden Krokodilen (vergl. ib. pag. 57 Polypt. interruptus und Supp. № 3. pag. 21 Taf. IV. Fig. 20).

Im Jahre 1860 untersuchte R. Owen Schädelreste, einen Theil des Kiefers mit einem Zahne von *Polyptychodon interruptus* Ow. vorstellend, die beim Bau des Eisenbahn-Tunnels unweit Frome zu Somersetshire, in der Kreide-Formation gefunden waren. Dieser fossile Schädelrest hat Aehnlichkeit mit den Schädeln der Plesiosauroiden-Arten und besonders darin, dass er auch zwischen Stirnbein und Scheitelknochen das sogenannte Scheitelloch *p* hat (vergl. daselbst supp. № 3. Taf. IV. Fig. 1).

Weitere Aehnlichkeit zwischen Polyptychodon und Plesiosaurus findet R. Owen durch Vergleichung der Halswirbel, die man in England in der Nähe von Cambridge im Grünsande und in Russland im Sewerischen Osteolith, im Kurskischen Gouv. und unweit Moskau im obern Jura gefunden hat, namentlich in der durch *Ammonites virgatus* Buch charakterisirten Schicht.

Die englischen Wirbel sind von R. Owen auf Pl. V u. VI dargestellt, Supp. № 3; die russischen, welche hier beschrieben werden sollen, auf Taf. 8 u. 9 und Taf. 15. Fig. 2. und die des Moskauer Jura auf Taf. 14. Fig. 1—4 und Taf. 15. Fig. 1 u. 3.

Der Körper oder das Centrum des englischen Halswirbels aus dem obern Grünsande von Cambridge wurde in phosphorsauren Klumpen gefunden (deren Bildung wahrscheinlich gleichzeitig mit einigen Ablagerungen unseres Sewerischen Osteoliths stattfand) und ist auf Pl. V. Fig. 1 u. 2. Supp. № 3 abgebildet.

Dieser Wirbel ist 0,10 m. lang, seine Gelenkfläche beträgt im Querschnitt genommen 0,136 — 0,178 m. In die ganze Breite sind auch die Pleurapophysial-Sprossen mit eingerechnet. Letztere liegen viel näher zur vordern, als zur hintern Gelenkfläche des Wirbelkörpers selbst und enden mit ebenen Oberflächen behufs Vereinigung mit den Halsrippen. Die Gelenkflächen des Wirbelkörpers sind beinahe flach.

Mit diesem Wirbel wurde nur ein Polyptychodon-Zahn in derselben Formation und an demselben Orte gefunden. Der Wirbel zeigt sowohl dieselben Dimensionen, als auch denselben Charakter, wie die Halswirbel von Nothosaurus und Plesiosaurus und muss daher zur Gruppe der Sauropterygia gezählt werden (vergl. «the Classification of Reptilia Reports of the British Association 1859 pag. 159» und «Palaeontology 8 vol. 1860 pag. 209»).

Ausserdem sind noch im obern Grünsande und in der Umgegend von Cambridge drei Rückenwirbel-Centra von entsprechenden Dimensionen gefunden worden und sie zeigen die gewöhnlichen charakteristischen Merkmale der Wirbel plesiosauroider Thiere. Ihre Gelenkflächen sind leicht concav und haben eine schwache, runde Vertiefung, welche fast die ganze Mitte einnimmt.

Die Seiten dieser Wirbel sind leicht concav; die untere Seite weist eine geringere Concavität auf; die anderen Seiten sind eben; zur Mitte hin haben sie, der Länge nach, unregelmässig-wellige Furchen und einen Zoll weit vom Rande zeigen sich Grübchen. Eine solche Unebenheit deutet auf die Anheftung der Fasercapsel (Capsula articularis fibrosa).

Die Länge des Wirbels ist an der obern Seite geringer, als an der untern, wo sie bis 0,128 m. zählt, während es nach der Länge des Rückenmarks nur 0,10 m. sind. Die glatte Fläche, welche durch Eindrückung dieses Kanals enstanden ist, misst im schmalsten Durchmesser 0,016 m. und im breitesten 0,05 m. Die neurapophysalen Vertiefungen sind schalenförmig und haben eine unebene Oberfläche von 0,092 m. Länge bei 0,048 m. Breite. Der ebene Theil der obern Seite des Wirbelkörpers ist nicht ganz von den Neurapophysen-Bogen bedekt, namentlich am Ende; da, wo der Nerven-Kanal die grösste Breite hat, bleibt sie unbedeckt, weshalb man diese Seite mit mehr Sicherheit für die hintere Wirbelseite, d. h. für diejenige halten kann, welche dem Schwanze des Thieres zugewandt war. An der untern Seite dieses Wirbels befinden sich zwei Gefässöffnungen auf der einen und drei auf der andern Seite der Mitte des Centrums. Die Breite und verticale Ausmessung der Gelenkflächen sind unter einander gleich und betragen zu 0,162 m.

Ferner untersucht R. Owen den Sauropterygien-Wirbel aus dem Sewerischen Osteolith des Kurskischen Gouv., welchen er von mir im Jahre 1857 erhalten hatte und erkennt ihn auch als vom Polyptychodon stammend an. Ich glaube, dass es der nämliche Wirbel ist, welchen ich jetzt auf Taf. VIII, Fig. 1 *A* u. *B* abgebildet habe und muss hier bemerken, dass ich diese Abbildung mit möglichster Genauigkeit nach einer Exquise reproducirt habe, die ich in aller Eile abnahm bei Ueberreichung des erwähnten Exemplars an den hochverehrten und wohlwollenden Herrn Professor R. Owen, dem ich zu grossem Danke verpflichtet bin für die mir zugestellten Mittel zum Studium der englischen Saurier-Ueberreste.

Hierbei ist es nothwendig zu bemerken, dass die Dimensionen an der von mir reproducirten Abbildung dieses Petrefacts mit den von R. Owen angestellten Messungen nicht übereinstimmen. R. Owen giebt nämlich die Länge des Wirbels auf 0,10 m. und seine Breite fast auf 0,14 m. an und sagt, dass die Enden der Gelenkflächen — flach, die zwischen ihnen verengte Oberfläche des Wirbelkörpers aber — an den Seitenflächen schwach concav ist. In der Mitte der untern Seite des Wirbelkörpers sind zwei Gefäss-Oeffnungen, deren Durchmesser 0,005 m. beträgt, zu sehn.

Auf Taf. V, Fig. 3 des erwähnten Supp. № 3 ist ein Rippenstück abgebildet, welches gleichfalls im obern Grünsande der Grafschaft Cambridge gefunden wurde.

Dieses Exemplar entspricht hinsichtlich der Grösse und des Baues den oben beschriebenen Hals-Rückenwirbeln derselben Gegend. R. Owen hat dieses Stück deshalb für die Zeichnung gewählt, weil daran der seitliche Raum sehr deutlich zu sehen ist, was er an den Rippen der eigentlichen Plesiosauren nicht wahrgenommen hat.

Dieses Rippenstück, sagt R. Owen, gehörte wahrscheinlich einem Polyptychodon an und giebt einen minder runden Querschnitt.

Die Centren oder Körper des ersten und zweiten Halswirbels (attas und axis) sind wie bei den Plesiosauren verwachsen. Auf Pl. V, Supp. № 3 zeigt uns R. Owen ein Paar solcher Wirbel aus derselben Gegend und derselben Formation, in der der oben beschriebene, hin-

tere Halswirbel gefunden war. Diese Wirbel haben die gleichen Längendimensionen, wie der Halswirbel des Pliosaurus und R. Owen weist sie auch der Gattung Polyptychodon zu.

Der Wirbelkörper des ersteren dieser Wirbel, oder des Attas, ist rundlich. Die vordere Gelenkfläche ist concav und hat im mittleren Theile eine bedeutende Aushöhlung für den Genick-Dornfortsatz (occipital condyle). Der untere Theil dieser Aushöhlung oder Schale war vollkommen, wie beim Plesiosaurus, doch mit keilförmigen Hypapophysen versehen, für die man Gelenkeindrücke gewahrt. Die obere Seite dieses Wirbelkörpers stützte die Neurapophysen, deren Gelenkflächen eben sind und an den Seiten der Basis des Nervenkanals liegen. Die natürliche Trennungslinie (oder die Nath) zwischen Attas und Axis ist ziemlich deutlich zu sehen. Die Hypapophysen der Axis sind weit schmäler, als die des Attas und sie verwachsen mit den Wirbelkörpern in ihrer ganzen Breite oder nur mit einem Theile derselben. Die Axis ist dünner als der Attas; ihre hintere Gelenkfläche ist immer flacher und ebener und zeigt dabei die plesiosauroide Knochenbeschaffenheit. Auf ebenso flachen Wirbeln des Ichthyosaurus wäre diese Oberfläche tiefer concav.

Da man schon in der Organisation der Plesiosauroiden, sagt R. Owen ferner, einen Hinweis auf das Verwachsen der ersten Halswirbel hat, so kann man solches auch beim Polyptychodon zulassen, gleichwie die Aehnlichkeit der Proportionen an den hintern Halswirbeln dieser beiden Thiergattungen anerkannt wird. Hieraus erhellt, dass R. Owen es zulässt, dass zwischen den beschriebenen hinteren Wirbeln und der Axis die beiden vorderen Halswirbel rasch an Länge abnahmen und dass von den vordern Wirbeln einer (oder sogar mehrere) ebenso kurz waren, wie beim Ichthyosaurus und Pliosaurus. Die enorme Grösse des Kopfes, der Kiefer und der Zähne des Polyptychodon haben Aehnlichkeit mit denen ihrer älteren Stammesgenossen oder Vorfahren aus dem Kimmeridge Clay und der sie stützende Theil des Rückgrats war nicht lang und entsprechend stark. Sehr wahrscheinlich ist es, meint R. Owen, dass auch die grosse, aus der Kreideschicht zu Kent stammende plesiosauroide Flosse, deren Phalangen auf Pl. 17, Monogr. on the foss. Rept. of the Cret. For. (Palaeont. Soc. 1851) dargestellt sind, einem Polyptychodon-Gerippe angehört hat.

Diese Phalangen machten einen Theil der vier Reihen der Fingerknochen aus. Die entgegengesetzten Enden dieser Knochen sind comprimirt. Das Knochengewebe ist grobzellig und die Knochen sind unter einander durch Bänder vereinigt. Das Alles zusammen machte einen Theil des Knochengerüstes der recht grossen Flosse aus, die die grösste Aehnlichkeit mit der Flosse eines Plesiosaurus hatte.

Spec. Polyptychodon interruptus Owen:

Taf. I, Fig. 1*a*, *b*, *c*, *d*, *f*, Fig. 2*a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*. Taf. II, Fig. 1*a*, *b*, *c*, *d*, *d'*, *e*, *f*, *h*, *h'*, *h''*, Fig. 2*a*, *b*, *d*, *e*, Fig. 3*a*, *b*, *c*, *d*, *d'*, *f*. Taf. III, Fig. 1, 1*a*, 1*b*, 1*c*, Fig. 2, 2*a*, 2*b*. Taf. IV, Fig. 1—6. Taf. V, Fig. 1—5. Taf. VIII, Fig. 1—4. Taf. IX, Fig. 1, 2. Taf. X und Taf. XI, Fig. 1, 2.

Bei allen diesen in natürlicher ($^1/_1$) Grösse gezeichneten Abbildungen bedeutet *a* — die äussere oder convexe, *b*—die seitliche und *c*—die innere oder concave Seite des Zahnes; *d*, *e*,

f, *g* bezeichnen die Querschnitte nach den mit denselben Buchstaben versehenen Linien.

Auf Taf. II, Fig. 1 u. 3 zeigen *d*, *d'* die Ansicht der Zahnspitzen und *h*, *h'* und *h''* die Ansicht eines Theils der Email-Schichte auf der Zahnkrone bei zwei-, fünf- und zehnfacher Vergrösserung.

Auf Taf. I, Fig. 1 ist ein abgebrochenes Stück des grössten Zahnes dieser Art aus meiner Sammlung abgebildet.

Indem ich mich nach den Dimensionen des ganzen Zahnes Fig. 2 derselben Tafel richte, nehme ich an, dass die Länge der Zahnkrone Fig. 1 mehr als 3 Zoll, oder 0,077 m. und die Länge seiner Wurzel bis $6^1/_2''$ oder 0,165 m. betrug. Der Zahnhals sondert sich nicht deutlich von der Wurzel ab. Die Zahnkrone ist schwach gebogen und mit einer dicken, dunkelfarbigen Schmelzschicht bedeckt, deren Reifen an der innern oder concaven Seite des Zahnes sich einander mehr, als an den seitlichen Flächen nähern; an der äusseren oder convexen Zahnseite stehen diese Reifen nicht so dicht und sind kürzer und schwächer als an den Seitenflächen.

Die Schmelzreifen dieser Zähne sind überhaupt von ungleicher Länge und Stärke, oft sieht man zwischen zwei längeren, scharf ausgeprägten Reifen noch einen kürzeren und schwächeren Reif. Die langen oder grossen Reifen ziehen sich auf der Innenseite und den Seitenflächen des Zahnes, längs der ganzen Höhe der noch erhaltenen Zahnkrone hin und haben sich vermuthlich noch viel höher hinauf, vielleicht sogar bis zur Spitze der Zahnkrone erstreckt, wie beim Zahne Taf. II. Fig. 1, während die dazwischen liegenden Reifen nicht mehr als halb so lang werden, wie die der langen Reifen. An der äusseren oder convexen Seite des Zahnes geht die Reifung der Zahnkrone anfangs in der Richtung der aufhörenden Reifen in kleine, längliche Falten über, darauf aber in die glatte, glänzende Schmelzschicht Taf. II. Fig. *h''*. Der Querschnitt, sowohl der Krone, als auch der Zahnwurzel zeigt die Umrisse rundlicher Ellipsen, wie aus Fig. 1. *d*. *f*. zu sehn, welche nach der Ansicht *c* gezeichnet sind.

Die Wurzel des Zahnes ist kastanienbraun, hat eine conische Zahnhöhle (pulp-cavity) mit harten, 3 Linien oder 0,008 m. dicken Wänden. Diese Höhlung erstreckt sich bis in die Zahnkrone hinein.

Bei einer Vergleichung dieses Zahnes (wie ihn die Abbildung zeigt) mit den Zähnen des *Pliosaurus grandis* Owen Pl. 7. (The Palaeont Soc. 1868. R. Owen Monogr. on the Brit. Foss. Rept. from the Kimmeridge Clay), wie auch mit den Zähnen des *Polyptychodon Continuus* Ow. u. *Polypt. interruptus* Ow. (Pl. 29. Fig. 4—6, Pl. 26. Fig. 8. und Pl. 2. Fig. 16. 17. Hist. of Brit. Foss. Rept.) finde ich, dass alle diese Zähne, sowohl ihrer Grösse, als auch der Schmelzstreifung und der allgemeinen Form nach, blos Species-Verschiedenheiten darbieten, welche leicht an den Zähnen einer und derselben Gattung von Eidechsen mit ruderartigen Flossen (Enaliosauren) anzutreffen sind und darin bestärkt mich die Mannigfaltigkeit der Formen der verschiedenen Arten von Ichthyosaurus.

Auf Taf. I. Fig. 2. ist ein ganzer Zahn von einem Thiere derselben Gattung dar-

gestellt. Dieser Zahn ist 5 Zoll $^3/_4$ Lin., d. h. 0,13 m. lang; davon kommen auf die Krone allein 0,067 und auf die Wurzel 0,063 m. Der Zahnhals sondert sich nicht scharf von der Zahnwurzel ab. Längs der ganzen Höhe der Wurzel bemerkt man Längs- und Querstreifungen, obwohl schwächere, als an den Zähnen des *Pliosaurus grandis* Ow. (vergl. ib. Pl. 12).

Die Querschnitte der Zähne Taf. 1, Fig. 2, *d*, *e* und *f* sind nach der Lage der Innenseite *c* angeordnet und haben einen mehr oder weniger unregelmässig-elliptischen Umriss. Der Querschnitt aber unten an der Wurzel (*g*) zeigt an der Innenseite des Zahnes eine Oeffnung in der Höhlung, wie an dem von Wagner vorgestellten Exemplare des *Pliosaurus giganteus* Wag. (vergl. Tab. XX. Bd. VI. Abth. 3. Abhandl. der Math.-Physik. Classe der Königl. Bayer. Akademie der Wissensch. 1852).

Man muss annehmen, das die Zahnhöhle sich auch bei dem auf Taf. 1. Fig. 2. abgebildeten Exemplare durch die ganze Wurzel bis in die Zahnkrone hinein erstreckt. An der Basis der Wurzel beläuft sich die Dicke ihrer Wände bis auf 3 Lin. oder 0,007 m. Die Krone ist leicht nach innen gebogen und mit dunkler gestreifter Emaille bedeckt; die Farbe der Wurzel aber ist—sandgelb. Die Anordnung der Streifung des Schmelzes ist ganz dieselbe, wie beim Zahne Taf. 1. Fig. 1, doch sind die Streifen und der Schmelz im Allgemeinen, noch bei Lebenszeit des Thieres mehr abgerieben, als am Exemplare Fig. 1. Das faltige Aussehn der Emaille aber ist dasselbe wie am Zahne Fig. 1. und gleicht offenbar der Faltung an den englischen Zähnen von *Pliosaurus grandis* Ow.

Meiner Meinung nach hat dieser Zahn bedeutende Aehnlichkeit sowohl mit den Zähnen des *Pliosaurus grandis* Ow. und *Pliosaurus giganteus* Wag., als auch mit vielen Zähnen des *Polyptychodon interruptus* Ow., welche auf Grund der oben erklärten Hinweise häufig für Zähne gleichartiger Thiere gehalten werden.

Eine gut conservirte Schmelzschicht eines solchen Zahnes bietet uns die Zahnkrone Taf. 2, Fig. 1, *a*, *b*, *c*, *d*, *d'*, *e*, *f*. Diese Zahnkrone hat, ebenso wie die früher beschriebenen, eine Biegung zur Innenseite, weshalb die innere Seite dieser Zähne immer mehr oder minder concav, die äusere Seite convex erscheint. Die Querschnitte der Krone haben, von der Grenzlinie der Emailschicht beginnend, einen breiten, elliptischen Umriss, welcher zur Zahnspitze hin mehr rund wird. Die Spitze *d'* hat eine unbedeutende Vertiefung in Folge der Eindrückung der conischen Spitze der Zahnkrone, an welcher auf allen Seiten des Zahnes die grossen oder Haupstreifen des Schmelzes zusammenlaufen. Der Schmelz an der concaven Zahnseite unterscheidet sich von dem der convexen Seite blos dadurch, dass die Zwischenstreifen auf der concaven Seite länger als auf der convexen sind, wo die Zwischenräume zwischen den Hauptstreifen frei bleiben und das Email blos eine schwache, höckrige Oberfläche zeigt.

Der Schmelz auf dieser Zahnkrone ist von dunkelbrauner Farbe mit einem öligen Glanze und erscheint an den dünnen Kanten der Streifen durch.

Bei doppelter ($^1/_2$) Linear-Vergrösserung eines Theils der Emaildecke an der Grenzlinie, Fig. *h*, sieht man, dass die Hauptstreifen anderhalb Mal dicker sind, wie die kurzen

Streifen, welche man ganz an der Grenzlinie wahrnimmt. Auf dieser Abbildung sieht man auch, dass einige dieser Streifen unterbrochen werden und dass oben, wo sie enden, gleichsam eine Fortsetzung derselben durch eine schwache, minder regelmässige höckrige Unebenheit gebildet wird.

Taf. 2, Fig. 1, *h'* stellt einen Theil derselben Schmelzschicht bei 10 maliger Linear-Vergrösserung dar.

Diese Abbildung bestätigt Alles, was Fig. 1, *h* zu sehen ist und zeigt ausserdem, dass sich über die ganze Emailschicht sehr feine, gradlinige Risschen ausbreiten und dass die grossen und kleinen Streifen — als dreiseitige, prismenartige Wülste laufen, doch nicht so scharfkantig, wie es Wagner bei *Pliosaurus giganteus* angiebt, bei dem die ebenso breiten Furchen—eine ebene, glatte und flache Oberfläche darbieten.

Auf Taf. 2, Fig. 1, *h''* sind bei ($^8/_1$) Vergrösserung die stellweise an den Zähnen Taf. 1, Fig. 12. bemerkbaren Fältchen auf der Emailschicht dargestellt. Diese Fältchen bilden längliche, wellige, mitunter abgestumpfte und oft sich kreuzende Höckerchen, die sich wegen der gegenseitigen Durchkreuzung in der Längenrichtung verkürzen.

Die auf Taf. 2, Fig. 2, *a*, *b*, *d*, *e* und Fig. 3, *a*, *b*, *c*, *d*, *d'*, *f* dargestellten Kronentheile gehören meiner Meinung nach derselben Species an, wie die früher beschriebenen, nur sind sie kleiner, was vielleicht vom Alter des Individuums oder Zahnes, oder auch von der Stelle, die der Zahn im Rachen einnahm, abhängt, denn der ganze Bau dieser Zähne, sowie die Streifung des Schmelzes zeigt keine Eigenthümlichkeiten, die auf eine Species-Verschiedenheit deuten könnten.

Ausserdem sehe ich mich, wie ich weiter unten zeigen werde, veranlasst, den Zahn auf Taf. 2. Fig. 3. für einen Wechselzahn eines Thieres derselben Species zu halten. Die Ansicht *a* der Krone zeigt auf der äussern Seite des Zahnes, dass das Email auf einer bedeutenden Strecke dieser Seite—eben und glatt, auf den übrigen Seiten aber die Schmelzstreifung eine gleichartige und grobe ist.

Der Querschnitt der Zahnkronen Taf. 2. Fig. 2. 3. erscheint fast von der Zahnspitze *d'* Fig. 3. an—mehr rund. Das kann jedoch bei Vergleichung dieser Zähne mit ähnlichen Exemplaren von *Polyptychodon interruptus* Ow., sowohl der englischen Sammlungen, wie der Zähne meiner Sammlung Taf. 2. Fig. 1. und den von Herrn I. Sinzeff beschriebenen, aus dem eisensaltigen Sande der Kreide-Formation des Saratowschen Gouv. stammenden Zähnen, nicht als Basis dienen zur Sonderung dieser Zähne in eine besondere Art, (vergl. Bd. IV. Materialien zur Geologie Russland's 1872, pag. 110. Taf. XXII. Fig. 1 — 3), denn alle Exemplare der genannten Sammlungen zeigen, trotz des allgemeinen typischen Charakters, eine Verschiedenheit in den Umrissen der Querschnitte. Diese Verschiedenheit im Querschnitt beginnt beim englischen *Pliosaurus grandis* Ow., wo der Querschnitt von einer Seite flach ist; beim *Pliosaurus Wossinskii* Fischer geht der Querschnitt in die unregelmässig - elliptische Form über (vergl. Taf. IV. Bull. nat. de Moscou 1846. № III ein junger Zahn aus der Alveole *a* der Kinnlade Fig. 1. von zwei

Seiten und der Querschnitt desselben Zahnes), dann erscheint er in der Form Taf. 1. Fig. 12; die von Herrn Sinzeff abgebildeten Querschnitte endlich zeigen vollständig runde Umrisse. Weit bedeutenderen Verschiedenheiten der Zahnform begegnen wir nicht allein bei den Thieren der Gattung Ichthyosaurus, sondern sogar in einem und demselben Rachen, besonders wenn wir die Veränderlichkeit der Formen bei den Wechselzähnen berücksichtigen, wie sie auch bei den jetzt lebenden Krokodilen beobachtet wird.

Um die in mancher Beziehung wirkliche Aehnlichkeit der Zähne des Polyptychodon mit denen der lebenden Krokodile präciser zu bestimmen, habe ich durch mikroskopische Beobachtungen den Bau der Zähne des Nilkrokodils (*Crocodilus niloticus, Cr. vulgaris* Cuv.) von verschiedenem Alter untersucht.

Taf. III, Fig. 4, 4*a*, 4*a'*, 5 u. 6, Taf. VI und Taf. VII.

Der erste dieser Zähne Taf. III, Fig. 4, 4*a* u. 4*a'* und Taf. VI, Fig. 1—9 gehörte einem ausgewachsenen Thiere an, dessen Länge gegen 10 Fuss (über 3 m.) betrug, und vom hinteren Ende der Zahnreihe gerechnet, war es der 13. der linken Seite der oberen Kinnlade. Die ganze Höhe des Zahnes misst $2^1/_4$ Zoll (0,057 m.), die mit Schmelz bedeckte Krone 8 Lin. (0,022 m.) und die Wurzel 1 Zoll und $4^1/_4$ Lin. (0,035 m.) Länge. Der Hals des Zahnes sondert sich nur schwach von der Wurzel ab. Längs der Höhe des Kronentheiles ziehen sich Grenzkanten oder Ränder *xx*, welche die Aussen- und die Innenseite des Zahnes in zwei ziemlich gleiche Theile theilen.

Taf. III, Fig. 4 zeigt den Längsschnitt des Zahnes bei $^2/_1$-maliger, die Structur des Zahngewebes bei $^{20}/_1$-facher linearer Vergrösserung, wobei *a* die innere Höhlung des Zahnes (Pulp.-cavity) *b* das ächte Dentin, *c* das Email (Vitrodentin), *d* den Cement (Vasodentin) und *mb* die Contourschichtung zeigt.

Taf. III, Fig. 4*a'* stellt den Querschnitt der Kronenspitze in natürlicher ($^1/_1$) Grösse dar, wobei *b* das Dentin, *c* das Email und *xx*—wie auf den vorhergehenden Figuren—die Grenzkanten oder Ränder bezeichnen. Taf. III, Fig. 4*a* ist die Abbildung eines Theiles des Querschnitts der Zahnkrone an der Spitze der Zahnhöhle *a* desselben Zahnes bei $^8/_1$-facher Vergrösserung der Contouren und $^{20}/_1$-facher linearer Vergrösserung des Zahngewebes. Die Zeichen *a*, *b*, *c*, *mb*, *xx* haben dieselbe Bedeutung wie bei den früher beschriebenen Figuren und *ss* bezeichnen die Risse im Schmelze in der Richtung der Zahnhöhe.

Diese Abbildungen zeigen, dass der Zahn meist aus fester Dentinmasse besteht, seine Krone mit einer Schmelzschicht und die Wurzel mit einer Cementschicht bedeckt ist, dass die Wurzel nach unten etwas breiter wird oder auch bis zur Basis dieselbe Dicke bewahrt. Die Zahnhöhle aber nimmt die ganze Wurzel ein, erstreckt sich weit in die Krone hinauf

und die Contourschichten sind sehr deutlich markirt. Auf Fig. 4*a* sieht man, dass die Kante *xx* von Dentin gebildet wird, mit Schmelz bedeckt ist und dass das Email etwas höckrig ist (Taf. VII, Fig. 8) und in der Höhenrichtung des Zahnes kleine Risse *ss* enthält.

Weitere mikroskopische Untersuchungen desselben Zahnes sind auf Taf. VI niedergelegt, wo Fig. 1 u. 2 einen Theil des Längs- und Querschnitt's der Zahnkrone, bei $^{450}/_{1}$ f. lin. Vergr. zeigen. Fig. 3 u. 4 stellen Theile des Längs- und Querschnitt's der Wurzel desselben Zahnes und bei gleicher $^{450}/_{1}$ f. lin. Vergr. dar, Fig. 5 und 6 Theile derselben Längs- und Querschnitte der Zahnkrone, doch bei $^{900}/_{1}$ f. lin. Vergr. des Zahngewebes und Fig. 7 u. 8 Theile der Längs- und Querschnitte der Zahnwurzel bei $^{900}/_{1}$ f. lin. Vergr. des Zahngewebes und endlich Fig. 9 ist die Abbildung des Zahngewebes bei $^{900}/_{1}$ f. lin. Vergr. im Längendurchmesser des Zahnes mit den Flächen a' und a''' wie das Fig. 5 u. 6 bezeichnet ist.

Auf allen folgenden Tafeln, welche die Ergebnisse der mikroskopischen Untersuchungen liefern, haben die Bezeichnungen die frühere Bedeutung.

Die Dentinkanälchen *tu* eines vollkommen ausgebildeten Zahnes, deren Durchmesser $^{1}/_{4000}$ Linien beträgt, bilden eine unbedeutende Biegung bei ihrem Austritt aus der Zahnhöhle und laufen darauf so ziemlich gradlinig zur äussern Oberfläche des Zahnes. In ihrem weiteren Verlaufe, der durch eine gewisse Welligkeit gekennzeichnet ist, geben sie oft nach allen Richtungen Zweige ab. Indem sie sich dem Email nähern, enden diese Kanälchen *tu* als ganz feine Zweige *tc*, welche vermittelst der Zellen $l'k'$ Taf. VI, Fig. 1—4 anastomosiren.

Die Zweige oder Röhrchen *tc* sondern sich von den Kanälchen *tu* in dem Maasse ab, wie diese sich entwickeln; aber auch die feinsten Verzweigungen treten in die Zwischenräume und enden gleichfalls in Dentinzellen $l'k'$ Fig. 5 u. 6. Die Zellen $l'k'$ sind von unregelmässig-vielseitiger Form, ihre Grösse erreicht $^{1}/_{900}$ Lin. im Durchmesser. Sie sind gewöhnlich der Zahncontour parallel angeordnet und haben, wie wir das Fig. 3 sehn, eine bestimmtere Richtung, die der parallelen Biegung der Röhrchen *tc* entspricht, um die Schichtung *mb* anzudeuten, die man mit blossem Auge, oder bei ganz geringer Vergrösserung am Längs- und Querschnitte des Zahnes sehen kann, und die dem Dentin ein geschichtetes Aussehen verleiht, gleichsam als ob ein conus dem anderen aufgesetzt wäre. Taf. III, Fig. 4, 4*a*.

Unter den Scheidelinien der Schichtung *mb* ist besonders der Streif $b'b'$ bemerkenswerth, welcher zur äusseren Zahncontour und der Dentinstreifung concentrisch verläuft; er theilt augenscheinlich die Kronenmasse in zwei besondere, über einander liegende Kegel. Der Durchmesser der Röhrchen *tc* beträgt bis zu ihrer primären Verzweigung gewöhnlich $^{1}/_{12000}$ Lin. Die Kalkröhrchen und ihre Verzweigung sind durch Zwischenräume getrennt, die 3 oder 4 mal so breit sind als der Durchmesser der neben einander liegenden Kanälchen.

Das Email ist sehr hart. Bei $^{450}/_{1}$ bis $^{900}/_{1}$ f. Lin. Vergr. treten im Längs- und Quer-

schnitte desselben wellige, jedoch unter einander parallel laufende Streifen zu Tage. Die Structur des Email der Krokodile ist derjenigen der Ichthyosauren ziemlich ähnlich; man bemerkt in derselben auch Strahlenröhrchen *td*.

Im Bau der Uebergangsschicht des Dentins zum Cement, Taf. VI, Fig. 7 u. 8, kann man im Längs- und Querschnitt bei $^{900}/_{1}$ f. lin. Vergr. auch eine Aehnlichkeit mit der gleichen Uebergangsschicht bei Ichthyosaurus sehen.

Wenn man die letzten Abbildungen mit den Ergebnissen der Untersuchung eines jungen Zahnes von *Ichthyosaurus Campylodon* Cart., die auch einen Theil des Längsschnitts der Zahnwurzel zeigt, vergleicht, so sieht man folgende Verschiedenheiten: a) Durch die vollständig ausgebildete Cementschicht eines Ichthyosaurus-Zahnes gehen viele Medullarkanäle *on* durch, während man in derselben Cementschicht eines Krokodil-Zahnes keine solche wahrnimmt und b) die Knochenzellen *lk* sind im Zahne eines Krokodils grösser als die Knochenzellen im Zahne eines Ichthyosaurus: nämlich die Grösse dieser Knochenzellen im Zahngewebe des Ichthyosaurus misst von 0,001 bis 0,004 Linien, bei den Krokodilen aber ändert sich der Durchmesser von 0,002 bis 0,005 Lin. bei unvergleichlich bedeutenderer Entwickelung der Ausläufer *tl*. Sie haben eine ovale Form, der Längendurchmesser ist der Zahnaxe parallel und die Ausläufer *tl* gehen strahlenförmig von den Zellen *lk* aus, was ihnen ein sternförmiges Aussehen verleiht. Diese Ausläufer *tl* gehen, wie aus Fig. 7 deutlich zu ersehn, in die Cement- oder Knochenröhrchen *t* über.

Die Uebergangsschicht *bd* zeigt im Zahne des Krokodils Fig. 7 u. 8 die Eigenthümlichkeit, dass in ihr deutliche Anhäufungen (*k'r'*) von Knorpelzellen zu sehen sind, aus welchen die Zahnhöhlen entstehen; ferner sternartige Zellen oder Knochenzellen *lk* mit ihren Ausläufern *tl*, die sich weiter in die Cementkänälchen *t* fortsetzen.

Solche Zusammenhäufungen bilden sich aus schwachem Knorpel, ihr Längendurchmesser ist der Zahnaxe parallel, ihre Form ist oval und an Grösse übertrifft sie im Gesammtumfange um ein Geringes diejenige der Knochenzellen *lk*; in ihrem Baue aber ist die Verkalkung oder Sklerosirung deutlich zu sehn. Bei Ichthyosaurus dagegen habe ich eine so deutliche Vorbereitung zum Ausbau der Körperchen *lk* durch Zusammenhäufung von Knorpelzellen *kr* nicht gefunden.

Taf. VI, Fig. 9 zeigt bei $^{900}/_{1}$ f. lin. Vergr. den Bau des Zahngewebes im Längenschnitte mit den Flächen *a'* und *a'''* Fig. 5 u. 6. Die Fläche *a'* geht durch die Mitte der Emailschicht und die Abbildung zeigt die Spuren der Strahlenröhrchen *td* im Email, welche concentrische an Fig. 5 u. 6 sichtbare Bogen bilden; die Fläche *a'''* durchschneidet diejenige Schicht, in welcher die Verzweigungen *tc* anastomosiren (d. h. mit den Mündungen vermittelst der Zellen *l'k'* zusammenstossen).

Der zweite und dritte Zahn Taf. III, Fig. 5 u. 6 sind nach ihrem Platze im Rachen ebensolche wie der Zahn Fig. 4 und gehörten einem jungen Nilkrokodil an, dessen ganze Länge nicht mehr als 18 Zoll oder 0,46 m. betrug.

Der erstere dieser Zähne Fig. 5 ist ein Aussenzahn und der zweite Fig. 6 ein Innen- oder Wechselzahn.

Fig. 5 u. 6 auf Taf. III stellen den Längenschnitt der Zähne in $^{4}/_{1}$ f. Umriss und das Zahngewebe in $^{20}/_{1}$ f. lin. Vergr. dar.

Fig. 1 u. 2 auf Taf. VII sind der Längen- und Querschnitt eines Aussenzahnes von einem jugendlichen Nilkrokodil in $^{70}/_{1}$ f. Vergr. der Umrisse und $^{450}/_{1}$ f. Vergr. des Zahngewebes; Fig. 3 u. 4 zeigen einen Theil des Längenschnittes der Krone und der Wurzel desselben Zahnes bei $^{900}/_{1}$ f. lin. Vergr.

Fig. 5 u. 6 auf Taf. VII bilden die Ansicht des Längen- und Querschnittes eines Wechselzahnes vom selben Individuum bei $^{70}/_{1}$ f. lin. Vergr. der Umrisse und $^{450}/_{1}$ f. Vergr. des Zahngewebes und Fig. 7 zeigt einen Theil des Längenschnitts der Krone bei $^{900}/_{1}$ f. lin. Vergr.

$x'x'$ bezeichnen am Querschnitte des Wechselzahnes die länglichen Reifchen auf dem Schmelze, die sich bei weiterer Entwickelung des Zahnes ausglätten, wie man das auch am Querschnitte des Aussenzahnes Fig. 3 sehen kann: die Dentinkanälchen *tu* im Aussenzahne Fig. 1 haben 0,0001 Linien im Durchmesser; sie gehen ziemlich gerade von der Zahnhöhle aus und verzweigen sich in ihrem ganzen Verlaufe vielfach nach allen Seiten, weshalb sie viele Biegungen aufweisen. Zur äusseren Oberfläche des Zahnes hin theilen sich die Zweige der Kanälchen *tu* noch in ganz feine Röhrchen *tc*, welche mit ihren Zweigen zusammen, vermittelst der Endzellen $l'k'$ anastomosiren, wie aus Fig. 3 u. 4 ersichtlich ist. Die Zellen laufen mit den Contouren des Zahnes parallel und haben ziemlich bestimmte Richtungen, die mit den Biegungen der Röhrchen *tc* übereinstimmen.

Ferner sieht man, dass obgleich dieser Aussenzahn eines jungen Krokodils, wie aus Taf. III, Fig. 5 und Taf. VII, Fig. 1 hervorgeht, eine vollkommen ausgebildete Form aller Theile und der Gewebe darbietet, diese Gewebe doch noch lange keine solche Festigkeit erreicht haben, wie beim Zahngewebe eines alten Krokodils, was man bei $^{450}/_{1}$ f. Vergr. des Baues des Dentins, des Emails und des Cements, des Osteodentins und der Dentinröhrchen *tu* sehen kann; diese Röhrchen bilden gleichsam eine Fortsetzung der Reihen $t'u'$, welche aus den primären Zellen entstehen.

Am Querschnitte des Zahnes Taf. VII, Fig. 2 sieht man, dass die äusseren Kanten xx von Dentin und die Reifen $x'x'$ vorzüglich vom Schmelz gebildet werden. Das Email bleibt auch auf den Zähnen ausgewachsener Individuen etwas uneben. Taf. VII, Fig. 8.

Auf Taf. III, Fig. 6 und Taf. VII, Fig. 5 u. 6 sind Durchschnitte eines Wechselzahnes in den oben angegebenen Vergrösserungen, sowohl der Contour als des Gewebes dargestellt.

Der Querschnitt des Kronentheils dieses Zahnes zeigt eine Längenstreifung des Schmelzes auf der innern oder concaven Zahnseite und eine besondere Form in der Contour selbst, welche ihn sowohl vom Querschnitte des Aussenzahnes Fig. 2 wie auch von dem vollkommen ausgewachsenen Zahne Taf. III, Fig. $4a'$ unterscheidet. Das beweist, wie sehr sich die Form der Zähne bei diesen Thieren zur Zeit der Entwickelung veränderte.

Aus den Beobachtungen R. Owens (vergl. pag. 294 Odont). und aus den meinigen ist ersichtlich, dass bei den Krokodilen sehr häufig, noch zu der Zeit, wo der junge Wechselzahn im alten Zahne steckte, der Keim eines neuen Wechselzahnes sich an der Basis der Wurzel des ersten Wechselzahnes ganz in demselben Verhältniss, wie sein Vorgänger und dem innern Zellenprocess entsprechend, zu entwickeln begann. Solch' eine folgerechte Ordnung im Zahnwechsel dieser kaltblütigen, fleischfressenden Eidechsen dauert offenbar ununterbrochen während ihres ganzen, langen Lebens fort.

Beim Untersuchen des Längenschnitts des Wechselzahnes sieht man, dass der Zahn noch aus der Krone allein besteht, die aus undichtem mit Schmelz bedecktem Dentin gebildet ist und dass sich unter der Zahnkrone eine weite Höhle im Osteodentin befindet, die noch nicht von den cylindrischen Wänden der Wurzel begrenzt ist. Daraus erhellt, dass die Zahnbildung bei den Krokodilen dem allgemein bis jetzt beobachteten Gesetze unterworfen ist, d. h., dass sie mit der Bildung der Krone beginnt, wobei aus dem Zahnbrei allmählig das Dentin und Email entstehen, wie das bei der Untersuchung der Zahnbildung bei *Ichthyosaurus Campylodon* Owen dargestellt ist und wovon uns die Abbildungen Taf. VII, Fig. 5—7 überzeugen, denn nur beim Wachsthum, sowohl der ersteren, als auch der Wechselzähne eines jugendlichen Crocodilus niloticus wächst allmählig die Wurzel derselben; die Wurzelwände werden nach und nach dicker von oben an und gleichzeitig bilden sich auch die feinen Kanälchen in der Zahnsubstanz oder dem Zahnbeine, — dem Dentin.

Die Dentinverdickung macht sich an der Innenseite kenntlich, d. h. von der Seite der Zahnhöhle (pulp-cavity), welche mehr und mehr abnimmt und zur Spitze hin dünner wird; ganz an der Spitze des Zahnes erscheint sie anfänglich als ein aufsteigender Kanal *à*, Taf. VII, Fig. 1, hernach hinterlässt sie eine Spur ihrer Existenz bloss dadurch, dass man nach dieser Richtung eine Ausstrahlung der Dentinkanälchen *tu* in die Spitze der Krone mit den feinsten Verzweigungen *tc* bemerken kann; letztere sind hier am längsten.

Wenden wir uns nun zu den mikroskopischen Untersuchungen der Zähne von *Polyptychodon interruptus* Ow. aus dem Sewerischen Osteolith des Kurskischen Gouv., deren Abbildungen wir auf Taf. III, Fig. 1, 1*a*, 1*b*, 1*c* und auf Taf. IV, Fig. 1—6 sehn, so finden wir eine vollständige Erklärung des Baues ihres Zahngewebes und auf Taf. III, Fig. 2, 2*a* u. 2*b*, und Taf. V, Fig. 1—5 sehn wir die Bildung des Gewebes in den Wechsel- oder noch in der Entwickelung begriffenen Zähnen derselben Art.

Taf. III, Fig. 1, zeigt in $^2/_1$ f. Vergr. der Contour und $^{20}/_1$ f. lin. Vergr. der Gewebebildung den Längenschnitt der Krone und einen Theil der Wurzel des Zahnes, Fig. 1*a*, den Querschnitt der Kronenspitze desselben Zahnes in $^8/_1$ f. Vergr. und die Bildung des Gewebes in $^{20}/_1$ f. lin. Vergr.

An Fig. 1*b*, sehn wir einen Theil des Querschnittes derselben Krone, doch näher zum Zahnhalse, und an Fig. 1*c*, einen Theil des Querschnittes des Zahnhalses selbst in den genannten Vergrösserungen.

Alle diese Abbildungen erklären: 1) dass der grösste Theil des ganzen Zahnkörpers aus ächtem Dentin *b* besteht, welches sehr dicht ist und eine geschichtete Structur mit concentrischen Contourlinien darbietet; (vergl. Dr. J. Kollman Studien. Zahnbein, Schmelz und Cement. Zeitschr. f. Wiss. Zool. v. T. Siebold, Bd. 23, Heft 3, 1873) dass seine ganze Dicke von Dentinkanälchen *tu* durchzogen ist, die sich von der inneren Zahnhöhle (Pulp-cavity) mehr oder minder normal bis zur äusseren Contour hin erstrecken, stellweis (zum Hals herabsteigend) Curven und Krümmungen bilden und im Gipfel der Krone eine regelmässigere Richtung nach oben annehmen. Solche Kanälchen kommen im Gipfel der Zahnkrone, zur Mittellinie oder verticalen Zahnaxe zusammen, wobei sie in ihrer allgemeinen Richtung eine Biegung (Convexität) von unten nach oben zeigen, wie beim Krokodil und dem Ichthyosaurus. 2) Dass die innere Zahnhöhle (Pulp-cavity) *a* nicht gar zu weit in die Krone aufsteigt und sich in der Wurzel erweitert. Im Gipfel und an den Seiten dieser Zahnhöhle sind noch Nachbleibsel von unversehrtem Osteodentin oder Breicement *d''* zu bemerken. 3) Dass das Email (Vitrodentin) am obern Theile der Zahnkrone dick ist und dass ihre ganze Reifung aus ihrem eigenen Gewebe gebildet ist, in dem bisweilen auch concentrisch geschlossene Contourlinien oder Streifen zu sehn sind, die dem Rande parallel laufen und von den Strahlen *td* gebildet sind; man sieht auch Risse *ss*, welche dem Zahne entlang ziehen. Solche, von den Strahlenröhrchen *td* gebildet, entsprechen den kurzen, welligen Linien, die nach der Meinung Kollmann's von den schwachen und starken Knickungen der Röhrchen gebildet werden und 4) dass der gewöhnliche Cement (Vasodentin), welcher die Bildung des harten, schwammigen Knochens darstellt, unter den Geweben dieser Zähne garnicht gefunden wird; die feine, äussere Schicht aber, welche die Wurzel bedeckt, bietet die Structur des ganz schwachen, knorpligen Cements *d'''*. Die Umhüllung *d'*, d. h. die feine Schicht des äussern Cements, welche das Email umgiebt, ist auf dieser Krone bloss stellweise zu sehn. Der Querschnitt des Zahnes im Halstheile Taf. III, Fig. 1*c* zeigt die Fortsetzung der Furchen auf dem Email in der Dentinschicht durch vorläufige Zusammenhäufung von knorpligem Cement *d'''*.

Vergleicht man diesen Hinweis mit der Bildung des Emails und des Cements, sowie mit der beobachteten Bildung der Kanten an dem Krokodilzahne Taf. III, Fig. 4*a*, so kann man glauben, dass das Email, welches die Streifen auf der Zahnkrone gebildet, auch bei den Zähnen des Polyptychodon, zur Zeit ihrer Entwickelung, seine anfängliche Structur nach und nach verlor und in Dentin überging.

Fernere mikroskopische Beobachtungen von Zähnen eines ausgewachsenen ***Polyptychodon interruptus*** Ow., Taf. IV, erklären Folgendes: Fig. 2, die Structur des Dentins und des Email im Längenschnitte der Krone bei $^{450}/_{1}$ f. lin. Vergr., Fig. 1, 3, 4 die Structur des Email, des Dentins und des schwachen Cements in den Querschnitten der Zahnkrone, des

Zahnhalses und der Zahnwurzel bei derselben lin. Vergr., Fig. 6, die Structur des Email und der Uebergangsschicht zum Dentin im Längenschnitte der Krone $^{900}/_{1}$ f. lin. Vergr. und Fig. 5, die Structur der Gewebe derselben Schicht und in derselben Vergr. des Querschnittes der Hälfte eines Streifes der Emaildecke der Krone.

Solche Beobachtungen haben mich zur Ueberzeugung gebracht, dass das wichtigste Unterscheidungsmerkmal der Zähne von *Polyptychodon interruptus* darin liegt, dass in der Zahnmasse das dichte Dentin *b*, das aus primärer Substanz besteht, vorwaltet und dickere Dentinkanälchen *tu* aufweist, deren mittlerer Durchmesser sicherlich nicht weniger als 0,0003 Lin. beträgt, der Abstand zwischen ihnen aber misst 0,001 Lin. Solche Dentinkanälchen zeigen bei diesen Zähnen keine weitere Theilung oder Verzweigung, die bei den Krokodilen und Ichthyosauren deutlich zu erkennen ist. Die Kanälchen in der Spitze der Krone laufen von der mittleren Linie des Zahnes zu seiner Peripherie, immer feiner werdend und die normale Richtung zur Peripherie beibehaltend, weshalb sie strahlenförmig auseinander gehende Linien mit einer gewissen, nach unten gerichteten, Concavität bilden. Weiter unten an der Krone, wo in ihrem Innern die Höhle beginnt, nehmen die Kanälchen *tu* ihren Anfang in dieser Höhle, Taf. VI, Fig. 1—3. Diese Kanälchen werden in der Mitte des Dentins von einem concentrischen Streif *b'b'* unterbrochen, welcher aus Osteodentin *d''* oder aus angehäuften sich verkalkenden Zellen *l'k'* besteht. Nach Dr. J. Kollmann ist das wahrscheinlich die durch regelmässig angeordnete Interglobularräume hervorgebrachte Linie (vergl. Zeitschr. f. Wiss. Zool. v. Siebold, Bd. 23, Heft 3, 1873, über Zahnb., Schmelz und Cement). Einen ebensolchen Streif habe ich auch an den Zähnen von *Crocodilus niloticus* bemerkt, an denen des *Ichthyosaurus Campylodon* jedoch ist dieser Streif nicht vorhanden.

Im vorliegenden Falle, d. h. im Zahne des *Polyptychodon interruptus* ist dieser Streif weniger als 0,001 Lin. breit und theilt das Dentin in zwei Schichten, oder den ganzen Dentinconus der Krone in zwei hohle, einander aufgesetzte Kegel. Der unterbrochene Lauf der Dentinkanäle *tu* bildet in beiden Abtheilungen einander ähnliche Knickungen. Ausserdem sind im Dentin auch dieser Zähne Abtheilungen der Schichtung *mb* zu sehn, welche meiner Meinung nach auch aus Zellen *l'k'* bestehn, vermittelst derer die Dentinkanälchen mit einander anastomosiren. Dieser offenbar allgemeine Charakter der Bildung der Streifen *b'b'* und der Scheidelinien der Schichtung veranlasst zur Frage, ob dieser Streif *b'b'* nicht die beiden wichtigsten Wachsthumsperioden des Zahnes scheidet, d. h. ob er nicht den Theil des Zahnes, dessen Bildung in der Auffindungsperiode, unter dem Einfluss des vorangegangenen Zahnes statt fand, von dem Theile des Zahnes trennt, welcher sich gebildet, nachdem der Zahn schon seine Thätigkeit begonnen hatte, wobei er sich bedeutenden äusseren Einflüssen aussetzte.

In der Uebergangsschicht des Dentins in Email zeigen die Dentinkanälchen *tu*, die ganz fein werden, keine Unterabtheilungen. Diese feinen, unter einander parallelen Enden der Röhrchen *tc* vereinigen sich mit bedeutenden Höhlungen, welche offenbar besondere Varie-

täten der Zellen *l'k'* darstellen. Dabei nehmen diese Höhlungen mehr und mehr eine parallele Richtung den Zahn hinauf an, wo, wie Taf. IV, Fig. 2 u. 6 zeigen, auch die Krümmung der Kanälchen *tu* und der Röhrchen *tc* bemerkbar ist. Weiter im Blasteme sind nur die Emailzellen *t'c'* zu sehn (Fig. 2, 5 u. 6), hinter denen sich zur äusseren Peripherie des Zahnes die Strahlenröhrchen *td* verbreiten und das Email dieselbe Structur zeigt, wie bei den Zähnen von *Ichthyosaurus Campylodon* und *Crocodylus niloticus*, nur mit dem Unterschiede, dass sowohl die Structur, wie auch der ganze Bau dieser Zähne weit gröber ist. Bei den Zähnen des Krokodils sind, bei bedeutender Vergrösserung, selbst die Strahlenröhrchen *td* kaum sichtbar.

In den Zähnen des Krokodils habe ich keine Emailzellen *t'c'* gefunden. In alten Zähnen von Ichthyosaurus habe ich diese Zellen *t'c'* in ziemlicher Anzahl angetroffen. Solche Emailzellen sind von den Knochenhöhlen *lk* leicht dadurch zu unterscheiden, dass sie minder gross sind und eine ziemlich einförmige, obwohl etwas ausgezogene, runde Gestalt haben und als isolirte Körnchen, ohne Sprossen oder Ausläufer *tl* liegen und keine sichtbare Communication unter einander aufweisen.

Die Bildung der Dentinkanälchen *tu* aus den Streifen *t'u'* vollzog sich, wie am Querschnitte des Halses und der Wurzel des Zahnes, Taf. IV, Fig. 3 u. 4 zu sehn, in derselben Weise, wie wir es bei der Untersuchung der Ichthyosaurus-Zähne gesehn, allein das Cement dieser Zähne geht nirgends in schwammige Knochensubstanz über, sondern weist bloss eine Veränderung der feinen, festen Knochensubstanz auf, die wir an Fig. 3 sehn können und die am Halse dieser Zähne Taf. III, Fig. 1*c* die Reifung der Oberfläche der Dentinmasse vollständig ausglättet.

Auf der Krone bestehn die Streifen, wie wir Taf. III, Fig. 1*a* und Taf. IV, Fig. 1 u. 5 sehn, aus festem Email, in welchem die gestrahlte Schicht und die Emailzellen *t'c'* eine wellige, concentrische Richtung haben, die den äusseren Contouren der Emaildecke der Krone parallel läuft. Je mehr sich jedoch die Emailschichtung dem Dentin nähert, desto schwächer werden die Krümmungen dieser welligen Streifen der Schichtung.

Auf Taf. XI, Fig. 1 ist ein Theil des Längenschnittes vom Zahne eines *Polyptychodon interruptus* bei $^{600}/_{1}$ f. lin. Vergr. abgebildet und man sieht die Anordnung und die Structur der Zahngewebe am untersten Rande des Emails am Zahnhalse.

Diese Zeichnung bezieht sich auf die vollkommen ausgewachsenen, Taf. I u. II, Fig. 1 u. 2 abgebildeten Zähne. Hier sieht man ganz klar, wie aus dem Knorpelcement *d'''* die primären Zellen *t'u'* und aus letzteren die Dentinkanälchen *tu* sowohl, wie die Zellen *l'k'* hervorgegangen sind.

In der Schmelzschicht *c* selbst sind wellige Streifen zu bemerken, welche von den Strahlenröhrchen *td* und den Schmelzzellen *t'c'* gebildet werden.

Der Längenschnitt des Kronentheiles Taf. III, Fig. 2, zeichnet sich durch bedeutende Grösse der Innenhöhle *a* aus, welche die ganze Breite des Zahnhalses einnimmt und sich als aufsteigender Kanal *á* in die Spitze der Krone zieht. Dieser Umstand weist klar auf das

jugendliche Alter dieses Zahnes hin, das sowohl dadurch bestätigt wird, dass die Wurzel dieses Zahnes sich noch nicht zu bilden begonnen und der Zahnhals selbst noch nicht gehörig ausgebildet ist, (denn die Innenhöhle *a* müsste bedeutend verengt sein durch Verdickung ihrer Wände) als auch dadurch, dass das Email auf der Zahnkrone eine schwache Schicht bildet.

Die mikroskopische Beobachtung der Bildung der Gewebe in diesem Zahne, welche auf Taf. V dargestellt sind, zeigen an Fig. 1 den Bau des Dentins und des Schmelzes im Längenschnitt der Krone bei $^{450}/_{1}$ f. lin. Vergr. und an Fig. 3 ihre Structur in demselben Durchschnitt, aber bei $^{900}/_{1}$ f. lin. Vergr. Fig. 2 u. 4 bieten uns die Structur des Emailgewebes dar, nebst der Uebergangsschicht zum Dentin bei $^{900}/_{1}$ f. lin. Vergr., aber im Querschnitte des Zahnes. Der erste dieser Durchschnitte, Fig. 2, ist einem Wechselzahne entnommen und der zweite, Fig. 4, stammt von einem älteren oder ausgewachsenen Zahne.

Aus allen diesen Abbildungen ist ersichtlich, dass der grösste Theil des Körpers auch dieses Zahnes aus ebensolchem Dentin besteht mit den Merkmalen von Schichtung, in der die Kanäle dick sind und keine Theilungen aufweisen; dass diese Kanälchen von der Innenhöhle ausgehen und sich, wenn auch in welligen Linien, so doch in der allgemeinen, normalen Richtung zur Peripherie des Zahnes ausbreiten. Diese Kanälchen stossen in der Spitze der Krone in der verticalen Zahnaxe zusammen und das beweist, dass der Kanal *á* der Zahnhöhle früher (d. h. als der Zahn noch jünger war) sich noch höher hinauf erstreckte.

Der Durchmesser der Dentinkanälchen sowohl, wie auch die Abstände zwischen ihnen, sind dieselben wie bei den vollkommen ausgebildeten Zähnen dieser Art.

Die Emailschicht auf dem Kronentheile ist noch dünn und die Streifung besteht nur aus Emailgewebe, auf dem man die Krümmungen der Strahlen *td* sieht.

Die feine äussere Cementschicht *d'* auf dem Email erscheint in der Periode der Verkalkung ihrer Gewebe.

Die concentrischen Streifen *b'b'* sind in diesem Zahne noch nicht zu bemerken, was mit der vorausgesetzten Zeit der Bildung übereinstimmt.

Die Dentinkanälchen zeigen auch hier, in der Uebergangsschicht vom Dentin zum Email, obgleich sie ganz fein werden, keine Theilungen, sondern vereinigen sich durch feine (und zwar ziemlich parallel laufende) Kalkröhrchen *tc* mit bedeutenden Höhlungen, welche, wie es scheint, eine besondere Varietät der Zellen *l'k'* vorstellen. Diese Höhlungen nehmen, wie man auf Taf. V, Fig. 3 sieht, eine, der Höhe des Zahnes ziemlich parallele Richtung an, wobei auch hier Krümmungen an den Kanälchen *tu* selbst und an den Röhrchen *tc* wahrgenommen werden. Hat man jedoch das Email eines mehr ausgewachsenen Zahnes Fig. 4 der Schichtung parallel durchschnitten und die Schnittflächen *a*, *a'* und *a''* erhalten, wie Taf. V, Fig. 5 zeigt, so sieht man in der Fläche *a* bei $^{900}/_{1}$ f. Vergr., dass die in der gleichförmigen Blastemschicht zerstreuten Emailzellen *t'c'* sehr wenig zahlreich vorhanden sind. In der Fläche *a'* sieht man bloss den Beginn der Bildung der Strahlenröhrchen *td*, welche die ursprüngliche, von mir mit *t'd'* bezeichnete Richtung die Zahnhöhe entlang aufweisen.

In der Fläche a'' sieht man schon deutlich das Zusammenkommen der Röhrchen *td* in der Vereinigungslinie $t''d''$, entweder durch Anastomosation oder bloss durch Biegungen.

Auf Taf. V, Fig. 2 u. 3 sieht man deutlich die beginnende Bildung $t'd'$ der Strahlenröhrchen *td*, welche sowohl die Structur, wie auch die Schichtung des Emails darbieten und Fig. 4 zeigt im Querschnitt des Schmelzes eines ebensolchen, aber älteren Zahnes, als der Wechselzahn, eine grössere Ausbreitung der Schichtung und ein ausgesprochenes Auftreten der Schmelzzellen $t'c'$, die man im Wechselzahne nicht findet (vergl. Taf. V, Fig. 2 u. 3).

Dabei muss bemerkt werden: da aus Taf. IV, Fig. 2, 5 u. 6 zu ersehn, dass die Emailzellen $t'c'$, welche im Wechselzahne nicht wahrzunehmen sind und bloss in einem älteren Zahne Taf. V, Fig. 4 erscheinen, hier schon den grösseren Theil der Dicke der Emailschicht einnehmen und (wie auf Taf. IV, Fig. 2 zu sehn) stellweis sogar die äussere Peripherie des Zahnes erreichen — so giebt uns dieser Umstand einigermaassen die Möglichkeit, das relative Alter dieser Zähne nach ihrer mikroskopischen Structur, zu unterscheiden.

Auf Taf. XI, Fig. 2 ist ein Theil des Längendurchschnitts eines Wechselzahnes von *Polyptychodon interruptus* bei $^{600}/_1$ f. lin. Vergr. dargestellt und man sieht daselbst die Lage und die Structur der Gewebe am untern Rande des Emails am Zahnhalse.

Diese Studie bezieht sich auf den Taf. II, Fig. 3 abgebildeten Zahn und man kann auch an ihr die Bildung der Kanälchen *tu* aus den Reihen $t'u'$ der verkalkten Zellen $l'k'$ sehn; in der Emailschicht aber sind bloss Spuren der Zellen $t'c'$ und der Strahlenröhrchen *td* zu erkennen.

Ueberhaupt sind alle Gewebe dieses Zahnes dünner, was ja seinem zarten (Jugend —) Alter entspricht und wodurch auch alles früher Gesagte bestätigt wird.

Die Wirbel, welche in natürlicher ($^1/_1$) Grösse auf Taf. VIII u. IX abgebildet sind, können auf Grund aller früheren Erklärungen und angegebenen Dimensionen als einer Art der *Sauropterygia* Owen angehörig betrachtet werden, da sie sich hinreichend von den Wirbeln der *Ichthyopterygia* unterscheiden, besonders die auf Taf. IX dargestellten.

Das Lager und der Fundort dieser Wirbel widersprechen dem auch nicht, denn sie sind alle, im Sewerischen Osteolith, zusammen mit den auf Taf. I u. II dieses Abschnittes dargestellten Zähnen und dem Zahne des *Lütkesaurus* gefunden worden.

Der Wirbel Taf. VIII, Fig. 1 *A* u. *D* zeichnet sich vorzüglich durch ausserordentliche Grösse seines Centrums aus, dessen Höhe und Breite je 5 Zoll oder 0,127 m. und dessen Länge 2 Zoll oder 0,05 m. beträgt.

Zeichnung *A* ist die Ansicht der vorderen Gelenkfläche und *D* die Seitenansicht; *gg* bezeichnen die Gelenkhügel mit den Bogen der Dornfortsätze, *rn* die Gelenkhöcker für die Rippen und *s* die Basis des Rückenmarkkanals.

Wäre dieser Körper der Wirbelkörper eines Ichthyosaurus, so müsste man ihn, nach der Lage der bezeichneten Gelenktheile mit den Rückenbogen und Rippen und wegen der bedeutenden Breite der Basis des Markkanals für einen vordern Rückenwirbel, oder für einen Wirbel des Brustgürtels halten, wofür der Beweis ausführlich bei der Beschreibung des *Ichthyosaurus Campylodon* Cart. geliefert wird. Indem ich jedoch eine grössere Bedeutung der besondern Bildung der Gelenkflächen dieses Wirbelkörpers beilege, wodurch sich diese Gelenkfläche von der eines Ichthyosauruskörpers unterscheidet, sowohl durch die Schalenform der centralen Vertiefung, als auch durch die grössere Glätte der breiten Kante, die diese Schalenvertiefung umgiebt (vergl. Taf. VIII, Fig. 2 *c*), weise ich, im Einverständniss mit der erwähnten Voraussetzung Prof. R. Owen's, diese Wirbel der Gattung Polyptychodon Ow. als einem Thiere der Familie Sauropterygia zu.

Die Berechtigung zu einer solchen Bestimmung dieses Wirbels gründet darin: 1) dass der Charakter dieses Wirbels durch alle, Taf. VIII vorgeführten, Wirbel sich bestätigt, welche alle von Thieren dieser Art, nur aus verschiedenen Altersstufen, herrühren, 2) dass die Wirbel Taf. IX zum Theil mit denen auf Taf. VIII, Fig. 1 u. 2. Aehnlichkeit haben, doch bloss hinsichtlich der Art und des Alters des Thieres, denn sie stammen aus dem Vordertheile des Halses.

Der auf Taf. VIII, Fig. 1 dargestellte Wirbel ist derselbe, welchen ich im Jahre 1857 die Ehre hatte dem hochgeehrten Herrn Prof. R. Owen vorzulegen, die Wirbel aber Fig. 2 — 4 derselben Tafel, wie auch die Wirbel auf Taf. IX bilden auch gegenwärtig ein Eigenthum meiner Sammlung.

Der Wirbel Taf. VIII, Fig. 2 *a* und *c* ist ein charakteristischer Repäsentant des Typus der beschriebenen Wirbel, doch, wie aus der Abbildung selbst ersichtlich ist, von geringerer Grösse, als der Wirbel Fig 1. Abbildung *a* zeigt die Gelenkfläche von der einen Seite, die andere Seite des Wirbels ist in der Steinmasse eingebettet. Die Zeichnung *c* stellt die Contouren des Querschnitts dieses Wirbelkörpers vor und weist eine bedeutende Abweichung von der Form des Querschnitts der Ichthyosaurus-Wirbel überhaupt, wie der des *Ichthyosaurus Campylodon* Cart. im Speciellen auf.

Die Seiten dieses Wirbelkörpers sind bedeutend abgerieben.

Wirbel Taf. VIII, Fig. 3 *a* Ansicht der Gelenkfläche, *c* des Querschnitts und *d* von der Seite. Dieser Wirbel zeichnet sich aus: 1) durch seine verhältnissmässig geringe Länge, 2) durch die Ebenheit seiner Gelenkflächen bei weit grösserer Breite des Raumes, welcher die centrale Schalenvertiefung umgiebt. Derartige Unterschiede weisen auf den typischen Charakter dieser Art von Wirbeln und stimmen mit der Muthmaassung überein, dass dieser Wirbel einem jungen Individuum angehört hat.

Ein ähnlicher Wirbel ist auch auf Taf. VIII, Fig. 4 *a* und *d* abgebildet, doch sind an ihm die oben besprochenen typischen Kennzeichen weniger deutlich ausgeprägt.

Auf Taf. IX, Fig. 1 u. 2 sind auch in natürlicher ($^1/_1$) Grösse Wirbelkörper eines grös-

seren Thieres dargestellt. Die Zeichnungen *a* u. *a* geben die Ansicht ihrer vorderen, oder zum Kopf gewandten Gelenkflächen, *dd* ihre Seitenansicht.

Diese Wirbel haben zum Theil eine typische Aehnlichkeit mit den beschriebenen Wirbeln Taf. VIII und denselben Charakter wie die bei R. Owen abgebildeten Wirbel (vergl. Monogr. of the fossil. Rept. of the Cretaeceous and Purbeck strata; including Supplement № III Cretac. Pterosauria and Sauropterygia. Palaeont. Society 1860, pag. 24, Pl. VI).

Diese Wirbel sind biconcav, d. h. sie haben den Charakter der Ichthyosaurus-Wirbel. Bei verhältnissmässig geringer Länge zeigen ihre Gelenkflächen bedeutende Vertiefungen in Form einer Schale mit leicht zurückgebogenen Rändern.

Diese Exemplare sind stark abgerieben, doch dessenungeachtet sind an ihren Seitenflächen die Gelenkstellen *gg* für die Bogen der Rückensprossen, *rn* für die Rippen, sowie die Basis *s* des Rückenmarkkanals noch zu unterscheiden.

Im Centrum des Wirbelkörpers Fig. 1, wo die Gipfel der conisch eingedrückten Gelenkflächen sich nähern und man ein kleines, rundes Löchelchen sieht, ist die Dicke des Wirbelkörpers sehr unbedeutend, wie bei allen Wirbeln des Ichthyosaurus; die eigentliche Knochenmasse ist schwach, was uns zum Theil schon zur Vermuthung berechtigt, dass das Verhärten dieser Wirbel derselben Verknöcherungsordnung unterworfen war, wie bei der Chorda dorsalis bei den Wirbelkörpern der Knorpelfische.

Vergleicht man die vorliegenden Wirbel mit denen von R. Owen, Pl. 6, so kann man glauben, dass diese englischen Wirbel nicht allein denselben Typus aufweisen wie die unsern, sondern man kann auch annehmen, dass unsere Wirbel zur Zahl der vordern Halswirbel gehören, die sich übrigens hinter der Axis befinden, d. h. als 3-ter oder 4-ter Wirbel, wenn nur auch bei diesen Thieren Atlas und Axis untereinander verkittet waren.

Die von mir beschriebenen Wirbel aus dem Sewerischen Osteolith habe ich nebeneinander liegend gefunden; doch konnten sie ohne Mühe und ohne beschädigt zu werden, von einander getrennt und von der Matrix, worin sie gebettet waren, gereinigt werden. Die Versteinerung selbst ist sehr hart und fest. Ihre Oberfläche ist weit rauher als bei den Wirbeln auf Taf. VIII und die Masse selbst dichter.

Bevor ich mich zu den mikroskopischen Beobachtungen dieser auf Taf. X abgebildeten Wirbel wende, muss ich erklären, dass einer gleichen Untersuchung auch die Gewebe der Wirbel auf Taf. VIII, Fig. 2 u. 3 und Taf. IX, Fig. 1 von mir unterzogen wurden.

Die Abbildungen dieser Gewebe sind in folgender Ordnung dargestellt: die oberste Reihe der Zeichnungen stellt die Gewebe in der Längenrichtung dar, d. h. der Länge der

Wirbelkörper nach in $^{95}/_1$ f. lin. Vergr. In der zweiten Reihe befinden sich Abbildungen ebensolcher Durchschnitte in $^{600}/_1$ f. Vergr., aber nur der Structur des Gewebes; die Contouren der Medularkanäle und der Markhöhlungen sind nur in $^{300}/_1$ f. Vergr., also um die Hälfte kleiner, als die Gewebe dargestellt, um, wenn auch nur einigermaassen, den Charakter ihrer Lage oder Anordnung zu zeigen.

Die dritte Reihe nehmen die Zeichnungen der Querschnitte des Knochengewebes bei $^{95}/_1$ f. lin. Vergr. ein und die vierte Reihe enthält Theile derselben Zeichnungen in $^{300}/_1$ f. Vergr. der Markkanäle und Höhlungen und in $^{600}/_1$ f. lin. Vergr. der Gewebe selbst.

Bei Betrachtung dieser Zeichnungen und Vergleichung derselben mit den Untersuchungen der Wirbel von *Ichthyosaurus Campylodon* Cart., sieht man, dass sie gleichartiges Gewebe aufweisen, in welchem die Knochenzellen *lx* eine ähnliche Form und ebenso kurze und gleichförmige Ausläufer *tl* haben, die man übrigens an den Querschnitten besser wahrnehmen kann.

Das Gewebe des Wirbels Taf. VIII, Fig. 3 *a*, *c*, *d*, im Längen — und im Querschnitt $^{95}/_1$ bis $^{600}/_1$ f. Vergr. auf Taf. X, Fig. 2, 2*a*, 2*b*, 2*c* dargestellt, zeigt eine losere, schwächere Structur, als im Wirbel Taf. VIII, Fig. 2. Die Medullarkanäle *vn* dieses Gewebes sind grösser und leer, d. h. nicht mit Knorpelgewebe *d''* ausgefüllt, das nur stellweise angetroffen wird, wie aus Fig. 2*b* zu ersehn. Man muss annehmen, dass das daher kommt, dass der Breicement *d''* in diesem Wirbel so schwach war, dass er sich unter den Bedingungen der Versteinerung dieses Wirbels nicht conserviren konnte. Die Knochenhöhlen *lk* sind im grössten Theile dieses Wirbels weniger zahlreich, als in den Wirbelkörpern Taf. VIII, Fig. 2 *a* und *c* und Taf. IX, Fig. 1 (vergl. Taf. X, Fig. 1 u. 3), was unter Anderem eine weit weniger dichte Structur der Knochenmasse selbst bezeugt. Ausserdem bemerkt man Fig. 2 *a* u. *c* um einige Knochenhöhlen *lk* herum eine concentrische Schattirung.

Die Zeichnungen auf Taf. X, Fig. 1, 1*a*, 1*b* und 1*c* zeigen den Bau der Wirbelknochen Taf. VIII, Fig. 2, aus dem wir sehen, dass dieser Wirbel, obwohl er beim Tode des Thieres noch im Wachsthum begriffen war, doch einem weit älteren Individuum angehört haben muss, als der Wirbel auf Taf. VIII, Fig. 3. Zu solch' einem Schluss gelange ich auf Grund dessen, dass die Kanälchen der Knochenzellen *lk* in ihm grösser und deutlicher sind; ferner noch deshalb, weil in den Medularkanälchen *vn* der Cementbrei *d''* schon weit härter war und versteinern konnte und weil man in ihm schon die Bildung der Faserknochenschichte *bl*, die von feinen Röhrchen *tc* durchsetzt ist, sieht.

Die Zeichnungen auf Taf. X, Fig. 3, 3*a*, 3*b* und 3*c*, welche zu den Wirbelkörpern auf Taf. IX, Fig. 1, 2 gehören, zeigen in der Structur ihrer Gewebe einige Verschiedenheit von den früher beobachteten. Diese Verschiedenheit besteht mehr darin, dass die Knochenzellen dieser letzten Wirbel, wie auch aus der Abbildung selbst ersichtlich ist, schmäler sind, namentlich wenn man die Breite der Knochenzellen in Fig. 1 u. 2 auf Taf. IX bei $^{600}/_1$ f. Vergr. von 0,0025 bis 0,004 m., oder in natürlicher Grösse von 0,0000004 bis 0,0000007 m. annimmt, so wird die Breite der Knochenzellen Fig. 3*a* und 3*c* Taf. X

nicht mehr als 0,0025 m. bei $^{600}/_1$ f. Vergr. oder 0,0000004 m. in natürlicher Grösse betragen.

In den Medularkanälen, welche mit weichem Knorpel d'' angefüllt sind, bemerkt man sich gleichsam verkalkende Knorpelzellen[1]).

II.

Gattung Thaumatosaurus Meyer.

H. v. Meyer. Thaumatosaurus Oolithicus aus dem Oolith von Neuffen. Palaeontographica Band VI 1856 — 1858, pag. 14, Taf. IV und V.

Von den Thaumatosaurus-Ueberresten, die in dem Oolith unweit Neuffen in Würtemberg zusammen mit: *Belemnites Aalensis*, *Ammonites coronatus*, *Pholadomya Murchisoni*, *Ostrea eduliformis* und anderen Muscheln gefunden wurden, erklärt H. v. Meyer, es sei aus denselben ersichtlich, dass die Zeit der die Ueberreste der Wunder-Eidechse enthaltenden Ablagerung mit der Zeit der Bildung des mittleren und untern Ooliths zusammentraf und dass die Ablagerung mit den Thaumatosaurus-Ueberresten vielleicht die oberste Abtheilung der genannten Oolithe bilden, sodass Thaumatosaurus Meyer und Ischyrodon Meriani aus dem Oolith zu Frickthal, nach der Zeit ihrer Existenz kaum verschieden waren.

Bei der Beschreibung der Thaumatosaurus-Ueberreste bemerkt H. v. Meyer ferner: «keiner der Zähne ist vollständig. Man erkennt indess doch, dass sie mit langen starken Wurzeln in getrennten Alveolen befestigt waren. Die Wurzel, der stärkste Theil des Zahnes, erreichte über 0,03 m. Durchmesser. Im Innern ist die Wurzel sehr hohl. An der Basis der Krone war der Zahn nicht eingezogen; man erhält hier bei einem Zahn von 0,03 m. Wurzelstärke fast 0,028 m. Durchmesser, der sich zur Höhe der Krone wie 1: 3 ver-

---

1) Ich muss hier bemerken, dass dieser Theil schon vollständig beendet war, als ich durch die Liebenswürdigkeit des Conservator's des Geol. Museums der Moskauer Univ. Herrn Mag. K. O. Milaschewitsch das ihm zugeschickte Buch: «The Quarterly Journal of the Geological Society» № 128, London 1876 erhielt, in dem unter Art. 45, pag. 433 eine Abhandlung von Prof. Seeley, Esq., enthalten ist: «On an associated Series of Cervical and Dorsal Vertebrae of Polyptychodon from the Cambridge Upper Greensand, in the Woodwardian Museum of the University of Cambridge». Bekanntlich bilden die Schichten des Grünsandes von Cambridge mit ihren phosphors. Ablagerungen eine Parallele zu unsern Grünsandschichten mit ihrem Sewerischen Osteolith. Im russ. Grünsande finden sich entschieden den engl. vollkommen ähnliche fossile Amphibien und deshalb ist die Abhandlung des Prof. Seeley interessant. Zwar erklärt sie Vieles schon aus den Beschreibungen Owen's mehr oder weniger Bekannte, doch spricht Mr. Seeley auf Grund seiner Untersuchung von Wirbeln, die Vermuthung aus, dass in der Sammlung von Cambridge die Species Polyptychodon interruptus Owen nicht allein vertreten ist.

halten wird. Krone und Wurzel bieten einen rundlichen Querschnitt dar. Die Krone war konisch, nur schwach gekrümmt und dabei an der einen Seite, vermuthlich der innern, gerader, als an der entgegengesetzten. Die Höhle in der Wurzel begiebt sich auch in die Krone, die dünn beschmelzt und durch Leistchen gestreift war. Die Streifung gehört dem Schmelz allein an und wird auf der von ihm bedeckten Knochensubstanz nicht wahrgenommen. Hierin stimmen die Zähne mit denen des *Polyptychodon* und *Ischyrodon* überein; der Schmelz scheint aber weniger dick und die Krone etwas verschieden geformt gewesen zu sein; auch ist die Streifung schwächer und dichter, als in den beiden letztgenannten Genera. Am untern Ende der Krone werden die Streifchen feiner, auch zaserig und durch Zwischenstreifchen zahlreicher, doch nicht an allen Stellen. An der geraderen Seite sitzen die Streifchen überhaupt etwas dichter, als an der entgegengesetzten. An einem Fragment ist die Wurzel so entblösst, dass man erkennt dass sie, wie beim Krocodil, Polyptychodon und noch einigen anderen Sauriern, den jungen Zahn beherbergte. Der Raum zwischen dem Ersatzzahn und der Wurzelrandung des alten Zahnes ist sehr gering. Die Krone dieses Ersatzzahnes war schon sehr entwickelt und wenigstens auf der convexen Seite erkennt man, dass nicht alle Streifen bis zur oberen Hälfte der Krone führten. Stärkere Streifen besassen diese Zähne ebenso wenig als wirkliche Kanten. Die Zähne waren von ungefähr gleicher Grösse, folgten nur in geringen Abständen auf einander und nahmen, wenigstens theilweise, in den Alveolen eine mehr oder weniger schräge Richtung ein. Die Aussenseite des Kieferknochens war sehr gerade oder vertical gerichtet und nur der Alveolarrand gerundet. Fast sollte man glauben, Schädel und Kiefer wären mehr hoch als lang gebaut gewesen. Die Aussenseite der Kieferknochen erscheint hie und da durch Grübchen gefleckt, sonst aber glatt. Die Grübchen erscheinen auch in der Gegend des Alveolarrandes und werden die Mündungen von Gefässgängen sein.

Auf Taf. V, Fig. 5—10 führt H. v. Meyer Bruchstücke vor, die er für Theile von Wirbelkörpern hält. Die Länge dieser Wirbelkörper betrug nur wenig mehr, als die halbe Breite. Die Höhe scheint die Breite nur wenig übertroffen zu haben. Die Körper waren stark eingezogen und zwar oben mehr als unten. Auf einem Bruchstücke findet man auf der untern Seite zwei starke Grübchen. Ausserdem bemerkt man in ungefähr halber Höhe des Körpers noch ein kleineres Grübchen.

Von Querfortsätzen ist an diesem Körper nichts zu erkennen, es müssen also Rückenwirbel gewesen sein; es lässt sich aber nicht angeben wie Bogen und Körper unter sich verbunden waren. Beide Gelenkflächen dieser Körper waren nicht auffallend stark concav, die vordere besitzt eine tiefere centrale Stelle. Der Gelenkflächenrand ist ziemlich scharf und aufgeworfen.

Auf Taf. V, Fig. 1—3 ist das Bruchstück eines Halswirbels dargestellt, an welchem die Querfortsätze zu sehn sind. Die Länge dieses Wirbelkörpers betrug 0,043 m. oder 1 Zoll 7 Lin. Die Querfortsätze sind kurz und befinden sich mehr am obern Theile des Wirbels; sie sind durch eine Furche in eine untere und obere Hälfte getrennt, die obere

Hälfte hat einen dreieckigen, abgerundeten Querschnitt, die untere einen elliptischen. Die Gelenkflächen selbst sind glatt und haben nur ganz schwache Grübchen. Die Gelenkflächen für die Bogen des Dornfortsatzes haben deutliche Vertiefungen längs des ganzen Wirbelkörpers. Dieser Wirbel war an Grösse nicht kleiner, als die oben erwähnten, seine Gelenkflächen haben von beiden Seiten flachschalige Aushöhlungen, welche fast ihren ganzen Raum einnehmen.

Das Stück, aus dem mittleren Theil einer Rippe, (Meyer, Taf. V, Fig. 11), hat im Querschnitt zusammengedrückte, elliptische Umrisse, deren grosse Axe 0,033 m. und die kleine 0,021 m. misst. In der Mitte bemerkt man eine Markröhre.

Die Knochen, sagt Meyer, scheinen von festerer Textur, als bei den Wirbeln und anderen Knochen dieses Thieres zu sein.

Die Textur der Wirbel und anderer Knochen ist von sehr zelliger und schwammiger Beschaffenheit. Dichter stellt sich die Masse an den Knochen dar, die dem Kiefer angehören, wofür diese von grösseren Zellen durchzogen werden. Die Farbe der Knochen ist bräunlich, hie und da schwarz, in's Röthliche stechend. Das Gestein ist nach dem was davon an den Knochen hängen geblieben ist, ein fester graulicher Kalkstein, der in der Nähe der Knochen öfter eisenschüssig sich darstellt; auch verräth das, die Zellenräume erfüllende Gebilde einen grösseren Gehalt an Eisen; die Knochen sind alsdann besonders mürbe.

Weiter, auf S. 17 u. 18 sagt H. v. Meyer: «soweit aus den überlieferten Theilen sich der Habitus beurtheilen lässt, würde der Thaumatosaurus ausschliesslich an das Meerwasser gebunden, ein Thier des Meeres gewesen sein. Hiefür zeugt die Taxtur seiner Knochen und selbst die Kürze der Wirbel. Diese erinnert an Ichthyosaurus, doch nur entfernt und es wird dieses Genus auch schon durch die Beschaffenheit der Zähne ausgeschlossen.

Den Zähnen nach zu urtheilen, sollte man glauben, dass das Thier dem Krocodil am nächsten gestanden hätte, was indess durch die Wirbel entschieden widerlegt wird.

«Dem Thaumatosaurus, fährt H. v. Meyer fort, scheint der Pliosaurus Ow., ein riesenmässiges Meerreptil mit kurzem, an Ichthyosaurus und Meersäugethiere erinnerndem Halse, der einen grossen, schweren, mit dickkonischen Zähnen bewaffneten Schädel trug, verwandt. Allein schon die Zähne würden eine Vereinigung beider Thiere nicht zulassen. Owen führt nämlich an, dass die Zähne des Pliosaurus Seitenkanten besitzen, dass der Schmelz von Cement oder Rindensubstanz bedeckt erscheint und dass der junge Zahn nicht in den alten hineintritt; auch würden die Gliedmassen, deren Knochen keine Markhöhle besitzen und die Rückenwirbel, mehr auf den langhalsigen Plesiosaurus, in dessen Nähe der Pliosaurus gestellt wird, herauskommen, was alles dem Thaumatosaurus nicht zusagt. Dabei soll Pliosaurus wohl im Kimmeridgethon und Oxfordthon, aber nicht im Unter-Oolith seine Lagerstätte haben.

Noch kommt, sagt H. v. Meyer, der Cetiosaurus (2-d rep. p. 100), ein Reptilien-Genus des Meeres, in Betracht, das unter den Säugethieren mit den Cetaceen verglichen wird.

Die Reste dieses Thieres rühren theilweise aus dem Unter-Oolith Englands her und kom-

men daher im Alter dem Thaumatosaurus näher, als dem Pliosaurus. Es wird davon nur angeführt, dass an den Wirbeln beide Gelenkflächen concav und die langen Knochen der Gliedmassen ohne Markhöhle seien, dabei wird auch einiger anderer Knochen erwähnt, die ebensowenig geeignet sind zu entscheiden, wie sich der Cetiosaurus aus dem Unter-Oolith zum Thaumatosaurus verhält.

Die von H. v. Meyer dargelegten Reste gehören daher seiner Meinung nach offenbar einem Thiere an, das durch die Beschaffenheit seiner Zähne, durch die Kürze seiner biconcaven Wirbel und durch den Mangel einer geräumigen Markhöhle der Extremitätenknochen einen eigenthümlichen Typus verräth. Diesem Thiere aus dem Oolith von Neuffen habe ich, sagt Meyer, den Namen *Thaumatosaurus Oolithicus* — Wundersaurus des Ooliths — beigelegt.

1. Species. Thaumatosaurus Mosquensis m.

Taf. XI, Fig. 4 — 9. Taf. XII bis XV.

(Die Exemplare gehören der Sammlung der Moscauer Universität).

Alle Ueberreste dieses Thieres fand man im Gouv. Moscau, im Moscauschen Kreise, beim Kirchdorf Horoschowo (Хорошово) in der obern Juraschicht, welche durch *Ammonites virgatus* Buch charakterisirt ist und aus welcher Fischer v. Waldheim den *Pliosaurus Wossinskii* (vergl. Bullet. natur. de Moscau 1846, № 3, pag. 105, tab. 3 u. 4) und ich — den *Cladodus Schtschurowskii* — beschrieben habe.

Blossgelegt findet man diese Schicht am Ufer des Flusses Moskwa bei den Dörfern: Schtschukino (Щукино), Horoschowo (Хорошово), Mnevniky (Мневники), Dragomilowo (Драгомилово) und an anderen Orten.

Auf Taf. XII, Fig. 1 — 3 und Taf. XIII, Fig. 1, 1*a* u. 2 sind Bruchstücke von Zähnen dieses interessanten Thieres, welche in den Boden eingebettet sind, dargestellt.

Diese Bodenmasse ist lehmig, von dunkelgrauer Farbe und von Schwefelkies, dessen Crystalle man sieht, durchsetzt. Ebenso sind alle in diesem Boden gefundenen Zähne und Knochen von Schwefelkies, der die ganze Knochenmasse durchdrungen und sogar in die feinsten Gewebe eingedrungen ist, übersättigt, weshalb sie ausserordentlich mürbe sind und es fast unmöglich ist aus ihnen gut durchscheinende Objective herzustellen, um ihre Gewebe microskopisch, unter Beihilfe des sie durchdringenden Lichts, zu untersuchen.

Auf Taf. XII, Fig. 1 ist ein Erdklumpen in natürlicher ($^1/_1$) Grösse dargestellt. Betrachtet man diesen Klumpen von allen Seiten, so findet man darin viele Bruchstücke von Zähnen der genannten Thier-Species. Oben sieht man vier Zähne *A*, *B*, *C* u. *F* und hebt man das Bruchstück auf, so sieht man, wie Fig. 2 zeigt, an der untersten Seite in ($^1/_1$) Grösse den Zahn *B* im Querschnitt, unter dem Zahne *C* gleichfalls im Querbruch den Zahn *D* und an der untersten Seite des Klumpens noch ein Bruchstück des Zahnes *E*.

Fig. 3 stellt den Querbruch des Zahnes *A* in der Seitenfläche des Erdenklumpens Fig. 1 dar.

Die aus drei Zähnen gebildete Reihe Taf. XIII, Fig. 1 (gleichfalls in natürlicher ($^1/_1$) Grösse) zeigt denselben Habitus der Zähne, nur ist die Grösse, im Verhältniss zu den grossen Zähnen des Erdklumpens Taf. XII, Fig. 1, eine geringere.

Alle diese Zähne sind der Grösse, Form, Kronen- und Wurzelbildung nach und überhaupt ihres äusseren Typus wegen, den Zähnen des *Polyptychodon interruptus* Ow. ähnlich, noch mehr jedoch gleichen sie nach der Beschreibung, nach den Abbildungen, sowie des Fundortes wegen den Zähnen des *Thaumatosaurus Oolithicus* Meyer.

Die von H. v. Meyer gelieferte Beschreibung der Zähne von *Thaumatosaurus Oolithicus*, die ich oben fast wörtlich wiedergegeben habe und die vorausgesandte Beschreibung der Zähne von *Polyptychodon interruptus* ermöglicht es mir, mich auf einige Bemerkungen zur Erläuterung des Habitus der mit möglichster Genauigkeit in den Zeichnungen dargestellten Exemplare zu beschränken. Hierauf werde ich jedoch mit der nothwendigen Vollständigkeit den mikroskopischen Bau dieser Zähne beschreiben. Eine solche Ausführlichkeit wird sowohl als Hinweis darauf, wie als Beweis dafür dienen, dass es nothwendig ist, — die Moscauer Ueberreste in eine besondere Species, der ich nach ihrem Fundorte den Namen — *Thaumatosaurus Mosquensis* m. beilegen will, — zu sondern.

Betrachtet man die Emailschicht, welche die Zahnkrone — Taf. XII, Fig. 1 und Taf. XIII, Fig. 1 bedeckt, bei $^2/_1$ bis $^{10}/_1$ f. Vergr., so muss man beachten, dass die Emailstreifen, die im Querschnitte, ganz wie bei *Polyptychodon interruptus* Ow., eine fast gleichseitige, dreieckige Basis haben, (vergl. Taf. II, Fig. 1*h*′) schärfer zugespitzt sind (vgl. Taf. II, Fig. 1*h*) und dadurch den zugespitzten Streifen bei *Pliosaurus giganteus* Wag. gleichen (vergl. Taf. XX, Fig. 3, Bd. VI, Abth. 3, der Abhandl. der Münchener Akad. 1852).

H. v. Meyer zählt an der Basis der Zahnkrone des *Thaumatosaurus Oolithicus* auf einer Breite von 0,01 m. 12 bis 13 Streifen und auch bei unserem *Thaumatosaurus Mosquensis* kann man nicht weniger annehmen; hinsichtlich der Anordnung der Emailstreifung jedoch müssen die Zähne des *Thaumatosaurus Mosquensis* den Zähnen des *Polyptychodon interruptus* vollständig gleich sein, wie die Abbildungen Taf. XIII, Fig. 1, 1*a* zeigen, wo auf der convexen Seite des Zahnes *A* die Emailstreifen viel undichter sind, als auf der concaven Seite. Ueberhaupt zeigt die Vergleichung des äusseren Aussehns des Emails von *Thaumatosaurus Mosquensis* Taf. XII, Fig. 4 — 9 mit dem Schmelze des *Polyptychodon interruptus* Taf. II, Fig. 1, 1*h*, 1*h*′ u. 1*h*″ ihre vollkommene Gleichheit, sowohl in Bezug auf die Anordnung der langen und kurzen Streifen und der etwas höckerigen Emailoberfläche zwischen ihnen, als auch hinsichtlich der Unterbrechung der Länge der Streifen und der welligen Grenzlinie des Emails am Zahnhalse.

Weitere mikroskopische Untersuchungen werden eine grosse Aehnlichkeit auch im mikroskopischen Bau der Gewebe dieser Zähne zeigen.

Fig. 4 u. 5 auf Taf. XI zeigen im Längen- und Querschnitte die Textur des Zahnge-

webes eines *Thaumatosaurus Mosquensis* in $^{70}/_{1}$ f. lin. Vergr., die Contouren sind jedoch nur $^{20}/_{1}$ Mal vergrössert. Aus diesen Zeichnungen sieht man, dass das Dentin *b* dicht ist — man erkennt in demselben die Aufschichtung *mb* — und dass der Schmelz *c* eine ziemlich dicke Schicht bildet, in der man auch Bogen und von Strahlenröhrchen *td* gebildete Reihen wahrnehmen kann. Die Emailstreifen bestehn aus Schmelz allein. Zwischen der Emailschicht und dem Dentin befindet sich um den Zahn herum die Uebergangsschicht *bd* mit Reihen von Dentinzellen *l'k'*, welche an einigen Stellen die Anhäufungen *k'r'* bilden.

Fig. 6 u. 7 auf Taf. XI zeigen die Gewebestructur des eben besprochenen Längen- und Querschnittes des Zahnes, jedoch bei $^{600}/_{1}$ f. lin. Vergr. Auf der letzteren Zeichnung (Fig. 7) sieht man bloss die halbe Breite eines Emailstreifens.

Im Längendurchschnitte des Zahnes (Fig. 6) sieht man im Dentingewebe die Kanälchen *tu* und die Reihen verlängerter — primärer Zellen *t'u'* die bald durchlaufen, bald sich mit den Dentinzellen der Reihe *mb* vereinigen.

Obwohl die Kanälchen *tu* in ihrem ganzen Laufe feinwellige Linien darstellen, ist doch ihre Richtung im Allgemeinen normal zur äusseren Peripherie des Zahnes. Zum Schmelz hin zeigen ihre Enden oder die Röhrchen *tc* eine Biegung zum Zahnwipfel, wo ihre Mündungen sich gleichfalls mit den Zellen *l'k'* vereinigen.

Zwischen dem harten Dentin und der Emailschicht bemerkt man eine ganz ebensolche Uebergangsschicht (*bd*) wie bei den Zähnen von *Polyptychodon interruptus* Ow. und *Crocodilus niloticus* (vergl. Taf. IV, Fig. 1 — 3, 5. 6 und Taf. V, Fig. 1 — 3, Taf. VI, Fig. 3, 4, 7 u. 8), wo die Dentinzellen stellenweise in Anhäufungen der Knorpelzellen *k'r'* übergehn. Diese Schicht hat bei den vorliegenden Zähnen an manchen Stellen durch die Einwirkung des Schwefelkieses ihr Gewebe gänzlich verloren und erscheint, wie Taf. XI, Fig. 7 zeigt, als schwarzer undurchsichtiger Streif.

Auf der ganzen Dentinschicht Taf. XI, Fig. 6 u. 7 sieht man zerstreute, kleine, schwarze Punkte, die auch als Spuren der Einwirkung des Schwefelkieses auf's Dentingewebe dieser — vielleicht schon alten Zähne zu betrachten sind.

Was die Structur des Emails anlangt, so ist dieselbe durch die Studien Taf. XI, Fig. 6 — 9 hinlänglich erläutert, sie ist nämlich ganz dieselbe, wie bei den Zähnen von *Polyptychodon interruptus* Ow. (vergl. Taf. IV, Fig. 1, 2, 5, 6 u. Taf. V, Fig. 2 — 5).

In der durch *Ammonites virgatus* charakterisirten und an den Ufern der Moskwa blossgelegten Schicht wurden die auf Taf. XIV, Fig. 1, *A*, *B*, *C* u. *D*, Fig. 2, *A*, *B*, *C*, *D* und Fig. 3, *B*, *D*, Fig. IV, *A*, *B*, auf Taf. XV, Fig. 1, *A*, *B* und Fig. 3, *B*, *C'* vorgeführten Wirbelkörper und der auf Taf. XIII, Fig. 2, *a*, *b*, *c* u. *d* abgebildete grosse Knochen einer Flosse gefunden.

Die Wirbelkörper auf Taf. XIV, Fig. 1 — 3 weisen, obwohl sie sehr verschieden gross sind, alle einen und denselben typischen Charakter auf, welcher den hintern Halswirbeln des *Polyptychodon interruptus* Ow. am meisten entspricht (vergl. Suppl. № III, Cretac. Pters. and Sauropt. Palaeont. Societ. 1860), nur mit dem Unterschiede, dass die Länge unserer Wir-

belkörper im Verhältniss zu ihrer Breite bedeutend geringer ist; namentlich wenn man das Verhältniss der Länge zur Breite bei den englischen Wirbeln mit $\frac{0,10}{0,12}$, also fast $^1/_1$, annimmt, so würde dieses Verhältniss im Wirbel Taf. XIV, Fig. 1, $\frac{0,055}{0,140}$ (fast $^3/_8$), im Wirbel Fig. 2 — $\frac{0,042}{0,085}$ (fast $^1/_2$) und im Wirbel Fig. 3 $\frac{0,03}{0,06}$ oder $^1/_2$ ausmachen. Aus diesem Grunde wäre es richtiger unsere Wirbel der Art Pliosaurus und nicht der Art Polyptychodon zuzuweisen.

Der Klumpen mit den Zähnen auf Taf. XII, Fig. 1 und Taf. XIII, Fig. 1, die Wirbel Taf. XIV, Fig. 1 u. 4 und die Stücke des grossen Flossenknochens auf Taf. XIII, Fig. 2 wurden alle zusammen beim Dorfe Horoschovo (Хорошово) gefunden und man kann sie deshalb für Reste eines und desselben Thieres halten. Dem widerspricht auch weder ihr Sauropterygien-Charakter, noch ihre riesenhafte Grösse und ich zähle sie daher zur Species *Thaumatosaurus Mosquensis* n. Unterstützt wird meine Annahme noch durch einige Aehnlichkeit des Rückenwirbels Taf. XIV, Fig. 4 mit den Wirbeln des *Thaumatosaurus oolithicus* Meyer (vergl. H. v. Meyer, Palaeont. Band VI, Taf. V, Fig. 5 — 10).

Die Wirbelkörper Taf. XIV, Fig. 2 u. 3 unterscheiden sich von dem Wirbelkörper Fig. 1 bloss durch die geringere Grösse und ein anderes Verhältniss der Länge zur Breite, die bei ihnen bis $^1/_2$ beträgt.

Die Centra oder Körper aller dieser Wirbel haben glatte, flache und an den Rändern ovale Gelenkflächen. Die Länge der Wirbelkörper ist in der Richtung des Rückenmarkkanals etwas geringer als an der untern Seite. Der Boden des Nervenkanals ist in der Mitte verengt. Die neurapophysialen Gelenkflächen *np* (d. h. die Gelenkflächen für die Bogen der Dornfortsätze) nehmen die ganze Länge des Wirbelkörpers ein; sie sind breit, haben ovale Umrisse und zeigen eine ziemlich bedeutende Vertiefung mit höckeriger Oberfläche. Die pleurapophysialen Gelenkflächen *pl* liegen der vorderen Seite des Wirbelkörpers näher, als der hinteren.

An den Wirbelkörpern Fig. 1 u. 2 sind die Gelenkflächen *pl*, wie bei dem englischen Wirbel des *Polyptychodon interruptus* Ow. recht gross und von rundlich ovaler Form; an unseren russischen aber sind sie vertieft und die Oberfläche dieser Vertiefung ist höckerig.

Am Wirbel Taf. XIV, Fig. 3 ist die Gelenkverbindung des Wirbelkörpers mit der Rippe eine doppelte, da das Ende der Rippe getheilt ist, der obere Theil hat eine dreieckige Form mit abgerundeten Winkeln, der untere aber ist rund, analog dem von H. v. Meyer auf Taf. V, Fig. 1 u. 2 (w. vergl.) vorgeführten Wirbel. Ich nehme an, dass dieser letztere Wirbel wegen der vollkommenen typischen Aehnlichkeit mit dem Wirbel Fig. 2 einem Thiere derselben Species angehört mit dem Unterschiede jedoch, dass er aus dem, dem Rumpfe näheren Theile des Halses stammt und dass das Thier, sowohl in Bezug auf die Theilung des oberen Endes der hinteren Halsrippen, als auch hinsichtlich der geringen Länge seiner Halswirbel die Merkmale der Ichthyopterygia hatte.

Von den oberen Theilen der Oberfläche *pl* erheben sich zur untern Seite der Oberfläche *np* die zygapophysialen (Gelenkfortsatz-) Näthe oder Leisten.

Die Seitenflächen dieser Wirbelkörper sind in der Längenrichtung schwach concav und

weisen auf der untern Seite einen etwas hervorstehenden Kiel auf. Auf dieser letzteren Seite bemerkt man an der Oberfläche Längsrunzeln, die nach den Rändern hin stärker werden, die Ränder selbst sind gut abgesondert. Eine derartige Unebenheit deutet auf die Anheftung der capsula articularis fibrosa hin.

Die Wirbel auf Taf. XIV, Fig. 2 u. 3 halte ich für die eines *Pliosaurus Wossinskii* Fischer, womit auch der Fundort dieser Reste am Flusse Moskwa übereinstimmt.

Auf der untern Seite aller dieser Wirbel wie auch an der Basis des Nervenkanals erkennt man die, wenn auch weniger bestimmt angeordneten, Gefässmündungen.

Fig. 1, *A*, *B* auf Taf. 15 stellt einen Wirbel aus der blossgelegten, durch *Ammonites virgatus* Buch. charakterisirten Schicht an der Moskwa dar. Dieser Wirbelkörper ist stark abgerieben, doch kann man an ihm noch die Spuren der neurapophysialen (*np*) und pleurapophysialen (*pl*) Gelenkhöcker und den Boden des Rückenmarkkanals *n* wahrnehmen.

Die auf der Zeichnung *B* dargestellte Gelenkfläche zeigt eine flache Schalenvertiefung, deren ovale Ränder, wie auch die Seiten des Wirbelkörpers selbst, bedeutend abgerieben sind. Die Gelenkfläche der andern Seite ist mehr beschädigt. Indem ich Folgendes berücksichtige: 1) die Länge dieses Wirbelkörpers, 0,07 m., im Vergleich mit der dargestellten Breite seiner Gelenkfläche, 0,12 m., 2) die beträchtliche Breite des Bodens des Rückenmarkkanals, 3) dass an den Seiten des Wirbelkörpers die Zeichen der Gelenkverbindung mit den Rippen erkennbar sind — glaube ich dass dieser Wirbel einer von den, dem Rumpfe am nächsten gelegenen Halswirbeln ist, an welchem die costalen Gelenkflächen doppelt waren; der untere Theil der Rippe stützte sich noch auf's Centrum, während der obere Zweig derselben schon auf den Diapophysen (oberen Querfortsätzen) ruhte.

Auf Taf. XV, Fig. 3, *B* und *C′* ist ein Wirbel aus derselben Gegend und derselben Schicht wie der vorhergehende Wirbel Fig. 1 abgebildet. An seinen glatten Seiten ist nicht die geringste Spur von costalen Gelenkflächen zu bemerken; folglich müssen sich seine Rippen unmittelbar auf die Diapophysen gestützt haben und das weist darauf hin, dass es ein Rückenwirbel ist. Die Gelenkfläche Fig. 3, *B*, ist nicht tief aber schalenförmig und nach den Rändern hin oval. Der Rand ist ziemlich dünn. Der Wirbelkörper Fig. 3, *B* und *C′* zeigt in seiner Länge eine bedeutende, wenn auch allmählige Einschnürung. Dieser Wirbel hat Aehnlichkeit mit den von H. v. Meyer vorgeführten Wirbeln (vergl. ib. Taf. V).

Ich habe die Abbildungen in $1/2$ der natürlichen Grösse dargestellt. Die Dimensionen können nach den Zeichnungen angenommen werden; ich halte diesen Wirbel für einen Rückenwirbel von *Thaumatosaurus Mosquensis* m.

Die Wirbel auf Taf. XIV u. XV bieten eine mehr oder weniger grobzellige Knochenmasse; das Knochengewebe der Wirbel auf Taf. XIV, Fig. 1 — 3 aber ist feiner als das der Wirbel auf Taf. XIV, Fig. 4, Taf. XV, Fig. 1 u. 3.

Mit den Zähnen und Wirbelkörpern, welche ich der Species *Thaumatosaurus Mosquensis* m. zuweise, wurden, auch wie oben erwähnt, Stücke eines grossen Knochens, die in $1/2$ der

natürlichen Grösse abgebildet und in natürlichem Wechselverhältniss Taf. XIII, Fig. 2, *a*, *b*, *c* und *d* dargestellt sind, gefunden.

Es unterliegt keinem Zweifel, dass diese Bruchstücke, sowohl ihres Aussehens, als der Grösse wegen, einem grossen Knochen und zwar einer Flosse angehören, weit schwieriger jedoch ist es, zu bestimmen, ob es Ueberreste eines Oberarms (humerus) oder eines Oberschenkelbeines (femur) sind, da die Flossen des *Polyptychodon* Ow. und des *Thaumatosaurus* Meyer völlig unbekannt sind und über die Flosse des Pliosaurus Ow. wissen wir etwas bloss aus der Beschreibung eines Theiles der rechten, hintern Flosse von *Pliosaurus portlandicus* Owen, dessen Oberschenkelbein (femur) sehr gut dargestellt ist. Obwohl derartige Fragen nur durch glückliche Entdeckung von Ueberresten solcher Thiere, die wirklich existirt haben, gelöst werden können, so kann man, wenn man die allgemeinen Merkmale dieser Thiere in Betracht zieht, aus dem Bau der Flossen verschiedener Plesiosaurus-Arten mit Hülfe analoger Vergleiche auch in diesem Falle einen annähernden Schluss ziehen, es künftigen Entdeckungen und Untersuchungen überlassend, unsere Vermuthungen entweder zu bestätigen oder sie zurückzuweisen. Und in der That wissen wir jetzt schon: 1) dass die grossen Knochen von plesiosauroiden Thieren keine innere Knochenhöhle haben, sondern aus schwammiger oder zelliger Knochenmasse bestehn, 2) dass der Oberarm bei einem und demselben Thiere etwas dicker ist, als das Oberschenkelbein, weil der Schaft am Oberarm früher (d. h. höher) breiter zu werden beginnt, als am Oberschenkelbeine, bei dem er auf einer grösseren Strecke rund bleibt, 3) dass die untern Contouren des entfernten Endes, sowohl beim Oberarm (humerus), als auch beim Oberschenkelbein (femur) eine convexe Linie darbieten, welche einen stumpfen, hervorstehenden Winkel bildet. Am Oberschenkelbein jedoch verhält sich diese convexe Contour des entfernten Endes mehr symmetrisch zur Knochenaxe und der hervorstehende Winkel liegt fast auf der Axenlinie, während der Umriss des untern, entfernten Endes des Oberarms (humerus) nicht so symmetrisch zur Knochenaxe ist und der hervorstehende Winkel dem vordern Rande näher liegt, 4) der vordere Rand des Oberarms ist gerade oder sogar etwas convex, der hintere stark concav; am Oberschenkelbeine dagegen erscheinen der vordere und der hintere Rand mehr oder weniger concav und 5) dass das entfernte Ende sowohl beim Humerus, wie auch beim Femur der Länge nach eine Biegung zur unteren oder der dem Rumpfe zugewandten Seite hat, so dass die obere Seite dieser Knochen etwas convex und ziemlich glatt erscheint.

Alle diese Beobachtungen genügen aber nicht, um den Knochen auf Taf. XIII, Fig. 2 mit voller Sicherheit zu bestimmen, d. h. als humerus oder femur anzunehmen, denn wenn man nach der Dicke des Schaftes urtheilen soll, so muss man ihn für einen Oberarmknochen halten, doch sind die Contouren am entfernten Ende nicht vollständig, auch kann man nicht behaupten, dass es ein femur ist, da das obere Stück des Schaftes, seinem Anfange nach zu urtheilen, schon früh sich auszubreiten beginnt (vergl. die Querschnitte Fig. 2, *a* und *b*). Für's Erste müssen wir uns mit der Bestimmung begnügen, dass die ganze Länge des Knochens 0,48 m., die Breite am entfernten Ende 0,26 m. beträgt und dass dieser Knochen es

beweist, dass dieses Thier (*Thaumatosaurus Mosquensis* m.) von welchem er stammt, sich ausschliesslich im Meer aufhielt, denn der Bau seiner Extremitäten war schaufel- oder flossenförmig, wie bei den plesiosauroiden Thieren.

Bevor wir uns zu den mikroskopischen Beobachtungen der Knochenmasse der Wirbel und der grossen Knochenflosse von *Thaumatosaurus Mosquensis* m. wenden, die auf Taf. XIV, Fig. 4, *C*, *D*, *E* und *F*; Taf. XV, Fig. 1, *C*, *D*, *E* und *F*, Fig. 3, *C*, *D*, *E* u. *F* und Taf. XVI, Fig. 1, *C*, *D*, *E* u. *F* und Fig. 3, *C*, *D*, *E* u. *F* abgebildet sind, muss bemerkt werden, dass der Buchstabe *C* in allen Figuren das Knochengewebe im Längendurchschnitt bei $^{95}/_{1}$ f. lin. Vergr. bezeichnet, *D* gleichfalls das Knochengewebe im Querschnitt bei $^{95}/_{1}$ f. lin. Vergr. und die mit *E* und *F* versehenen Abbildungen zeigen Theile aus denselben Längen- und Querschnitten, doch bei $^{600}/_{1}$ f. lin. Vergr.

Man erinnere sich, dass die Abbildungen Taf. XVI, Fig. 1 und 3 und Taf. XIV, Fig. 4. Untersuchungen derjenigen Knochen vorstellen, welche ich als einem Individuum angehörende ansehe und die Zeichnungen auf Taf. XIV, Fig. 1 u. 3 beziehen sich zwar auch auf Knochen von *Thaumatosaurus Mosquensis* m., doch von verschiedenen Individuen.

Wenn man diese Zeichnungen mit den Untersuchungen der Knochengewebe vergleicht, welche in dem Descriptive and illustrated Catalogue of the histological series of the Museum of College of surgeons of England vol. 11, 1855 vorgeführt sind, so ist es ersichtlich, dass das Knochengewebe bei Thaumatosaurus dem des Physeter (Cachelot) am meisten gleicht (vergl. dito Pl. XIII, Fig. 7 — 10), mit dem Unterschiede jedoch, dass die Knochenkörperchen ihrer Form und Grösse nach mehr den Knochenkörperchen des Delphin's (vergl. dito Fig. 12) ähnlich sind und dass namentlich die grössten Knochenkörperchen sowohl bei Delphinus als bei Thaumatosaurus eine Länge von 0,000004 m. und eine Breite von 0,000001 m. haben. Diese Maasse geben bloss die Grösse der Höhlungen selbst an, ohne die von ihnen ausgehenden Kanälchen.

In den mikroskopischen Darstellungen auf Taf. XVI, Fig. 1, *C*, *D*, *E* u. *F* sieht man an einem hintern Halswirbel eines ausgewachsenen *Thaumatosaurus Mosquensis* m. (Taf. XIV, Fig. 1) bei $^{95}/_{1}$ bis $^{600}/_{1}$ f. Vergr., dass im Medullarkanale *vn* die Knorpelpulpa *d''* (Breicement) stellenweise sich erhalten hat, dass in dieser Pulpa die Markhöhlungen *m*, die sich nachher in Knochenhöhlungen *lk* verwandelten, ihren Anfang nehmen. Die Ausläufer *tl* der Knochenhöhlen zerstreuen sich nach allen Seiten, erscheinen verschieden dick und haben eine gebrochene Richtung. Stellenweise bemerkt man, meistens im Längendurchschnitte des Knochens, feine längliche Cement- oder Knochenröhrchen *t*, welche sich vermuthlich mit den Kanälchen *tl* vereinigten — das sind die long tubuli des Cachelot (vergl. dito Catal. p. 178, Pr. B. d. 103, Pl. XIII, Fig. 7).

Die auf Taf. XIV, Fig. 4, *C*, *D*, *E* u. *F* niedergelegten mikroskopischen Untersuchungen eines Rückenwirbels desselben grossen Individuum's der Species *Thaumatosaurus Mosquensis* m. (Taf. XIV, Fig. 4, *A* u. *B*) zeigen uns dasselbe, wie die erstbeschriebenen. Die Röhrchen *t* sind noch deutlicher markirt (Fig. 4, *E*).

Die mikroskopischen Zeichnungen auf Taf. XVI, Fig. 3, *C*, *D*, *E* u. *F* beziehen sich auf den grossen Flossenknochen (Taf. XIII in F 2, *a*, *b*, *c*, *d*) desselben Individuum's — *Thaumatosaurus Mosquensis* m. Sie zeigen auch dasselbe; die Knochenkörperchen *lk* scheinen aber mehr einförmig und von bedeutenderer Grösse zu sein.

Die mikroskopischen Abbildungen auf Taf. XV, Fig. 1*C*, 1*D*, 1*E* u. 1*F* stellen Ansichten des Gewebes aus den Körpern (Centren) des hintern Halswirbels eines gleichfalls grossen *Thaumatosaurus Mosquensis* m. (Taf. XV, Fig. 1 *A* u. *B*) dar und bestätigen das oben Beschriebene; in den Medullarkanälen jedoch ist der Uebergangszustand des Knorpels wahrnehmbarer und die Röhrchen *t* treten deutlicher hervor (vergl. Fig. 1*E* u. 1*F*).

Die mikroskopischen Studien Taf. XV, Fig. *C*, *D*, *E* u. *F* sind am Körper (Centrum) eines Rückenwirbels angestellt, welcher meiner Meinung nach auch von einem *Thaumatosaurus Mosquensis* m. herrührt (Taf. XV, Fig. 3, *B* u. *C'*). Das Knochengewebe zeigt einen ganz ähnlichen Bau, wie die früher erwähnten, nur sind die Schichten, welche die Medullarkanäle und die Knorpelanhäufungen *k'r'* umgeben, in letzteren schärfer markirt. Vielleicht war das Individuum, welchem dieser Wirbel angehörte jünger, als diejenigen, deren Knochengewebe wir soeben beobachtet haben; es ist aber auch möglich, dass dieser Wirbel von einem Thier der Gattung Plesiosaurus stammt.

Die auf Taf. XVI, Fig. 2, *C*, *D*, *E* u. *F* und auf Taf. X, Fig. 4, 4*a*, 4*b* u. 4*c* niedergelegten mikroskopischen Studien sind an den auf Taf. XIV, Fig. 2 u. 3 abgebildeten Wirbelkörpern gemacht, dem *Pliosaurus Wossinskii* Fischer zugewiesen und für Halswirbel zweier Individuen erklärt worden; es wird dabei vorausgesetzt, dass der Wirbel Fig. 2 dem Kopfe näher lag, als der Wirbel Fig. 3, welcher sich dem Rumpfe näher befand und da der letztere minder gross ist, so muss zugelassen werden, dass der Wirbel Fig. 3, einem jüngeren Thiere angehören konnte.

In der That, wenn man die mikroskopischen Studien an den Pliosaurus-Wirbeln mit den an dem Knochengewebe eines Thaumatosaurus angestellten vergleicht, so sieht man, dass die Structur der Gewebe der Knochen, die man für Thaumatosaurus- und Pliosaurusknochen hält, übereinstimmt, obgleich die Knochenkörperchen *lk* bei letzteren stellenweise bedeutend verlängert erscheinen und im Querschnitte eine mehr rundliche Form aufweisen (vergl. Taf. XVI, Fig. 2*E* u. 2*F*). Was das Gewebe des Wirbels auf Taf. XIV, Fig. 3 betrifft, so bemerkt man in demselben wirklich eine schwächere Verknöcherung und stellenweise sieht man Spuren vom Knorpelgewebe, an anderen Stellen aber Knochenkörperchen in der Periode ihrer Bildung (vergl. Taf. X, Fig. 4*b* u. Fig. 4*c*).

III.

Gattung Lütkesaurus n.[1]).

(Taf. III, Fig. 3, *3a* und *3c*; Taf. XI, Fig. 3; Taf. XV, Fig. *2B*, *B'*, *D'*, *2C*, *D*, *E*, *F*, Taf. XVII—XXI.)

(Versteinerungen aus der Sammlung von W. A. Kiprijanoff.)

Alle Ueberreste von diesem Thiere wurden im Kursker Gouv. und Kursker Kreise im Sewerischen Osteolithe gefunden. Die Abbildungen auf Taf. XVII, Fig. 1, 2 haben natürliche ($^1/_1$) Grösse. Der Buchstabe *b* bezeichnet die Seitenansicht des Zahnes, *c* dessen innere oder concave Seite und *e* u. *f* Querschnitte der Krone und Wurzel nach den mit denselben Bezeichnungen versehenen Linien.

Mit *h'* ist ein Theil der Emaildecke dieser Zähne in zehnfacher ($^{10}/_1$) Vergrösserung bezeichnet. Diese Abbildung zeigt die äussere Form der Emailschicht solcher Zähne, in dem Grade vorhanden, in dem wir sie 2 Mal vergrössert (Taf. II, Fig. *1h*) an Zähnen von *Polyptychodon interruptus* Ow. gesehen haben und an den Zähnen von *Thaumatosaurus Mosquensis* bei einer nicht geringeren als 5 fachen Vergr. sehen können. Hier zeigt sich, dass die Streifung der Zähne von *Lütkesaurus* (Taf. XVII, Fig. 1 u. 2) fünf Mal dünner ist, als an den Zähnen von *Polyptychodon interruptus* und 2 Mal feiner, als an den Zähnen von *Thaumatosaurus Mosquensis.*

Auch an den Zähnen des *Lütkesaurus* ist der Kronentheil, wie auf den Zeichnungen zu sehen, leicht nach der Innenseite gebogen. Die Grösse dieser Zähne ist so genau als möglich angegeben.

Diese Zähne haben auch eine bedeutende Innenhöhle, die die ganze Mitte der Wurzel einnimmt und sich bis in die Krone erstreckt.

Der Querschnitt der Krone und Wurzel ist breit-elliptisch, doch nicht ganz so regelmässig wie bei den oben beschriebenen Zähnen, von welchen sich diese vorzüglich durch ihre zarte Streifung der Emaildecke der Krone unterscheiden.

Die Zähne Fig. 1 u. 2 wurden in der Ablagerung ganz nahe von einander gefunden und ich sehe keinen Grund, sie nicht für Zähne eines und desselben Rachens zu halten, obwohl ihre äusseren Umrisse auch verschieden sind; denn auch die Veränderung der äusseren Form der Zähne hing, ohne dass der allgemeine Character verletzt wurde, höchst wahrscheinlich von dem Platze ab, den diese Zähne im Rachen einnahmen.

Auf Taf. III, Fig. 3 ist bei doppelter ($^2/_1$) Vergrösserung der Contouren und $^{20}/_1$ f. lin. Vergr. der Schichtung der Gewebe, der Längendurchschnitt der Krone und ein Theil der Zahnwurzel von *Lütkesaurus* (Taf. XVII, Fig. 1 u. 2) vorgeführt und auf Taf. III, Fig. *3a* sieht man den Querschnitt der Krone nach der Linie *yv* bei $^8/_1$ Mal vergrösserten Umrissen

1) Zum Andenken an den verewigten Präsidenten der Akademie der Wissenschaften Admiral Graf F. P. Lütke, so genannt.

und $^{20}/_1$ f. Vergr. der Schichtung des Gewebes und Fig. 3*c* zeigt einen Theil des Querschnittes der Wurzel nach der Linie *y'v'* bei derselben Vergrösserung. Diese Abbildungen erklären Folgendes:

1) Dass der grösste Theil des Zahnkörpers, wie bei den oben beschriebenen Zähnen, aus sehr festem Dentin (*b*) besteht, eine Schichtung aufweist und dass seine ganze Dicke von Dentinkanälchen *tu* durchdrungen ist, welche von der Innenhöhle aus, in mehr oder weniger normaler Richtung zur Peripherie des Zahnes laufen. Im Kronengipfel vereinigen sich diese Kanälchen in der vertikalen Zahnaxe, breiten sich strahlenförmig aus und weisen eine schwache Biegung nach der entgegengesetzten Seite auf, wie in den Zähnen von *Polyptychodon interruptus* Ow., d. h. nicht von unten aufwärts, sondern von oben abwärts.

2) Die Zahnhöhle *a* reicht bis in die Krone hinein und erweitert sich in der Wurzel. Man sieht in ihr die Nachbleisel des Osteodentins *d''*. Ueberhaupt sind die Contouren dieser Zähne im Längendurchschnitt breiter als bei den Zähnen von *Polyptychodon interruptus* Owen.

3) Das Email auf der Zahnkrone ist nicht so dick und die ganze Streifung desselben besteht aus ihrem eigenen Gewebe, in dem man concentrische Bogen, welche durch die Röhrchen *td* gebildet werden, sieht. Man bemerkt auf dem Zahne auch längliche Risse *ss*.

4) Das Cement, welches die Structur des schwammigen Knochens zeigt, ist unter den Geweben dieser Zähne garnicht zu bemerken und die dünne äussere Schicht, welche die Wurzel (Fig. 3*c*) bedeckt, hat die Structur des sehr schwachen Cements *d'''* im Bildungsprocess. Die Schicht *d'* auf der Zahnkrone ist nur stellweise zu bemerken, besonders in den Vertiefungen zwischen den Streifen.

Durch weitere mikroskopische Untersuchung der Structur des Zahngewebes bei *Lütkesaurus* finden wir bei stärkerer Vergrösserung (Taf. XVII u. XVIII) Folgendes:

Taf. XVIII, Fig. 1, 3 u. 5 einen Theil des Längendurchschnittes der Krone, Wurzel und des Gipfels ihrer Innenhöhle *a* bei $^{450}/_1$ f. lin. Vergr. Wir sehen hier: die Structur des Osteodentins *d''* mit dem Markraum *m* im Innern des Knorpels, die Knorpelzellen *kr*, die Knochenkörperchen *lk* und den Uebergang *bd* des Dentins in Cement mit den Zellen *l'k'*. Das Dentingewebe weist Anzeichen von Schichtung *mb*, die Zellen *l'k'* mit vollkommener Entwickelung der Dentinkanälchen *tu* und deren Verästelungen und Quersprossen *zz* auf; auch sieht man den Uebergang der Kanälchen *tu* in die Kalkröhrchen *tc*, welche sich mit den Zellen *l'k'* vereinigen. Den Bau der Emaildecke sieht man mit den Strahlenröhrchen *td* und auf der Höhe des Zahnes bemerkt man den, vielleicht zufällig enstandenen Anfang der Spaltung *s* und ein schwaches Anzeichen der Schicht *d'*.

Fig. 5 zeigt im Längendurchschnitt durch die Innenhöhle des Gipfels der Zahnkrone eine eigenthümliche Absonderung *b''* des Dentins *b*, welche sich in die Osteodentinmasse hinein erstreckt; letztere bildet dadurch gleichsam ein besonderes Wipfelchen. Das deutet auf eine Zerstückelung der Pulpa (vergl. R. Baume: Inaugural-Dissertation p. 31).

An Fig. 3, Taf. XVIII sieht man im Längendurchschnitt der Wurzel nach den äus-

seren Contouren des Zahnes hin die Cementbildung mit Anzeichen von Knochenkörperchen *lk* und Knorpelzellen *kr*, die Bildung der Dentinkanälchen und Kalkröhrchen *tu* und *tc* aus Reihen verlängerter primärer Zellen *t'u'*; man sieht ferner die Zellenreihen *l'k'* und weiter zur Innenhöhle *a* des Zahnes hin wieder ein schwaches Cement- oder Osteodentingewebe mit Knorpelzellen und Streifen *t'u'*. Alles dies beweist, dass die Zahnwurzel beim Tode des Thieres im Process ihres Wachsthums begriffen war.

Fig. 2 u. 4 auf Taf. XVIII stellen bei derselben Vergrösserung ($^{450}/_{1}$) Theile der Querschnitte der Krone und der Wurzel des Zahnes dar. Die erste Abbildung (Fig. 2) zeigt die von der Zahnhöhle *a* ausgehenden Dentinkanälchen *tu*, von denen einige länger, andere kürzer sind, indem sie in ihrer Biegung gekreuzt werden. Man nimmt auch die Zellenreihen *l'k'* wahr, welche die Grenzlinien der Schichtung *mb* bilden (d. h. diejenigen Linien, in welchen wir die Zellen oder Globularräume *l'k'* bemerken) und endlich sieht man an einem ganzen Zahnstreifen die wellig-geschichtete Emailbildung, die Röhrchen *td* und die Zellen *t'c'* im Email. In der zweiten Abbildung (Fig. 4) wird im Querschnitt dasselbe vorgeführt, was wir im Längendurchschnitt der Wurzel Fig. 3 sahen, mit dem Unterschiede nur, dass die Dentinkanälchen *tu* hier keine solche Biegungen aufweisen, wie im Längendurchschnitt an der Peripherie des Zahnes zu sehen ist.

Fig. 3, Taf. XVII stellt den Querschnitt eines Emailstreifes dar und Fig. 4 die Structur des Schmelzes im Längendurchschnitt bei $^{900}/_{1}$ f. Vergr. Auf diesen Abbildungen sieht man die Structur des Dentins beim Uebergange zum Email und dass die Kalkröhrchen *tc* offenbar mit den Zellen *l'k'* enden. In dem zunächst gelegenen Email sieht man die Zellen *t'c'*; darauf beginnt die Schichtung, in der man die Anordnung der Röhrchen *td* nebst ihren Anfängen *t'd'* und den Vereinigungsräumen *t''d''* erkennt; in der Richtung der letzteren bemerkt man stellweise kleine Risse. Zu beiden Seiten des Streifes Fig. 3 sind im Querschnitt des Zahnes Längenrisse *ss* angedeutet, die von schwacher und an den Contouren des Streifes erkennbarer Cementmasse *d'* angefüllt sind.

Vielleicht sind das Theile der Streifen der Emailschicht, die sich von oben nach unten zu bildeten?

Der Schmelz wird vom Dentin durch einen geraden, hellen und homogenen Blastemstreifen, auf dem die nicht zahlreichen Emailzellen *t'c'* durch schwache Punkte angedeutet sind, getrennt. Die Streifung der Emailschicht besteht ausschliesslich aus derselben (Email-) Masse, in welcher man die welligen Reihen der Strahlenröhrchen sieht; die Biegung solcher Reihen vermindert sich von der Peripherie des Zahnes zur Dentinschicht hin.

Wenn man vermittelst verticaler Flächen, der Emailschichtung parallele Schnitte vom Dentin aus zur Peripherie des Zahnes ausführt, wie das auf Taf. XVII, Fig. 4 durch die Linien *a*, *á* und *a''* angedeutet ist, so erscheint die Structur des Emails, so wie sie Fig. 5 darstellt, wo man in der Fläche *a* auf einem homogenen und zarten Blastemfelde bloss die Emailzellen *t'c'* sieht; auf der Fläche *á* erkennt man schon den Anfang *t'd'* der Bogenbildung

der Röhrchen *td* und endlich auf der Fläche *a''* sieht man auch das Gebiet *t''d''* der Verbreitung der Röhrchen *td* und ihre bedeutende Vermehrung.

Aus dem oben Erörterten geht hervor, dass die Haupteigenthümlichkeit der Zähne des *Lütkesaurus* darin liegt, dass in der Zahnmasse das aus ursprünglicher Substanz bestehende feste Dentin entschieden vorwaltet. Dieses Dentin weist dicke Dentinkanälchen mit einem mittleren Durchmesser von 0,0003 Linien und Zwischenräumen von 0,001 Linien Breite auf. Die Dentinkanälchen haben Querausläufer *zz* und bieten Unterabtheilungen und Verästungen dar, wie bei den Krokodilen und Ichthyosauren, wodurch sie sich auch von den Zähnen des *Polyptychodon interruptus* und des *Thaumatosaurus Mosquensis* unterscheiden.

Den concentrischen Streif *b'b'* (d. h. die Linie, welche durch regelmässig angeordnete Interglobularräume hervorgebracht ist) bemerkt man in diesen Zähnen nicht, falls man nicht den dunklen Streif *mb* Taf. XVIII, Fig. 1 u. 5 für einen solchen hält; derselbe unterbricht übrigens die Continuität nicht aller Dentinkanälchen *tu* und man sieht in ihm keine Höhlungen *l'k'*, sondern bloss eine Knickung der Kanälchen. Im Gipfel der Krone laufen die Kanälchen *tu* von der Mittellinie zur Peripherie des Zahnes, indem sie immer feiner werden und dabei im Allgemeinen eine zur Peripherie des Zahnes normale Richtung beibehalten. Deshalb bilden sie bei nach oben gerichteter Concavität nicht strahlenförmig sich ausbreitende, sondern knospenartig sich ein wenig schliessende Büschel, indem die Strahlen leicht gebogen sind. Für den mikroskopischen Bau des Gewebes muss dieser Umstand auch als wichtiges Merkmal zur Unterscheidung der Zähne des *Lütkesaurus* von den früher beschriebenen Zähnen dienen. Näher zur Basis der Krone, wo schon die Innenhöhle beginnt, von der die Kanälchen *tu* ausgehen, weisen sie Theilungen und Quersprossen auf. Anfangs haben diese Kanälchen eine unbedeutende, schwache *s*-förmige Biegung und einige von ihnen enden dabei in dem dunklen Streifen *mb* Taf. XVIII, Fig. 1 u. 5; andere erstrecken sich ohne Unterbrechung bis zu den äusseren Umrissen des Zahnes und bilden, bevor sie sich abermals — in die Kalkröhrchen *tc* — theilen, auch eine zwar längere, aber schwächere (als die erwähnte) doch auch *s*-förmige Biegung. Auch in diesen Zähnen sieht man die Trennung der Schichten in Folge schwacher Anhäufungen der Zellen *l'k'*, vermittelst derer die Dentinkanälchen mit einander anastomosiren.

Die Kalkröhrchen, welche durch Theilung der Kanälchen *tu* entstanden sind, enden mit den Zellen *l'k'*. Der Schmelz ist, was die Bildung anlangt, dem oben beschriebenen ganz gleich. Die Bildung der Dentinkanälchen und der Dentinstreifen, aus primären Zellen, erscheint in derselben Weise wie oben. Auch in diesen Zähnen findet man nirgends Cement in der Structur der schwammigen Knochen, sondern eine auf Taf. XVIII, Fig. 3 u. 4 abgebildete Gewebeveränderung der homogenen Knochenmasse. Die Emailschichtung ist wellig-concentrisch, der äusseren Zahncontour parallel und enthält Schmelzzellen *t'c'*. Je mehr sich die Emailschicht dem Dentin nähert, desto schwächer wird die Krümmung der welligen Streifen (vergl. Taf. XVII, Fig. 3) und die stellweise auftretende bedeutende Anzahl von

Zellen *t'c'*, in der Nähe der Mitte der Emailschicht, berechtigt uns auf die Reife des Zahnes zu schliessen.

Die Zerstückelung der Pulpa (Taf. XVIII, Fig. 5) muss auch als wichtiges Kennzeichen betrachtet werden.

Auf Taf. XIX sind Theile aus der rechten hintern Flosse eines *Lütkesaurus* vorgeführt. Das in $^1/_2$ der natürlichen Grösse abgebildete Exemplar stellt einen Theil der Flosse dar, welche der Flosse des *Pliosaurus portlandicus* Ow. gleicht (vergl. Palaeont. Soc Monogr. Brit. Foss. Rept. vol. for 1868). Owen hat sie in $^3/_8$ der natürlichen Grösse abgebildet.

Am Exemplar unserer rechten Flosse aus dem Sewerischen Osteolith sehen wir auch einen Theil des Oberschenkelbeins (femur) das Schienbein (crus) in drei Theilen den aus zwei separaten Knochenreihen bestehenden Tarsus und die anliegenden Enden mehrerer Knochen des Metatarsus. Darum können wir diese höchst merkwürdigen und einzigen Fossilen bequem mit einander vergleichen.

Bevor wir jedoch zu dieser Vergleichung schreiten, halte ich es für unumgänglich darauf aufmerksam zu machen, dass unser Exemplar, welches zugleich mit den Zähnen, — die sich durch ihre zartgestreifte Krone und zum Theil auch durch ihren mikroskopischen Bau auszeichnen —, gefunden wurde, auch seine eigenen wesentlichen Eigenthümlichkeiten besitzt, welche es von der portländischen Flosse unterscheiden. Diese Eigenthümlichkeiten bestehen sowohl in der besonderen, wenig abgerundeten Form des Schienbeins (crus) des Tarsus und des Metatarsus, welche, wie ersichtlich, am vordern Rande Fig. 1 u. 3 Vertiefungen *oo* aufweisen, als auch und vorzüglich darin, dass man an der Aussenseite der Schaufelflosse unseres Sewerischen Exemplars eine Platte *pt* aus Knochengewebe wahrnimmt (Fig. 2, 4, 5).

Diese dünne Platte erstreckt sich vom entfernten Ende des Oberschenkelbeins (femur) längs dem Schienbein, dem Wadenbeine, den Fusswurzelknochen (Tarsus) in der ganzen Flossenbreite bis zu den Phalangenreihen. Die Platte *pt*, wie auch die Fusswurzelknochen (Tarsus) bilden die Ossificationscentra des Knorpels, welcher in Perichondrium übergeht und sich in die Gelenke aller von der Platte *pt* bedeckten Knochen verbreitet. In der Bildung der Platte nahm das Hautskelet des Thieres dem Anscheine nach ebensolchen Antheil, wie es bei den Schildkröten zur Verwandlung der Brustknochen in den Brustschild beiträgt.

Das Oberschenkelbein Taf. XIX, Fig. 1 weist überhaupt schwache charakteristische Merkmale auf. Eines der vollständigsten Muster solcher Knochen aus meiner Sammlung (vergl. meine Studien am *Plesiosaurus* Taf. 10, Fig. 3) ist so sehr mit Steinmasse bedeckt, dass man seine äussere Oberfläche nicht beurtheilen und auch seine Form und Grösse nur annähernd bestimmen kann.

Fig. 1 auf Taf. XIX zeigt, dass die Oberflächen des Oberschenkelbeins 65, — welche zur Verbindung mit dem Schienbein 66 und dem Wadenbein 67 dienten, unter einem stumpfen Winkel zusammentreffen. Das entfernte Ende des Oberschenkelbeins ist ziemlich dünn,

der über das zum Schienbein (tibia) hin ausgehende Theil ist abgerundet und der zum Wadenbein (fibula) gewandte, dient dem Knochen 67 als Stütze. Die Repräsentanten des Schien- und des Wadenbeins (66 u. 67) scheinen auch in dieser Flosse, ebenso wie bei *Ichthyosaurus* zur ersten Reihe der Mittelfussknochen (metatarsus) umgebildet zu sein, doch übertreffen sie an Grösse auffallend diejenigen der beiden folgenden Reihen, welche eigentlich die Fusswurzelknochen (tarsus) dieser Flosse bilden.

Zu den bemerkenswerthen Eigenthümlichkeiten des Exemplars aus dem Sewerischen Osteolith gehört folgender Umstand, dass die Knochen der Schienen- oder Innenreihe tiefe Eindrückungen haben, analog den Ausschnitten, welche man an ebensolchen Knochen bei manchen Species von *Ichthyosaurus* antrifft, bei denen sie zur Befestigung der Oberhaut der Flossen dienten.

Die Breite des Schienbeins 66 übertrifft auch im Sewerischen Exemplare dessen Länge; die Innen- oder Wadenbeinseite wie auch die äussere oder Schienbeinseite ist schwach abgerundet; erstere bietet einige Convexität dar, letztere muss der ganzen Länge nach concav gewesen sein. Ausserdem hat der allgemeine Knochenumriss der vorliegenden Abbildung das Aussehen eines unregelmässigen Vierecks. Die Länge des Schienbeins beträgt längs der normalen Linie zur Oberfläche der Vereinigung mit dem Oberschenkelbein 2 Zoll 1 Linie, seine Breite 2 Zoll 7 Linien und die Dicke 6 Linien bis zu 1 Zoll und 2 Linien; der Zwischenraum zwischen dem Schienbein und dem Oberschenkelbein ist 5 Linien breit. Dieser Zwischenraum zeigt auch an unserem Exemplar höchstwahrscheinlich die Dicke des Bindegewebes, welches in die ersichtliche Steinmasse übergegangen ist.

Das Wadenbein 67 ist kleiner als das Schienbein und sechseckig; seine Länge in der normalen Linie zur Gelenkverbindung mit dem Oberschenkelbeine beträgt 2 Zoll, die Breite $2\frac{1}{2}$ Zoll und die Dicke 6 Linien. Der zum Oberschenkelbein gewandte Rand ist fast gerade und der entfernte Rand bildet drei stumpfe Winkel, von denen der erste dem Zwischenraume zwischen den Knochen *a* und *cl'* gegenüber liegt; der zweite gegenüber dem Raume zwischen den Knochen *cl'* und *o* und der dritte gegenüber dem Raume zwischen den Knochen *o* und 67' zu liegen kommt. Der Character der Lage der abgebildeten Knochen, die unmittelbar auf das Oberschenkelbein 65 folgen, äussert sich durch das Auffinden eines dritten Knochens 67'. Unser Exemplar ist auch etwas beschädigt; dessenungeachtet ist es klar, dass er an Grösse dem Schienbein und dem Wadenbein weit nachsteht, eine ovallängliche Form hat und dass seine längste Achse eine normale Richtung zur Gelenkfläche mit dem Oberschenkelbeine hat. Prof. R. Owen hält diesen Knochen 67' für anomal und nennt ihn fabella.

Die Dicke der Knochen 66, 67 u. 67', so wie des mit ihnen eine Gelenkverbindung eingehenden Endes des Oberschenkelbeins ist gering, wie bei dem portländischen Exemplare. Fig. 4 u. 5, Taf. XIX zeigen die Veränderlichkeit der Dicke dieser Knochen: von 6 Linien bis $1\frac{1}{2}$ Zoll und dass das Oberschenkelbein selbst zum Schaft sich rasch verdickte und die ovalrunden Contouren annahm.

Die Knochen der folgenden ersten Reihe der Fusswurzelknochen (tarsus) sind ziemlich gleich gross und der äusserste von ihnen, aus der Schienenreihe, das Kahnbein *s* (os. scaphoideum, s. naviculare) ist nicht der kleinste, denn er ist grösser als das Fersenbein *cl'* (calcaneus). Unser Kahnbeinexemplar hat mehr eckige Gelenkflächen für die anderen Knochen, als das portländische Exemplar und eine gerade eingedrückte Oberfläche *o* auf der freien Seite. Die Länge dieses Knochens beträgt 1 Zoll 4 Linien, seine Breite 1 Zoll 7 Linien. Der erste Verbindungsraum zwischen diesem Knochen und dem Schienbein misst bis zu $\frac{1}{2}$ Zoll.

Unser Sprungbein-Exemplar (Astragalus) *a* ist auch mit der vorstehenden Ecke des nächsten Randes dem Zwischenraume zugekehrt, welcher sich zwischen dem Schien- und dem Wadenbein befindet. Dieser sechseckige Knochen misst sowohl in der Länge als in der Breite 1 Zoll 8 Lin. und in der Dicke bis zu 6 Lin. Der Raum zwischen Astragalus *a* und dem Kahnbein *s* beträgt nicht mehr als 2 Lin. Breite und der Raum zwischen dem Knochen *a* und den Beinknochen 66 u. 67 beläuft sich auf 3 Lin. Das Fersenbein (calcaneus) *cl'* aus der Sewerischen Flosse ist nicht einer der grössten Knochen dieser Reihe: er ist kleiner als der Astragalus *a*; seine Form ist die eines unregelmässigen Trapezes mit abgerundeten Ecken. Der nächste Rand ist dem entfernten Rande des Wadenbeines 67, mit welchem es sich vermittelst des $1\frac{3}{4}$ Lin. dicken Verbindungsgewebes vereinigte, ziemlich parallel. Eine kürzere, gerade Facette ist zum Astragalus *a* gerichtet; weiter biegt sich diese Facette um und bildet von der geraden kurzen Facette aus einen stumpfen Winkel, der dem Raume zwischen den Knochen *a* und *ce'* gegenüber liegt. Die vierte Seite des Calcaneus *cl'* zeigt in ihrer Contour einen kleinen Ausschnitt und entfernt sich vom Knochen 67' durch das Ergänzungs-Knöchelchen *o*. Nur dieses letztere Ergänzungs-Knöchelchen tritt oben in den Raum zwischen den Knochen 67 u. 67' und von der Seite zwischen die Knochen 67 und *cl'*.

Durch Alles dieses unterscheidet sich, wie ersichtlich, unsere Sewerische Flosse von der portländischen. Der grösste Längendurchmesser des Knochens *o* beträgt 1 Zoll und ist der Flossenaxe parallel; der Querdurchmesser misst 8 Lin. Die Form des Knochens ist ovallänglich und unregelmässig; am entfernten Ende zugespitzt. Die Breite der Zwischenräume zwischen den Knochen *o* und 67' beträgt 2 Lin., zwischen *o* und 67 bis $2\frac{1}{2}$ Lin. und endlich zwischen *o* und *cl'* auch bis 2 Lin. Die entfernte oder zweite Fusswurzelreihe (tarsus) besteht aus drei Knochen. Der erste keilförmige Knochen der inneren oder Schienbeinreihe *ce* (ento-cuneiform Ow.) ist an seinem freien Rande ohne Zweifel eingedrückt; die übrigen Seiten zeigen abgerundet eckige Contouren.

Dieser Knochen ist 1 Zoll 2 Lin. lang und 1 Zoll 4 Lin. breit. Der mittlere keilförmige Knochen *cm* (mesocuneiform) hat eine deutliche abgerundet sechsseitige Form, in der Querrichtung hat er nicht so elliptische Contouren, wie in der portländischen Flosse. Die eine seiner geraden Kanten ist zum Knochen *a*, die andere zum Knochen *ce'* gerichtet. Die Länge des Knochen s*cm* kommt 1 Zoll $2\frac{1}{2}$ Lin., die Breite 1 Zoll 5 Lin. gleich. Die Mitte seiner entfernten Hervorragung kann man dem Raume zwischen dem 2. und 3. Knochen aus der Metatarsus-

reihe gegenüber annehmen und der Winkel der nahen Facette tritt in den Raum zwischen den Knochen *a* und *s* ein. Die Gestalt des Knochens *ce'* ist länglich-keilförmig; an unserem Exemplare erstreckt sich sein Winkel nicht in den zwischen den Knochen *a* und *cl'* (astragalus und calcaneus) liegenden Raum; der bis 3 Lin. breite Raum zwischen den Knochen *ce'* und *cl'* dagegen wird vollständig von versteinertem Bindegewebe ausgefüllt. Die Länge des Knochens *ce'* beträgt 1 Zoll $3\frac{1}{2}$ Lin., seine Breite 1 Zoll $1\frac{1}{2}$ Lin. und die Dicke 6 Lin.

Die Mittelfussknochen (metatarsus) sind an unserem Exemplare verstümmelt, deren nächste Enden haben sich in der Steinmasse erhalten. Wenn man das entfernte Ende des Oberschenkels Taf. XIX, Fig. 1 mit einem ebensolchen, heilen Knochen vergleicht, so kann man die Länge des Oberschenkelbeines der in Rede stehenden Flosse auf 1 Fuss angeben. In diesem Falle würde die Länge der ganzen Flosse (vom obern Ende des Oberschenkels an bis zum Mittelfussknochen) 1 Fuss 5 Zoll ausmachen; bei der portländischen Flosse beläuft sich die Länge desselben Theiles auf 1 Fuss 5 Zoll und 6 Lin. Wenn das die Grössenmaasse von Flossen erwachsener Thiere sind, so ist die portländische Species von geringerer Grösse, als der grosse *Pliosaurus* aus dem Kimmeridgelehm, doch aller Wahrscheinlichkeit nach grösser als unser Sewerischer *Lütkesaurus.*

Auf Taf. XX, Fig. 1*a*, *b* und *c* ist in $\frac{1}{2}$ der natürlichen Grösse das entfernte Ende eines grossen Flossenknochens dargestellt, welcher im Sewerischen Osteolith mit den Resten des *Lütkesaurus* n. gefunden wurde; *a* ist die Ansicht der obern, *b* die der untern Seite. Obwohl die allgemeine Form dieses Knochens auf einige Aehnlichkeit mit dem vorhin beschriebenen Knochen (Taf. XIII, Fig. 2) aus der Flosse von *Thaumatosaurus Mosquensis* m. hinweist, so äussert sie doch zugleich eine Eigenthümlichkeit im typischen Charakter.

Die Abbildungen auf Taf. XX, Fig. 1*a* und *b* zeigen mehr symmetrische Umrisse des untern Endes dieses Knochens, obwohl der vorstehende Winkel sich dem einen, wie es scheint dem hintern Ende oder der zum Rumpf gewandten Seite des Thieres etwas näher befindet.

Die beiden Seitenflächen weisen schon eine Biegung auf, die vordere Seite *mn* jedoch war vermuthlich convex, die hintere *op* dagegen concav.

Dieser Knochen ist kleiner als der auf Taf. XIII, Fig. 2, wenigstens macht die Breite seines entfernten Endes nicht mehr als 0,22 m. aus. Obwohl dieser Knochen am untern Ende flach ist, so wird er zum entfernten Ende dicker und bildet einen vorstehenden Winkel *z* (Fig. 1*c* ist der Längendurchschnitt nach der Linie *zz'*) am entfernten Rande: sowohl die obere wie die untere Seite des Knochens weisen Einsenkungen *w* und *w'* auf. Die seitlichen Einsenkungen *vv* (Fig. 1*a* u. *b*) sind auf der obern Seite stärker als auf der untern. Alle diese Unebenheiten dienten zur Anheftung der Syndesmosen. Das untere Ende selbst ist im Längendurchschnitt des Knochens durch einen hervortretenden Wulst Fig. 1*c* begrenzt und bildet in der Richtung der Breite des entfernten Endes eine krumme Linie mit grossen Einbiegungen zur Aufnahme von nicht weniger als drei der folgenden Knochen dieser Gliedmaassen, welche von diesem gebogenen Ende des grossen Flossenknochens gestützt wurden. Die Dar-

stellungen (Taf. XX, Fig. 1), selbst zeigen hinreichend die Eigenthümlichkeiten dieses Knochens, durch die er sich von den früher beschriebenen Knochen (Taf. XIII, Fig. 2), unterscheidet; auch ist keine Innenhöhle an ihm wahrzunehmen (vergl. Fig. 1*c*).

Die Flossen des *Lütkesaurus* (und vielleicht auch aller Thiere die zur Gruppe *Thaumatosauria n*, gehörten, als: *Polyptychodon, Pliosaurus* und *Thaumatosaurus*) unterscheiden sich von den Flossen des *Plesiosaurus* und *Ichthyosaurus* mehr dadurch, dass ihre hintern und vordern Fusswurzelknochen, (tarsus und metarsus), wie auch die Carpal- und Metacarpalknochen von knöchernen Platten bedeckt waren und die Knochen der Fingerreihen untereinander durch syndesmotische Knorpel, wie bei *Ichthyosaurus* und *Plesiosaurus*, vereinigt wurden. Deshalb muss die beobachtete Bildung des hervorragenden Wulstes am untern Ende des Knochens (Taf. XX, Fig. 1*c*) ihre Bedeutung gehabt haben (vergl. Taf. XIX, Fig. 5, Knochenende *65* und dessen Vereinigung mit der Knochenplatte *pt*). Abgesehn davon muss hier noch bemerkt werden, dass die erwähnte knöcherne Platte als Ossification der Lederhaut vorkommen konnte, wie das bei vielen Wirbelthieren, in grösserem oder geringerem Maasse der Fall ist (vergl. F. Leydig Mikroskop. Anat. pp. 39—95).

Fig. 2*b* u. *c*, auf Taf. XX, zeigen ebenfalls in $1/2$ der natürlichen Grösse einen viel kleineren Knochen, als der beschriebene (Taf. XX, Fig. 1), der aber höchstwahrscheinlich zu derselben Species gehört, wie dieser: *a* ist die Ansicht der zum Rumpf gewandten, *c* die der vordern Seite.

Dieser Knochen ist im Sewerischen Osteolith und zwar in demselben Steinbruch aus dem die Reste von *Lütkesaurus* stammen, zusammen mit dem Taf. X, Fig. 3 (Studien am *Plesiosaurus*), vorgeführten Knochen gefunden worden. Der letztere ist dort als Beispiel dafür aufgenommen, wie bisweilen solche Knochen in diesem Gestein eingebettet sind.

Beim Reinigen des Knochens (Taf. XX, Fig. 2), von der Steinmasse war es nicht nur unmöglich seine äussere Oberfläche unverletzt zu erhalten, sondern stellenweise ist auch der Körper selbst ausgebrochen. Dessen ungeachtet hat dieser zusammengesetzte Knochen, wie aus den Abbildungen ersichtlich: 1) seine ganze Länge aufzuweisen, 2) sieht man, dass er keine Innenhöhle hat, 3) dass sein Schaft schnell breit wird, 4) dass der untere Rand des entfernten Endes, soweit er erhalten ist, eine convexe Form hat und der vorstehende Winkel etwas näher zur hintern Seite zu liegen kommt; die Vorderseite dieses Knochens ist vermuthlich auch convex, die Hinterseite concav gewesen, endlich 5) dass das entfernte Ende eine Biegung zur untern oder zum Rumpf gewandten Seite hatte, wodurch die obere Seite dieses Knochens etwas convex erscheint. Das obere oder nahe Schaftende des Knochens bildet das Gelenkköpfchen, das, obwohl nicht vollkommen conservirt, doch seiner Form und dem äussern Aussehn nach mit den obern Enden der grossen Flossenknochen von *Plesiosaurus* und *Pliosaurus*, eine grosse Aehnlichkeit erkennen lässt.

Wenn man, auf Grund aller dieser Merkmale annimmt, dieser Knochen sei ein Humerus der rechten Seite von *Lütkesaurus* und zwar von einem jungen oder nicht grossen Individuum, so könnte der Knochen Taf. XX, Fig. 1, für den Humerus der linken Seite eines ebensolchen

Thieres, nur von reiferem Alter gehalten werden. Der Knochen auf Taf. XIII, Fig. 2 endlich wird den Oberarm der rechten Seite eines *Thaumatosaurus Mosquensis* vorstellen.

Auf Taf. 20, Fig. 3*a* u. *b*, Fig. 4*a* u. *b* und Fig. 6*a*, *c* u. *d*, sind die kleinen Fusswurzelknochen (tarsus) in $^1/_2$ der natürlichen Grösse dargestellt, die aller Wahrscheinlichkeit einem Individuum angehört haben, welches an Alter dem Thiere, von welchem der Knochen Taf. XX, Fig. 2 herrührt, gleich war.

Ich glaube, ohne zu fehlen, die Knochen Fig. 3, 4*a* u. *b* für Astragali und denjenigen Fig. 6 für den Knochen *o* halten zu dürfen (vergl. Taf. XIX, Fig. 1). Der Buchstabe *a* bezeichnet die obere Ansicht der beiden ersten dieser Knochen, *b* deren seitliche Ansicht. Das Knöchelchen *o* in Fig. 6*a* ist von oben abgebildet; Fig. 6*c* zeigt dessen Gelenkfläche, welche den Knochen *67* und *cl'* zugewandt ist und der entgegengesetzte Rand stellt die keilförmige, freie Seite dar, was man besser auf dem Querschnitt Fig. 6*d* nach der Linie *nn'*, welche auf der Darstellung Fig. 6*a* angedeutet ist, sieht.

Auf Taf. XV, Fig. 2, ist der Körper eines hintern Halswirbels von *Lütkesaurus* in $^1/_2$ der natürlichen Grösse vorgeführt. Die Abbildung *B* stellt die vordere, zum Kopf gewandte und *B'* die hintere, zum Rumpf gekehrte Gelenkfläche dar. *D*, zeigt den Längendurchschnitt nach der Achse des Wirbelkörpers.

Dieser Wirbel stammt aus denselben Steinbrüchen, in denen die oben beschriebenen Theile von *Lütkesaurus* entdeckt wurden. Er weist in jeder Hinsicht grosse Aehnlichkeit mit dem Wirbel von *Thaumatosaurus Mosquensis* n. (Taf, XV, Fig. 1) auf, doch muss er einem Individuum von geringerer Grösse angehört haben.

Der Wirbel ist bedeutend beschädigt und abgerieben; trotzdem findet man an ihm Anzeichen von Gelenkverbindungen mit den Neurapophysen *np* und den Pleurapophysen *pl*; auch sieht man Spuren vom Boden des Rückenmarkkanal's *n*. Die Dimensionen können so angenommen werden, wie die Zeichnungen sie bieten.

Die Abbildung Taf. XV, Fig. 2*c* zeigt (wie ich schon früher gesagt) den Längendurchschnitt des Knochengewebes $^{95}/_1$ Mal vergrössert, Fig. 2*D* den Querschnitt desselben Gewebes bei gleicher Vergrösserung ($^{95}/_1$) und Fig. 2*E* u. *F*, sind Theile der eben genannten Schnitte, jedoch bei einer Vergrösserung von $^{600}/_1$.

Eine solche Darstellung der Knochengewebe zeigt die Zartheit, oder, so zu sagen, die unvollendete Entwickelung der Knochengewebe des Wirbels Fig. 2; namentlich die Medullarkanäle sind mit verkalktem, aber dünnem Knorpel angefüllt, in dem man nicht so häufig die Knochenkörper oder Knochenhöhlen *lk* antrifft, sondern die Anhäufungen *k'r'* von Knorpelzellen nehmen, mit den sie umgebenden Schichten von homogenem Blastem *bl*, viel Raum ein. An den Stellen, wo der Knochen schon solide ist, senden die Knochenkörper oder Knochenhöhlen keine Ausläufer *tl* aus, sondern sind, wie die Knorpelzellen von Blastemwändchen *bl* umgeben und die Röhrchen *t* erscheinen hier nicht so dicht und nicht so zahlreich.

Das mit der Lupe untersuchte Knochengewebe der rechten hintern Flosse eines *Lütkesaurus* aus dem Sewerischen Ostheolith (Taf. XIX, Fig. 1—5) zeigt bei $^{20}/_1$ f. lin. Vergr.

(Taf. XIX, Fig. 6*a* u. *b* und Fig. 7*a*, *b*, *c*), dass die Bildung dieser Knochen, wie auch die Structur der Knochen- und Knorpelgewebe der Bildung und Structur derselben Gewebe in den Knochen der Gliedmaassen von *Ichthyosaurus* ähnlich sind (vergl. meine Studien am Ichthyosaurus).

Auserdem sehn wir im vorliegenden Falle den Uebergang des Knorpels einerseits in Knochengewebe, andererseits in das Gewebe des Perichondrium *hd*, das alle Gelenkzwischenräume ausfüllend, von der Verbreitung und der Dicke des Bindegewebes zeugt, die sich zwischen den versteinerten Centren der Gliedmaassen befanden und wie im portländischen, so auch im Sewerischen Exemplare in Steinmaasse übergegangen sind.

Die mikroskopischen Untersuchungen dieser Knorpel-, Knochen- und Perichondriumgewebe, welche auf Taf. XXI, Fig. 1—7 abgebildet sind, zeigen:

Fig. 1, die Structur der Knochengewebe 65 u. 67, in longitudinaler Richtung in der Fläche *CD* (vergl. Taf. XIX, Fig. 1 u. 5), d. h. in der Lage des Taf. XIX, Fig. 7*b* abgebildeten Knochendurchschnittes bei $^{95}/_{1}$ f. lin. Vergr.

Fig. 2, die Structur der Gewebe derselben Knochen 65 u. 67, in transversaler Richtung in der Schnittfläche *AB* (vergl. Taf. XIX, Fig. 1 u. 4), d. h. nach der Lage der Taf. XIX, Fig. 7*a* abgebildeten Knochen bei $^{95}/_{1}$ f. lin. Verg.

Fig. 3, die Structur der Gewebe der Platte *pt* des Knorpels *kr* und des Perichondrium *hd* in transversaler Richtung, in der Schnittfläche *AB* (vergl. Taf. XIX, Fig. 1 u. 4), d. h. nach der Lage des Gewebedurchschnitt's Taf. XIX, Fig. 6*a*, bei $^{95}/_{1}$ f. lin. Verg.

Fig. 4, die Structur des Knochens der Platte *pt* und des Knorpels *kr* in longitudinaler Richtung in der Fläche *CD* (vergl. Taf. XIX, Fig. 1 u. 5), d. h. nach der Lage des Taf. XIX, Fig. 6*b* abgebildeten Gewebedurchschnitt's bei $^{95}/_{1}$ f. lin. Vergr.

Fig. 5 u. 6, die Structur des Gewebes des Knorpels *kr* in transversaler Richtung, d. h. nach der, Taf. XIX, Fig. 7*c*, abgebildeten Lage bei $^{95}/_{1}$ u. $^{600}/_{1}$ f. lin. Verg.

Fig. 7, die Structur des Knochengewebes der Platte *pt* in tranversaler Richtung, der Studie Taf. XXI, Fig. 3, entnommen, bei $^{600}/_{1}$ f. lin. Vergr.

Alle diese Studien weisen auf dieselbe Veränderlichkeit der Knochengewebe hin, welche an den Knochen der Ichthyosauren und noch deutlicher an denen der *Sauropterygia*, Ow. beobachtet wurde und daher ist man berechtigt vorauszusetzen, dass auch die Thiere dieser Art als Meersäugethiere angesehen werden müssen, sowie, dass sie wahrscheinlich lebendige Jungen zur Welt brachten.

Weiter sehen wir, dass die Flosse Taf. XIX einem zwar erwachsenen, aber noch nicht alten Thiere angehört hat, weil um die Medullarkanäle herum noch frische Ablagerungen von Knochenmasse zu sehen sind. Die Medullarkanäle selbst sind mit Osteodentin d'' gefüllt, welches stellenweise einen noch sehr schwachen Bau verräth; auch findet man noch Spuren der Röhrchen *t* (Fig. 4). Im Perichondrium *hd* (Fig. 3), sehen wir von den Fasern seines versteinerten Gewebes umgebene Crystalle von Salzen. Fig. 6 zeigt uns die Entstehung der Knochenhöhlungen *lk* aus den Intercellularräumen.

Fig. 8 u. 9, stellen den Bau des Knochen,- Knorpel- und Knorpelhaut- (Perichondrium-) Gewebes in der Längen- und Querrichtung bei $^{95}/_1$ f. lin. Vergr. dar. Diese Gewebe sind dem, auf Taf. XX, Fig. 1, abgebildeten, linken Oberarm entnommen.

Fig. 10, stellt das Gewebe aus dem Querschnitte Fig. 9, bei einer Linearvergrösserung von $^{600}/_1$ dar.

Fig. 11, ist eine Studie des Knorpelgewebes aus der Fläche *mn* (vergl. Fig. 8), bei $^{95}/_1$ f. lin. Vergr., und

Fig. 12, dasselbe Knorpelgewebe aus der Studie Fig. 11, aber bei $^{600}/_1$ f. lin. Vergr.

Alle diese Studien zeigen auch deutlich, dass dieser Knochen nach der Structur seiner Gewebe einem Thiere derselben Art angehört hat, wie dasjenige, vom dem die Taf. XIX, dargestellte Flosse herstammt. Auch hier sehn wir wieder die Veränderlichkeit der Gewebe und die angeführten Kennzeichen beweisen, dass dieser Knochen von einem erwachsenen, aber noch nicht alten Individuum herrührt. Fig. 12 zeigt uns die Bildung der Röhrchen *t*.

Bei Beurtheilung der Dimensionen und der allgemeinen Grösse der Knochen und Zähne des Lütkesaurus drängt sich uns die Ueberzeugung auf, dass dieses Thier von kleinerem Wuchse war, als die bekannten Genera: *Pliosaurus*, *Polyptychodon* und *Thaumatosaurus*.

Fig. 13 u. 14, zeigen die Gewebestructur des Taf. XX, Fig. 2, abgebildeten, rechten Oberarmknochens in transversaler Richtung bei $^{95}/_1$ f. und $^{600}/_1$ f. lin. Vergr.

Aus diesen Studien erhellt, dass dieser Knochen aus zarten Geweben schwachen, verknöcherten Knorpels besteht und deshalb einem Individuum derselben Art, aber von jugendlicherem Alter als die vorher untersuchten und Taf. XIX u. XX abgebildeten Knochen angehört haben kann.

Denselben Schluss gestattet auch die Untersuchung der Studien Taf. XX, Fig. 5*e* u. *e'*, welches sich auf die, Fig. 3 u. 4, derselben Taf. XX, abgebildeten Knochen beziehen.

Von diesen Studien zeigt uns Fig. 5*e* die Structur des Gewebes in longitudinaler und die Studie Fig. 5*e'* in transversaler Richtung, bei $^{95}/_1$ f. lin. Vergr.

Wenn man jedoch in Betracht zieht, dass die Verknöcherung der kleinen Flossenknochen, im Vergleich zu der Verknöcherung in den grossen Knochen, bedeutend später eintreten konnte und dass das Gewebe Fig. 5, schon einen ziemlich hohen Grad von Verknöcherung aufweist, so muss man daraus schliessen, dass die Knochen Fig. 3, 4 u. 6 aller Wahrscheinlichkeit nach einem Thier von reiferem Alter, wenn nichtgar einem vollständig ausgewachsenen angehörten; da aber die Grösse dieser Knochen dabei eine sehr geringe ist, so bestätigt dieses die früher ausgesprochene Meinung, dass der *Lütkesaurus*, im Vergleich mit den ihm am nächsten stehenden Arten, von geringerer Grösse war.

Hiermit gelangen die vorliegenden Untersuchungen der Meereidechsen aus der Jura- und Kreideformation im mittleren europäischen Russland zum Schlusse.

Die besprochene Sammlung ist nicht gross, aber sie umfasst Vieles von dem bis jetzt bei uns Gefundenen. Dieses Werk ist nicht umfangreich, aber es hat manches Jahr Mühe gekostet. Deshalb war die Herausgabe dieser Untersuchungen wünschenswerth, um so mehr,

als dieselben darlegen, dass es fast immer möglich ist die Ergebnisse durch mikroskopische Beobachtungen zu controliren und so eine richtigere Bestimmung einzelner Theile aus stückweise gefunden Skeleten zu Wege zu bringen.

Den Gegenstand des 4-ten, wenig umfangreichen Theiles dieses Werkes wird die Untersuchung der, gleichfalls in der Kreideperiode vorkommenden Landeidechsen ausmachen, deren Reste im Sewerischen Osteolith gefunden wurden.

Von fossilen Resten der Landeidechsen besitzen wir noch weniger, als von den hier beschriebenen Resten der Meereidechsen; trozdem wird aber bei der Untersuchung derselben mit Hülfe der vergleichenden Physiologie und Embryologie Alles in unseren Kräften Liegende gesthan werden, um soviel wie möglich Data für die vorläufige Entscheidung der Fragen zu sammeln, die mit der Entstehung und Entwickelung der organischen Geschöpfe der gegenwärtigen und längst vergangenen Zeit in unmittelbarem Zusammenhange stehn.

Erklärung der Tafeln.

Tafel I.

Versteinerungen aus der Sammlung von W. A. Kiprijanoff.

(Die Abbildungen sind in natürlicher ($^1/_1$) Grösse ausgeführt.

Polyptychodon interruptus Owen.

Fig. 1*a*. Ansicht eines Zahnes von der äussern, convexen Seite.
b. » » » » vordern, lateralen Seite.
c. » » » » innern, concaven Seite.
d. Querschnitt des Kronentheiles nach der Linie *dd*.
f. » der Wurzel nach der Linie *ff*.
Fig. 2*a*. Ansicht eines Zahnes von der äussern, convexen Seite.
b. » » » » » Vorderseite.
c. » » » » » innern, concaven Seite.
d. Querschnitt durch die Krone nach der Linie *dd*.
e. » » » » » » am Zahnhalse befindlichen Grenzlinie *ee*.
f. » » » Wurzel, nahe am Zahnhalse, nach der Linie *ff*.
g. » » den untersten Theil der Zahnwurzel nach der Linie *gg*.

Tafel II.

Versteinerungen aus der Sammlung von W. A. Kiprijanoff.

(Die Abbildungen sind in natürlicher ($^1/_1$) Grösse ausgeführt.)

Polyptychodon interruptus Owen.

Fig. 1*a*. Ansicht eines Zahnes von der äussern, convexen Seite.
b. » » » » » vordern, lateralen Seite.
c. » » » » » innern, concaven Seite.
d. Querschnitt durch die Krone nach der Linie *dd*.
d'. Kronengipfel von oben gesehen, $^2/_1$ Mal vergrössert.
e. Querschnitt durch den Zahn nahe zur Grenzlinie des Email *ee*.
f. » » die Wurzel nach der Linie *ff*.
h. Aeussere Ansicht eines Theiles der gut conservirten Schmelzschicht auf der Zahnkrone bei ($^2/_1$) facher Vergrösserung.
h'. Aeussere Ansicht eines Theiles derselben, gut conservirten, Emailschicht auf der Zahnkrone bei $^{10}/_1$ facher lin. Vergr.
h''. Aeussere Ansicht eines Theiles der runzligen Oberfläche der Emailschicht auf der convexen Seite des Zahnes Taf. I, Fig. 1 u. 2 bei $^8/_1$ f. lin. Vergr.

Fig. 2*a*. Ansicht der convexen, äussern Seite des Zahnes.
b. Seitenansicht.
d. Querschnitt durch die Zahnkrone nach der Linie *dd*.
e. » des Zahnes, dicht an der äussern Schmelzlinie *ee*.

Fig. 3*a*. Ansicht eines Wurzelzahnes von *Polyptychodon interruptus* Ow. von der äussern, oder convexen Seite.
b. Seitenansicht des Zahnes.
c. Dessen Innenseite.
d. Querschnitt durch die Zahnkrone nach der Linie *dd*.
d'. » » » » nahe am Gipfel.
f. » » » Wurzel, nahe der Linie *ff* und nahe an der Grenzlinie der Schmelzschicht.

Tafel III.

(Zur Taf. I, Fig. 1, 2 und Taf. II, Fig. 1—3.)

Polyptychodon interruptus Owen.

Fig. 1. Längendurchschnitt durch die Zahnkrone und einen Theil der Zahnwurzel bei $^2/_1$ maliger Contourvergrösserung und $^{20}/_1$ f. lin. Vergr. der Gewebeschichtung: *a* Innenhöhle des Zahnes (pulp-carity), *b* Dentin, *c* Schmelz und *d''* zeigt die Nachbleibsel von Osteodentin oder von Cementbrei.
1*a*. Querschnitt durch die Krone desselben Zahnes bei $^8/_1$ f. Vergr. der Contour und $^{20}/_1$ f. Vergr. der Gewebestructur.

Fig. 1*a'*. Natürliche Grösse desselben Schnittes. Alle übrigen Zeichen haben dieselbe Bedeutung, wie bei der vorhergehenden Abbildung.

b. Ein Theil des Querschnittes durch die Krone desselben Zahnes, näher zum Halse, nach der Linie *yv*. Vergrösserung der Contouren $^{8}/_{1}$; lin. Vergr. der Gewebestructur $^{20}/_{1}$. Alle übrigen Buchstaben haben die oben angegebene Bedeutung.

c. Ein Theil des Querschnittes durch den Hals desselben Zahnes nach der Linie *y'v'*. Die Vergrösserungen und die Bezeichnungen sind die früher angegebenen.

Fig. 2. Wechselzahn eines *Polyptychodon interruptus* Ow. Taf. II, Fig. 3. Längendurchschnitt bei $^{2}/_{1}$ facher Contourvergrösserung und $^{20}/_{1}$ facher Vergr. der Gewebestructur mit denselben Bezeichnungen.

a. Ein Theil des Querschnittes der Krone desselben Zahnes nach der Linie *mn* bei $^{8}/_{1}$ facher Vergr. im Umriss und $^{20}/_{1}$ facher der Structur.

b. Ein Theil des Querschnittes durch die Krone desselben Zahnes, näher zu dessen Halse, nach der Linie *yv* in den angegebenen Vergrösserungen.

Fig. 3. *Lütkesaurus* n. zur Taf. XVII, Fig. 1 u. 2. Längendurchschnitt eines Zahnes bei $^{2}/_{1}$ f. Vergr. der Umrisse und $^{20}/_{1}$ f. Vergr. der Gewebestructur mit den früheren Bezeichnungen.

a. Ein Theil des Querschnittes durch die Krone desselben Zahnes nach der Linie *yv*. Vergrösserung der Umrisse $^{8}/_{1}$, der Gewebestructur $^{20}/_{1}$. Alle Bezeichnungen haben die frühere Bedeutung.

c. Ein Theil des Querschnittes durch die Wurzel desselben Zahnes nach der Linie *y'v'*. Die Vergrösserungen sind dieselben wie bei Fig. 3*a*.

Fig. 4. Längendurchschnitt des Zahnes eines ausgewachsenen Nil-Crocodils bei $^{2}/_{1}$ facher Vergr. der Umrisse und $^{20}/_{1}$ f. Vergr. der Gewebestructur. Die Bezeichnungen der Theile sind die früheren.

a. Ein Theil des Querschnittes durch die Krone desselben Zahnes bei $^{8}/_{1}$ facher Vergr. der Contour und den früheren Bezeichnungen.

a' ist die Darstellung desselben Schnittes durch die Zahnkrone in natürlicher Grösse.

Fig. 5. Längendurchschnitt des Zahnes eines jugendlichen Nil-Crocodil's bei $^{4}/_{1}$ facher Contourvergr. und $^{20}/_{1}$ f. lin. Vergr. der Gewebestructur. Die Zeichen sind dieselben, wie bei den vorhergehenden Abbildungen.

Fig. 6. Längendurchschnitt des Zahnes von demselben jugendlichen Nilcrocodil $^{4}/_{1}$ Mal vergrössert im Umrisse, bei $^{20}/_{1}$ f. lin. Vergr. der Gewebeschichtung. Alle Zeichen haben die frühere Bedeutung.

Tafel IV.

Fig. 1. Ein Theil des Querschnittes der Zahnkrone von einem *Polyptychodon interruptus* Ow. zur Taf. I, Fig. 1, 2 und Taf. II, Fig. 1, 2 bei $^{450}/_{1}$ f. lin. Vergr. der Structur des Dentins und des Schmelzes.

Fig. 2. Theil eines Längendurchschnittes durch die Krone eines derselben Zähne bei derselben Vergrösserung.

Fig. 3. Ein Theil des Querschnittes durch den Hals eines derselben Zähne bei derselben Vergrösserung.

Fig. 4. Ein Theil des Querschnittes durch die Wurzel bei derselben Vergrösserung.

Fig. 5. Ein Theil des Kronenquerschnittes eines derselben Zähne bei $^{900}/_{1}$ f. lin. Vergr. der Structur des Schmelzes und des Dentins.

Fig. 6. Theil des Längendurchschnittes durch die Krone desselben Zahnes $^{900}/_{1}$ Mal vergrössert.

Tafel V.

Fig. 1. Ein Theil des Längendurchschnittes durch die Krone eines Wechselzahnes von *Polyptychodon interruptus* Ow. zur Taf. II, Fig. 3 bei $^{450}/_1$ f. lin. Vergr. der Gewebestructur und $^{10}/_1$ Vergr. der Contouren. Die einzelnen Schichten und Theile sind mit denselben Buchstaben bezeichnet, wie früher.

Fig. 2. Theil des Querschnittes durch die Krone desselben Zahnes, $^{900}/_1$ Mal vergrössert.

Fig. 3. Theil des Längendurchschnittes durch die Krone desselben Zahnes bei $^{900}/_1$ f. lin. Vergr.

Fig. 4. Theil aus dem Querschnitt des Schmelzes eines ebensolchen, aber älteren Zahnes, als der vorhergehende Wechselzahn bei $^{900}/_1$ f. lin. Vergr.

Fig. 5. Theil eines Schnittes durch den Schmelz eines Zahnes vom *Polyptychodon interruptus* Ow., der Höhe nach (zu Fig. 4) in Platten a, a' u. a'' bei $^{900}/_1$ f. lin. Vergr.

Tafel VI.

Fig. 1. Theil aus dem Längendurchschnitt durch die Krone eines Zahnes von einem ausgewachsenen *Crocodilus niloticus* (*Crocodilus vulgaris* Cuvier) bei $^{450}/_1$ facher lin. Vergr. Die Zeichen haben dieselbe Bedeutung wie bei Fig. 4 (4, 4a u. 4a') auf. Taf. III.

Fig. 2. Theil aus dem Querschnitt durch die Krone desselben Zahnes bei $^{450}/_1$ facher Vergr. der Gewebestructur.

Fig. 3. Theil aus einem Längendurchschnitt durch die Wurzel desselben Zahnes bei $^{450}/_1$ facher Vergr. der Gewebestructur.

Fig. 4. Theil aus einem Querschnitt durch die Wurzel desselben Zahnes bei derselben Vergr.

Fig. 5. Theil aus dem Längendurchschnitt durch die Krone desselben Zahnes bei $^{900}/_1$ facher Vergr. der Structur des Gewebes.

Fig. 6. Theil eines Querschnittes durch die Krone desselben Zahnes bei derselben lin. Vergr.

Fig. 7. Theil eines Längendurchschnittes durch die Wurzel desselben Zahnes bei $^{900}/_1$ f. lin. Vergr.

Fig. 8. Theil eines Querschnittes durch die Wurzel desselben Zahnes bei derselben Vergr.

Fig. 9. Structur des Gewebes im Längendurchschnitt des Zahnes durch die Flächen a und a''' zu den Fig. 5 u. 6.

Tafel VII.

Fig. 1. Längendurchschnitt durch einen Zahn eines jungen *Crocodilus niloticus* (*Crocodilus vulgaris* Cuvier) bei $^{70}/_1$ facher Contourvergr. und $^{450}/_1$ facher Vergr. der Structur. Die Zeichen sind dieselben wie bei Fig. 5 auf Taf. III.

Fig. 2. Querschnitt desselben Zahnes. Die Vergrösserungen sind dieselben wie bei Fig. 1.

Fig. 3. Theil eines Längendurchschnittes durch die Krone desselben Zahnes bei $^{900}/_1$ f. lin. Vergr.

Fig. 4. Theil aus dem Längendurchschnitt durch die Wurzel desselben Zahnes bei $^{900}/_1$ f. lin. Vergr.

Fig. 5. Längendurchschnitt durch einen Wechselzahn desselben jungen Nilcrocodils, welchem der vorhergehende Zahn angehört. Dieser Wechselzahn bietet bloss seine noch nicht vollständig ausgebildete Krone dar bei $^{70}/_1$ f. Vergr. der Umrisse und $^{450}/_1$ f. lin. Vergr. der Gewebestructur mit denselben Bezeichnungen wie bei Fig. 6 auf Taf. III.

Fig. 6. Querschnitt durch denselben Zahn bei $^{70}/_1$ f. Vergr. der Contour und $^{450}/_1$ f. lin. Vergr. der Gewebestructur.

Fig. 7. Theil des Längendurchschnittes durch die Krone desselben Zahnes bei $^{900}/_{1}$ f. lin. Vergr.

Fig. 8. Aeussere Email-Oberfläche vom Halse bis zum Kronengipfel des Zahnes eines erwachsenen Nil-crocodils bei $^{20}/_{1}$ f. lin. Vergr.

Tafel VIII.

Versteinerungen aus der Sammlung von W. A. Kiprijanoff.

(Die Darstellungen sind in natürlicher ($^{1}/_{1}$) Grösse abgenommen.)

Wirbelkörper, vermuthlich von *Polyptychodon interruptus* Owen?

Fig. 1*a* u. *d*. Ein Wirbel der sich durch besondere Grösse seines Centrums oder Körpers auszeichnet; *a* Ansicht der vordern Gelenkfläche, *d* Seiten-Ansicht. (Dieses Exemplar habe ich die Ehre gehabt im Jahre 1857 dem hochgeschätzten Herrn Professor R. Owen darzubringen und die Abbildungen sind nach den, bei mir aufbewahrten Zeichnungen ausgeführt.

Fig. 2*a*, *c*. Noch ein socher Wirbel, doch von geringerer Grösse; *a* bezeichnet die Ansicht seiner Gelenkfläche, *c* den Umriss des Querschnittes dieses Wirbelkörpers.

Fig. 3*a*, *c*, *d*. Wirbel eines jugendlichen Individuums: *a* Ansicht der Gelenkfläche, *c* Querschnitt, *d* Seitenansicht.

Fig. 4*a* u. *d*. Centrum eines ebensolchen Wirbels, wie der vorhergehende: *a* Ansicht der Gelenkfläche, *d* Seitenansicht.

Tafel IX.

Versteinerungen aus der Sammlung von W. A. Kiprijanoff.

(Die Abbildungen sind in natürlicher ($^{1}/_{1}$) Grösse ausgeführt.)

Wirbelkörper, vermuthlich von *Polyptychodon interruptus* Owen?

Fig. 1 u. 2*a* u. *d*; *aa* Ansicht der vordern Gelenkflächen; *dd* von der Seite. (Es sind Halswirbel, die den von R. Owen, in seinem Suppl. № 3, Pl. VI, Fig. 1—4 dargestellten Wirbeln sehr ähnlich sind; auch weisen sie eine typische Aehnlichkeit mit den Wirbeln Taf. VIII auf.

Tafel X.

Fig. 1, 1*a*, 1*b*, 1*c*. Beobachtungen am Gewebe des Wirbels Taf. VIII, Fig. 2*a* u. *c*.

Fig. 1. Nach der Längenrichtung, d. h. nach der Länge des Wirbelkörpers bei $^{95}/_{1}$ f. lin. Vergr.

Fig. 1*a*. Dasselbe bei $^{300}/_{1}$ f. lin. Vergr. der Contouren der Markkanäle und Höhlungen und bei $^{600}/_{1}$ f. Vergr. der Gewebe.

Fig. 1*b*. Querschnitt (im Vergleich zur Länge) des Wirbels bei $^{95}/_{1}$ f. lin. Vergr.

Fig. 1*c*. Dasselbe bei $^{300}/_{1}$ f. lin. Vergr. der Umrisse der Markkanäle und Höhlungen und $^{600}/_{1}$ facher Vergr. der Gewebe.

Fig. 2, 2*a*, 2*b*, 2*c*. Ebensolche Beobachtungen und in derselben Ordnung wie Taf. VIII, Fig. 3*a*, *c* u. *d*.

Fig. 3, 3*a*, 3*b*, 3*c*. Dasselbe in Bezug auf den Wirbel Taf. IX, Fig. 1*a* u. *d*.

Fig. 4, 4*a*, 4*b*, 4*c*. Untersuchungen am Gewebe des Wirbels von *Pliosaurus Wossinskii* Fischer, Taf. XIV, Fig. 3*B* u. *D*. Die Abbildungen sind in derselben Vergrösserung und in derselben Ordnung dargestellt, wie bei Fig. 1 u. 2.

Tafel XI.

Fig. 1. Ein Theil des Längendurchschnittes eines Zahnes von *Polyptychodon interruptus* Owen, bei $^{600}/_1$ f. lin. Vergr., um die Structur des Email an der Grenzlinie zu zeigen; zu Fig. 1 u. 2, Taf. I u. II.

Fig. 2. Ein Theil des Längendurchschnittes durch einen Wechselzahn von *Polyptychodon interruptus* Owen, in gleicher $^{600}/_1$ f. Vergr. gleichfalls zur Veranschaulichung der Structur des Email an der Grenzlinie; zu Taf. II, Fig. 3.

Fig. 3. Ein Theil des Längendurchschnittes durch einen Zahn von *Lütkesaurus* bei $^{600}/_1$ f. lin. Vergr. zur Veranschaulichung der Structur des Email an der Grenzlinie (am Zahnhalse); zu Taf. XVII, Fig. 1*c*, *b*, *e*, *f* und *h'*.

Fig. 4. Längendurchschnitt durch die Krone eines *Thaumatosaurus Mosquensis* m. bei $^{20}/_1$ f. Vergr. im Umrisse und $^{70}/_1$ f. Vergr. der Structur.

Fig. 5. Querschnitt durch die Krone desselben Zahnes. Vergrösserung der Umrisse $^{20}/_1$ und der Gewebe $^{70}/_1$.

Fig. 6. Längendurchschnitt durch die Krone desselben Zahnes bei $^{600}/_1$ f. lin. Vergr.

Fig. 7. Querschnitt durch die Krone eines derselben Zähne, aber nur durch die eine Hälfte des Emailstreifens, bei $^{600}/_1$ f. lin. Vergr.

Fig. 8. Querschnitt durch den oberen Kronentheil eines derselben Zähne, wo der Schmelz am dicksten ist, bei $^{600}/_1$ f. lin. Vergr.

Fig. 9. Theil aus dem Längendurchschnitt durch das Email derselben Zähne bei $^{600}/_1$ f. lin. Vergr., um die Structur des Schmelzes in der Schnittfläche (nach der Linie *m*, *o*, *n* Fig. 5) zu zeigen.

Tafel XII.

Versteinerungen aus der Sammlung der Moskauer Universität.

Thaumatosaurus Mosquensis m.

Fig. 1. Obere Ansicht eines Erdklumpens mit ungeordnet darein eingebetteten Zähnen; in natürlicher ($^1/_1$) Grösse dargestellt.

Fig. 2. Untere Seitenansicht eines Theiles desselben Erdklumpens, ebenfalls in natürlicher ($^1/_1$) Grösse abgenommen.

Fig. 3. Querbruch des Zahnes *A* im Erdklumpen Fig. 1 von der Seite gesehen, in natürlicher ($^1/_1$) Grösse.

Fig. 4. Aeussere Ansicht des Schmelzes vom Zahne *C* aus dem Erdklumpen Fig. 1, in doppelter ($^2/_1$) Vergrösserung.

Fig. 5. Dasselbe bei $^{10}/_1$ facher Vergrösserung.

Fig. 6. Aeussere Ansicht des Schmelzes vom Zahne *E*, aus der Einbettung Fig. 1. Fig. 2 bei doppelter ($^2/_1$) Vergrösserung.

Fig. 7. Dasselbe in $^{10}/_1$ facher Vergr.

Fig. 8. Aeussere Ansicht des Emails vom Zahne *A*, aus der Reihe der Zähne Fig. 1, Taf. XIII bei doppelter ($^2/_1$) Vergr.

Fig. 9. Dasselbe bei $^{10}/_1$ facher Vergr.

Tafel XIII.

Versteinerungen aus der Sammlung der Moskauer Universität.

Thaumatosaurus Mosquensis m.

Fig. 1. Ein Erdklumpen mit drei darin eingebetteten, in einer Reihe liegenden kleineren Zähnen *A*, *B*, u. *C*.
Die Abbildungen sind in natürlicher Grösse dargestellt.
a. Zahn *A* von der innern, concaven Seite.

Fig. 2. Grosser Knochen aus der vordern Flosse in der halben ($^1/_2$) natürlichen Grösse.
Der Oberarm (humerus) der Flosse der rechten Seite.
Ansicht der hinteren, ein wenig concaven Seite.
a. Umriss des oberen Theiles des Schaftes.
b. » nach der Linie ✳.
c. » des verbreiterten Theiles desselben Knochens nach der Linie ✳✳.
d. Ansicht der unteren oder entfernten Gelenkfläche, d. h. der Gelenkfläche mit den Knochen: ulna und radius.

Tafel XIV.

Die Zeichnungen sind in $^1/_2$ der natürlichen Grösse ausgeführt.

Die Exemplare Fig. 1, 2 u. 4 gehören der Moskauer Universität, das Exemplar Fig. 3 der Sammlung W. Kiprijanoff's an.

Fig. 1. Centrum eines der hintern Halswirbel von einem ausgewachsenen *Thaumatosaurus Mosq.* m.
A. Ansicht von oben.
B. » der vordern, oder zum Kopf gewandten Gelenkfläche.
C. » von unten.
D. » von der Seite.

Fig. 2. Centrum eines Halswirbels von *Pliosaurus Wossinskii* Fischer.
Die Buchstaben *A*, *C*, *D* haben dieselbe Bedeutung wie bei Fig. 1.
B' bezeichnet die Ansicht von der hintern, oder zum Rumpf gewandten Gelenkfläche. Der Pfeil zeigt die Richtung des Wirbels zum Kopfe.

Fig. 3. Bruchstück eines Wirbelkörpers von *Pliosaurus Wossinskii* Fischer aus dem, dem Rumpfe näheren Halstheile.
Die Buchstaben *B* u. *D* und der Pfeil haben die angegebene Bedeutung.

Fig. 4. Körper eines Rückenwirbels von einem grossen *Thaumatosaurus Mosquensis*. Die Buchstaben *A* u. *B* haben die oben angegebene Bedeutung.

Fig. 4*C* u. Fig. 4*D* stellen den mikroskopischen Bau der Gewebe im Längen- und Querschnitt (in der Richtung zum Wirbel) bei $^{95}/_1$ f. lin. Vergr. dar.

Fig. 4*E* u. Fig. 4*F*. Theile aus denselben Durchschnitten bei $^{600}/_1$ f. lin. Vergr.

Tafel XV.

Die Versteinerungen Fig. 1 u. 3 gehören zur Sammlung der Moskauer Universität; sie stammen auch aus der, durch *Ammonites virgatus* Buch charakterisirten Ablagerung und sind in $^1/_2$ der natürlichen Grösse dargestellt; das Exemplar Fig. 2 gehört zu meiner Sammlung: es stammt aus dem Sewerischen Osteolith des Kurskischen Gouvernements und ist gleichfalls in $^1/_2$ der natürlichen Grösse dargestellt.

Fig. 1. Centrum eines hinteren Halswirbels von einem grossen *Thaumatosaurus Mosq.* m.
A. Ansicht von oben.
B. » der Gelenkflächen.

Fig. 2. Centrum eines ebensolchen Wirbels von *Lütkesaurus* n. aus dem Sewerischen Osteolith.
B vordere, oder zum Kopf gewandte Gelenkfläche.
B' die zum Rumpf gewandte Gelenkfläche.
D' zeigt einen Längendurchschnitt nach der Achse des Wirbelkörpers.
Der Pfeil zeigt die Richtung des Wirbels zum Kopf.

Fig. 3. Centrum eines Rückenwirbels von einem *Thaumatosaurus Mosquensis*?
B. Ansicht der Gelenkfläche und *C'* Ansicht der untern Seite.

Fig. 1*C*, 1*D*, 1*E* u. 1*F* sind die Ergebnisse der mikroskopischen Untersuchung am Gewebe des auf Taf. XV, Fig. 1*A*, *B* abgebildeten Wirbels.

Fig. 1*C* in der Längenrichtung (d. h. nach der Länge des Wirbelkörpers) bei $^{95}/_1$ f. lin. Vergr.

Fig. 1*D* in der Querrichtung und auch bei derselben lin. Vergr.

Fig. 1*E* u. Fig. 1*F* Theile aus denselben Objecten im Längen- und Querschnitt bei $^{600}/_1$ f. lin. Vergr.

Fig. 2*C*, 2*D*, 2*E* u. 2*F* Ergebnisse der mikroskopischen Beobachtung am Gewebe des Wirbels auf Taf. XV, Fig. 2*B*, *B'*, *D'*.

Fig. 2*C* u. 2*D*. Dasselbe im Längen- und Querschnitt bei $^{95}/_1$ f. lin. Vergr.

Fig. 2*E* u. 2*F*. Theile aus denselben Objecten im Längen- und Querschnitt bei $^{600}/_1$ f. lin. Vergr.

Fig. 3*C*, 3*D*, 3*E* u. 3*F*. Mikroskopische Beobachtung am Gewebe des Wirbels Taf. XV, Fig. 3*B* u. *C'*.

Fig. 3*C* u. 3*D*. Abbildungen des Längen- und Querschnittes bei $^{95}/_1$ f. lin. Vergr.

Fig. 3*E* u. 3*F*. Dasselbe bei $^{600}/_1$ f. lin. Vergr.

Tafel XVI.

Mikroskopische Untersuchungen an Knochen.

Fig. 1*C*, *D*, *E* u. *F*. Wirbelkörper vom *Thaumatosaurus Mosquensis* m. Taf. XIV, Fig. 1. 1*C* ist eine Studie am Knochengewebe im Längendurchschnitt. 1*D*. Dasselbe im Querschnitt, bei $^{95}/_1$ f. lin. Vergr. dargestellt. 1*E* u. 1*F* sind Darstellungen derselben Durchschnitte bei $^{600}/_1$ f. lin. Vergr.

Fig. 2*C*, *D*, *E* u. *F*. Wirbelkörper vom *Pliosaurus Wossinskii* Fischer Taf. XIV, Fig. 2. 2*C* u. 2*D* sind Studien am Knochengewebe nach Längen- und Querrichtung bei $^{95}/_1$ f. lin. Vergr. 2*E* u. 2*F*. Dasselbe bei $^{600}/_1$ f. lin. Vergr.

Fig. 3*C*, *D*, *E* u. *F*. Grosser Flossenknochen eines *Thaumatosaurus Mosquensis* m. Taf. XIII, Fig. 2. 3*C* u. 3*D* zeigen das Knochengewebe in der Längen- und Querrichtung bei $^{95}/_1$ f. lin. Vergr. 3*E* u. 3*F* sind Theile derselben Durchschnitte bei $^{600}/_1$ f. lin. Vergr.

Tafel XVII.

Lütkesaurus aus dem Sewerischen Osteolith.

Versteinerungen aus der Sammlung von W. A. Kiprijanoff.

Fig. *1b*. Ansicht eines Zahnes von der lateralen Seite.
c. » » » » » inneren, oder concaven Seite.
e. Querschnitt durch den Zahn in der Grenzlinie des Email.
f. Querschnitt durch die Zahnwurzel nach der Linie *ff*.
Die Abbildungen sind in natürlicher ($^1/_1$) Grösse gezeichnet.
Fig. *2b*. Ansicht eines Zahnes von der Seite (in natürlicher ($^1/_1$) Grösse).
c. » » » » » inneren oder concaven Seite (in natürlicher ($^1/_1$) Grösse).
h'. Aeusseres Aussehen eines Theiles der Schmelzdecke der Zahnkrone bei $^{10}/_1$ f. lin. Vergr.
Fig. 3. Theil eines Querschnittes durch die Krone des Zahnes, wobei nur ein Streif der Kronendecke zu sehen ist, bei $^{900}/_1$ f. lin. Vergr., um die Structur des Emails und des Dentins zu zeigen.
Fig. 4. Theil eines Längendurchschnittes durch die Krone bei derselben Vergr. der Structur des Schmelzes.
Fig. 5. Theil eines Längenschnittes durch den Schmelz bei derselben Vergr. zur Veranschaulichung der Structur des Schmelzes in den Schnittflächen *a*, *a'* und *a''* Fig. 4.

Tafel XVIII.

Mikroskopische Untersuchungen eines Zahnes von Lütkesaurus n.

Fig. 1. Theil eines Längendurchschnittes durch die Krone bei $^{450}/_1$ f. lin. Vergr.
Fig. 2. » » Querschnittes » » » » derselben Vergr.
Fig. 3. » » Längenschnittes durch die Wurzel bei derselben Vergr.
Fig. 4. » » Querschnittes » » » » » »
Fig. 5. Gipfel der Innenhöhle in der Zahnkrone » » »

Tafel XIX.

Lütkesaurus aus dem Sewerischen Osteolith.

Versteinerungen aus der Sammlung von W. A. Kiprijanoff.

Fig. 1. Ansicht eines Theiles der rechten Hinterflosse von der inneren, oder zum Rumpf des Thieres gewandten Seite in halber ($^1/_2$) natürlicher Grösse.
Fig. 2. Derselbe Flossentheil von der äusseren Seite.
Fig. 3. Das Profil desselben Flossentheiles vom Kopfe gesehen in $^1/_2$ natürlicher Grösse.
Fig. 4. Querschnitt nach der Fläche *AB* in derselben Grösse.
Fig. 5. Längendurchschnitt nach der Fläche *CD* in derselben Grösse.
Fig. 6. Structur des Knochengewebes der Platte *pt*, mit dem sie umgebenden, in der Verknöcherung begriffenen Knorpel und der Ueberknorpelhaut (Perichondrium) *hd* bei $^{20}/_1$ f. lin. Vergr.

a im Querschnitt nach der Fläche *AB* Fig. 4 und
b im Längendurchschnitt nach der Fläche *CD* Fig. 5.

Fig. 7. Structur des Gewebes der Knochen des Unterschenkelbeins und der Fussknochen (crus et pes) mit dem in Verknöcherung übergehenden Knorpel und der Ueberknorpelhaut *hd* bei $^{20}/_1$ f. lin. Vergr.
a im Querschnitt nach der Fläche *AB* Fig. 4.
b im Längendurchschnitt nach der Fläche *CD* Fig. 5.
c Ansicht der Oberfläche des in Verknöcherung übergehenden Knorpels mit dem Uebergange zum Perichondrium, mit dem Uebergange in die Ueberknorpelhaut *hd.*

Tafel XX.

Lütkesaurus aus dem Sewerischen Osteolith.

Versteinerungen aus der Sammlung von W. A. Kiprijanoff.

(Die Abbildungen sind in $^1/_2$ der natürlichen Grösse gezeichnet.)

Fig. 1. Oberarm (humerus) der linken Seite:
a. Ansicht der oberen Seite.
b. » von der unteren, oder zum Rumpf des Thieres gewandten Seite und
c. Längendurchschnitt nach der Linie *z'z.*

Fig. 2. Oberarm (humerus) der rechten Seite von einem kleineren und jüngeren Individuum:
b. Ansicht der unteren, oder der zum Rumpf des Thieres gewandten Seite und
c. » vom hinteren, oder zum Schwanz gekehrten Ende gesehen.

Fig. 3*a* u. *b* und Fig. 4*a* u. *b.* Astragalus-Knochen vom selben Thiere:
a. Ansicht von oben und *b* Ansicht von der Seite.
c. Structur des Gewebes bei $^{95}/_1$ f. lin. Vergr.

Fig. 5*e.* Structur des Gewebes der Knochen Fig. 3 u. 4 in der Längen- und Querrichtung bei ders. Vergr.

Fig. 5*e'.* Structur des Knochengewebes zu Fig. 6, bei derselben Vergr.

Fig. 6*a*, *c* u. *d.* Knochen *o* desselben Thieres (vergl. Taf. XIX, Fig. 1):
a. Obere Ansicht.
c die zu den Knochen 67 und *cl'* gekehrte Gelenkfläche.
d. Durchschnitt nach der Linie *nn'.*

Tafel XXI.

Untersuchungen am Knochengewebe der Extremitäten von Lütkesaurus.

Fig. 1. Structur der Knochen 65 u. 67 in der Längenrichtung des Gewebes (nach der Fläche *CD* — vergl. Taf. XIX, Fig. 1 u. 5) bei $^{95}/_1$ f. lin. Vergr.

Fig. 2. Structur derselben Knochen (65 u. 67) in der Querrichtung des Gewebes bei derselben Vergr.

Fig. 3. Gewebe der Knochenplatte *pt*, des in Verknöcherung übergehenden Knorpels *kr* uud des Perichondrium *hd* in der Fläche Fig. 6*a*, Taf. XIX bei derselben Vergr.

Fig. 4. Gewebe der Knochenplatte *pt* und des in Verknöcherung übergehenden Knorpels *kr* in der Längenrichtung bei derselben Vergr.

Fig. 5. Gewebe des Knorpels *kr* in der Querrichtung (vergl. Taf. XIX, Fig. 7*c*) bei derselben Vergr.

Fig. 6. Dasselbe bei $^{600}/_1$ f. lin. Vergr.

Fig. 7. Gewebe der Knochenplatte *pt* zu Fig. 3 bei $^{600}/_1$ f. lin. Vergr.

Fig. 8. » des Oberarms (humerus) der linken Seite (Taf. XX, Fig. 1) in der Längenrichtung bei $^{95}/_1$ f. lin. Vergr.

Fig. 9. Gewebe desselben Knochens in der Querrichtung bei derselben Vergr.

Fig. 10. » im Querschnitt Fig. 9 bei $^{600}/_1$ f. lin. Vergr.

Fig. 11. Aeusseres Knorpelgewebe an demselben Knochen in der Längenrichtung nach der Fläche *mn* Fig. 8 bei $^{95}/_1$ f. lin. Vergr.

Fig. 12. Dasselbe Knorpelgewebe (Fig. 11) bei $^{600}/_1$ f. lin. Vergr.

Fig. 13. Gewebe des Oberarms (humerus) der rechten Seite (Taf. XX, Fig. 2) in der Querrichtung bei $^{95}/_1$ f. lin. Vergr.

Fig. 14. Dasselbe Gewebe in der Querrichtung (Fig. 13) bei $^{600}/_1$ f. lin. Vergr.

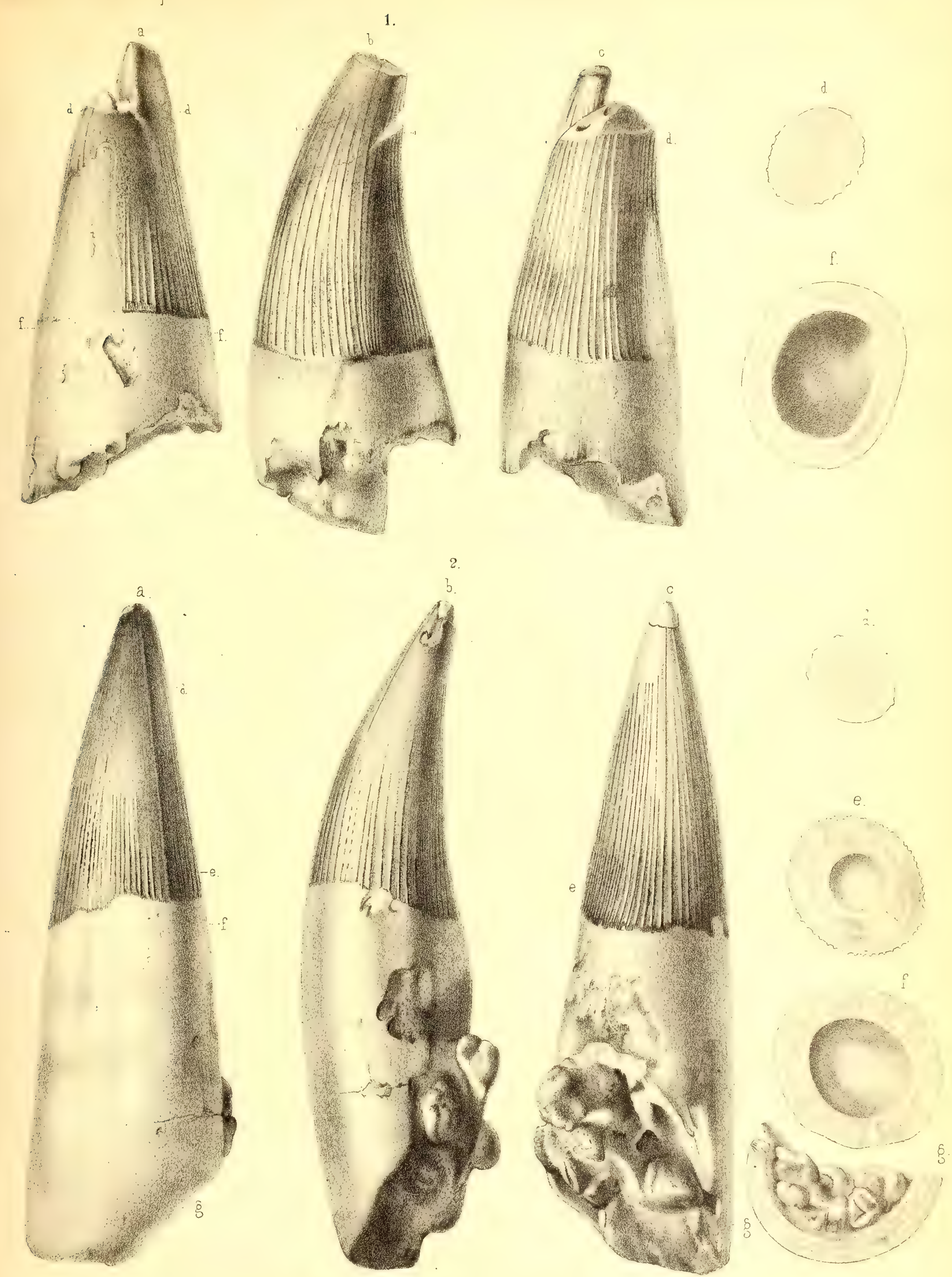


Рис. съ нат. В. Ачуевъ

Лит. Ивансонъ С.П.Б.
петерб. стор. о. пр. №1

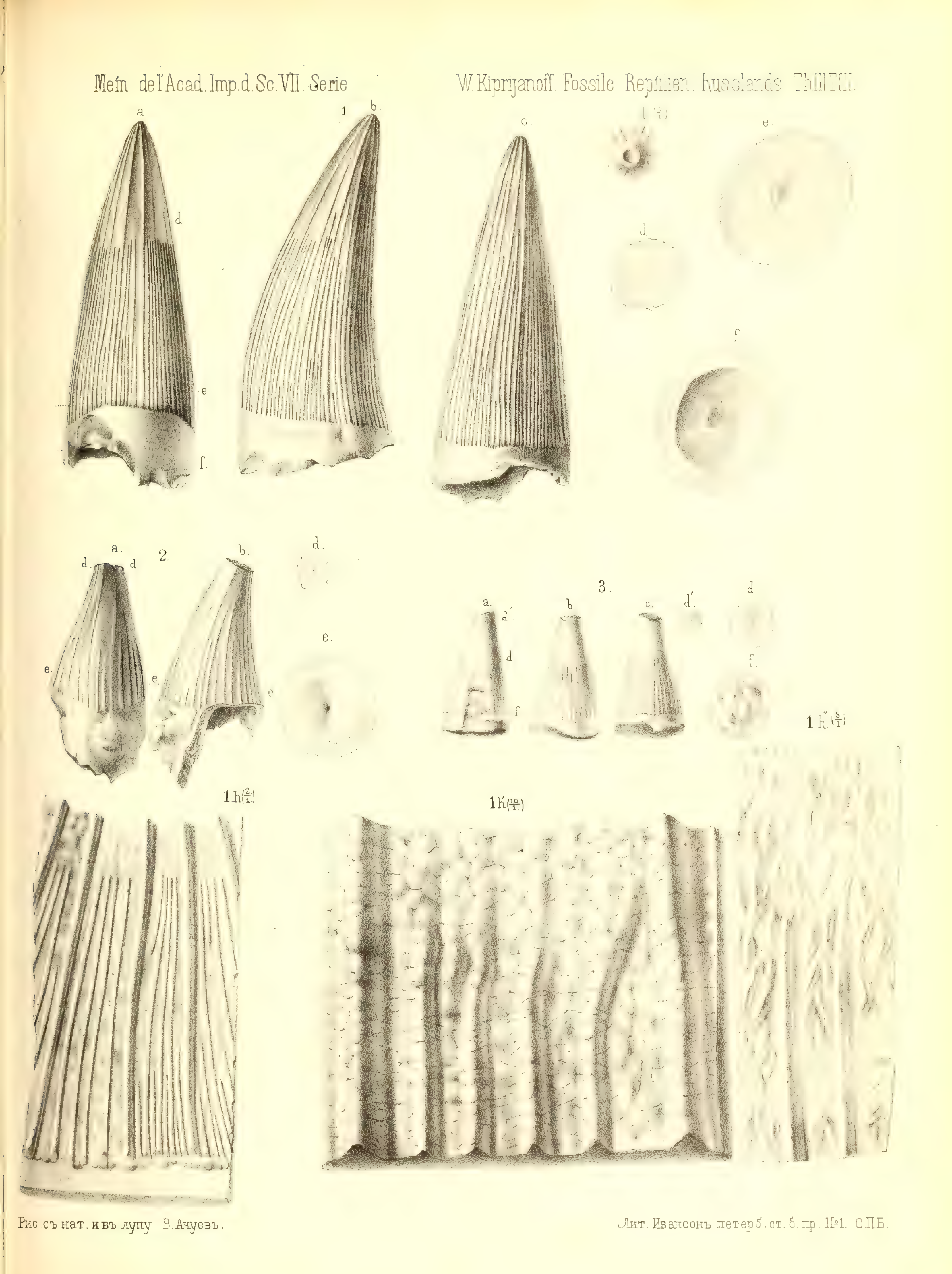

Mém. de l'Acad. Imp. d. Sc. VII. Serie
W. Kiprijanoff. Fossile Reptilien Russlands Th.III Tf.II.
1
2.
3.
1h (2/1)
1k (10/1)
Рис. съ нат. и въ лупу В. Ачуевъ.
Лит. Ивансонъ петерб. ст. 6. пр. №1. С.П.Б.

Рис. въ лупу В. Ачуевъ.

Лит. Ш. Ивансонъ. Пет. ст. больш. Пр. № 1. СПБ.

1 $(\frac{450}{1})$

3 $(\frac{450}{1})$

6 $(\frac{450}{1})$

4 $(\frac{450}{1})$

2 $(\frac{600}{1})$

5 $(\frac{900}{1})$

Рис. Ачуевъ.
Лит. Ш. Ивансонъ. Пет. ст. 6. Пр. №1. СПБ

1 ($\frac{10}{1}$ $\frac{450}{1}$)

4 ($\frac{200}{1}$)

3 ($\frac{200}{1}$)

5 ($\frac{200}{1}$)

2 ($\frac{200}{1}$)

Рис. съ нат. В. Ачуевъ

Лит. Ш. Ивансонъ Петерб. стор. Б. пр. № 1. С.П.Б.

1. (450/1)

2. (450/1)

3. (450/1)

4. (450/1)

5. (900/1)

6. (900/1)

7. (900/1)

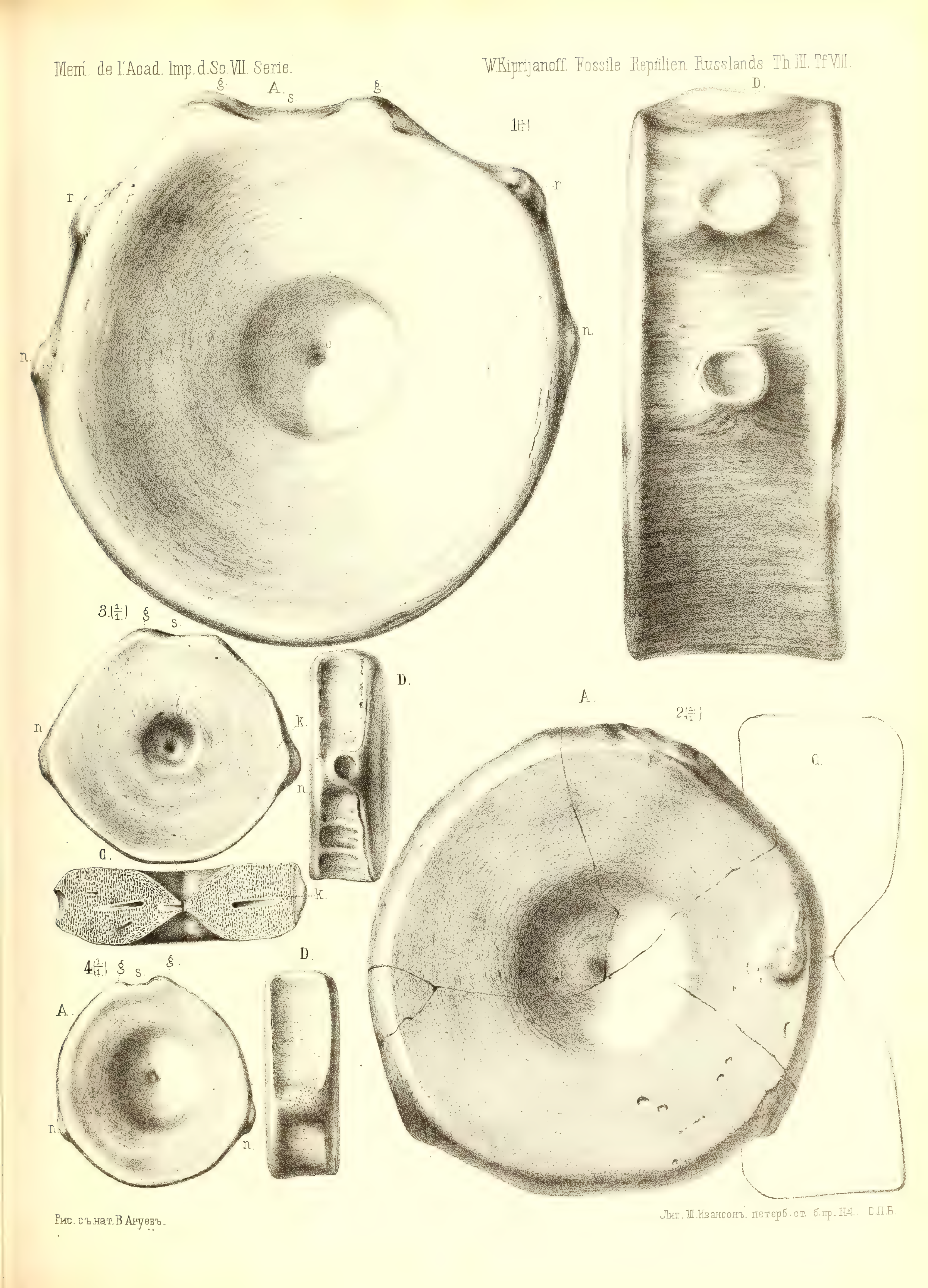
8. (900/1)

9. (900/1)

Рис. съ Микроск. В. Ачуевъ.

Лит. Ш. Ивансонъ. петерб. ст. 6. просп. №1. С. П. Б.

Рис. въ микроск. В. Ачуевъ.
Лит. Ш. Ивансонъ, Пет. стор., больш. Пр. №1. СПБ.


Mem. de l'Acad. Imp. d. Sc. VII. Serie.
W.Kiprijanoff. Fossile Reptilien Russlands Th. III. Tf. VIII.
1 (1/1)
2 (1/1)
3. (1/1)
4 (1/1)
A.
D.
C.
Рис. съ нат. В. Аруевъ.
Лит. Ш. Ивансонъ. петерб. ст. б. пр. Н. 1. С.П.Б.

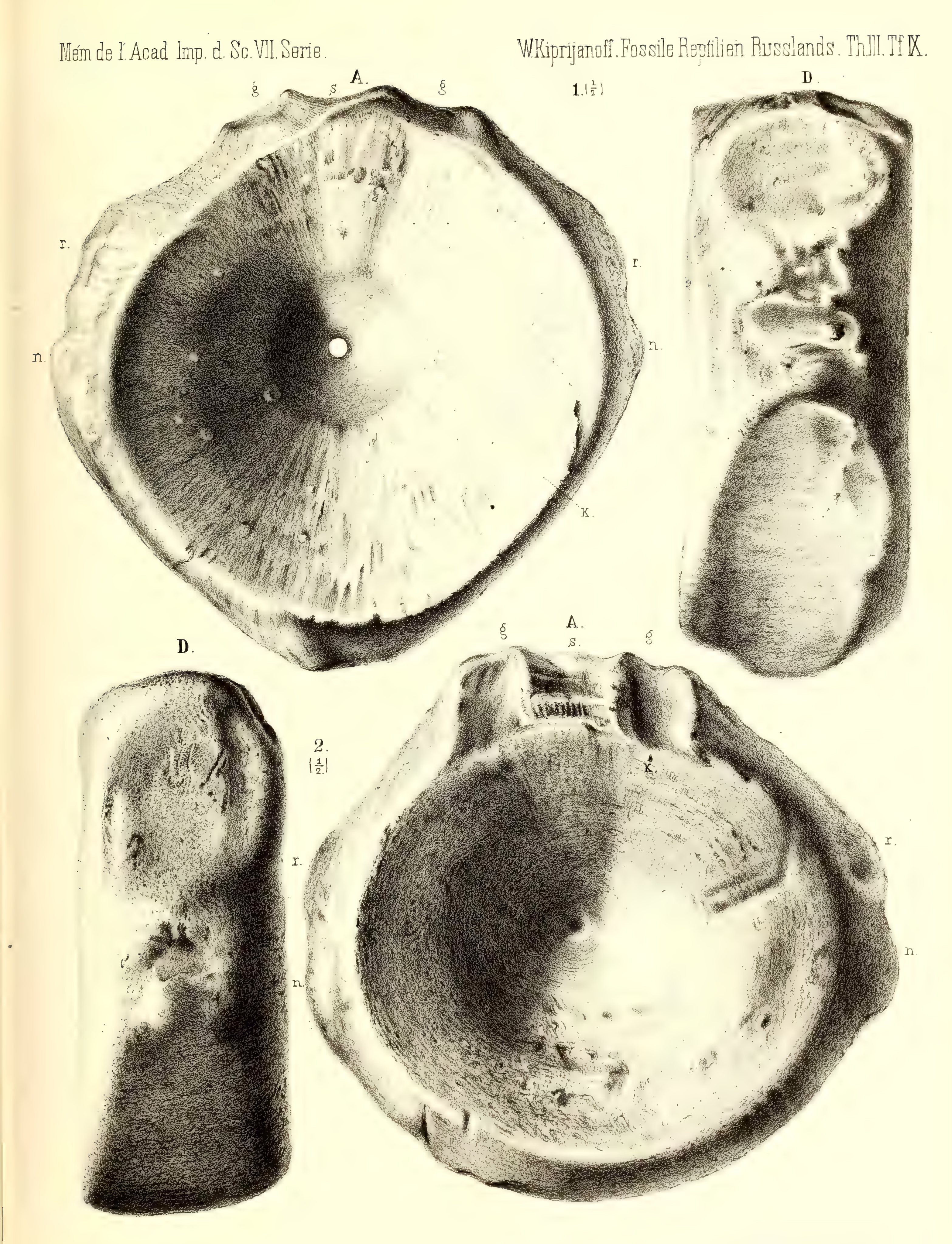


Рис. съ нат. В. Ачуевъ.

Лит. Ш. Ивансенъ С.П.Б.
петерб. ст. 5 пр. №1

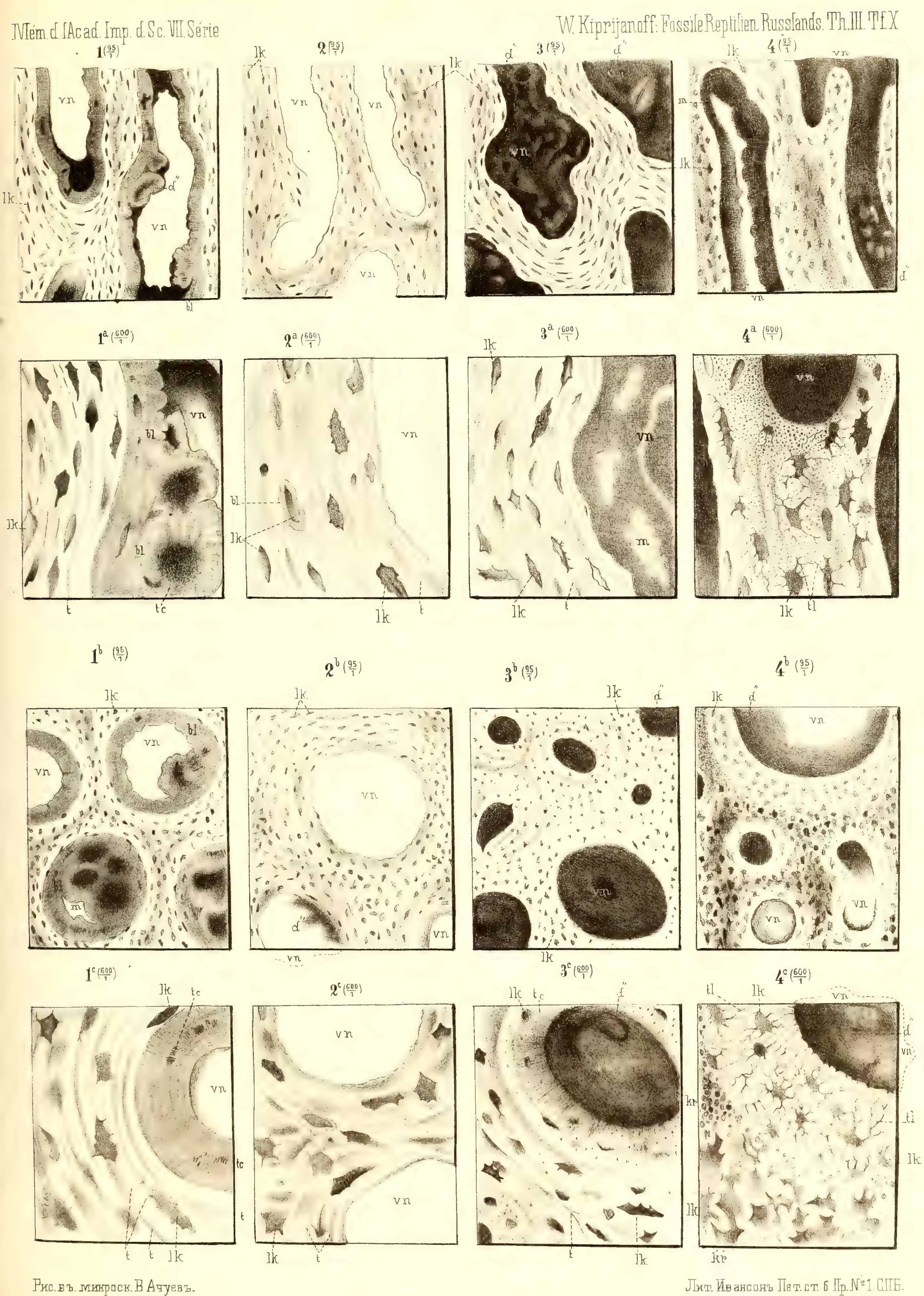


Рис. въ. микроск. В Ачуевъ.

Лит. Ивансонъ Пет. ст. 6 Пр. №1. СПБ.

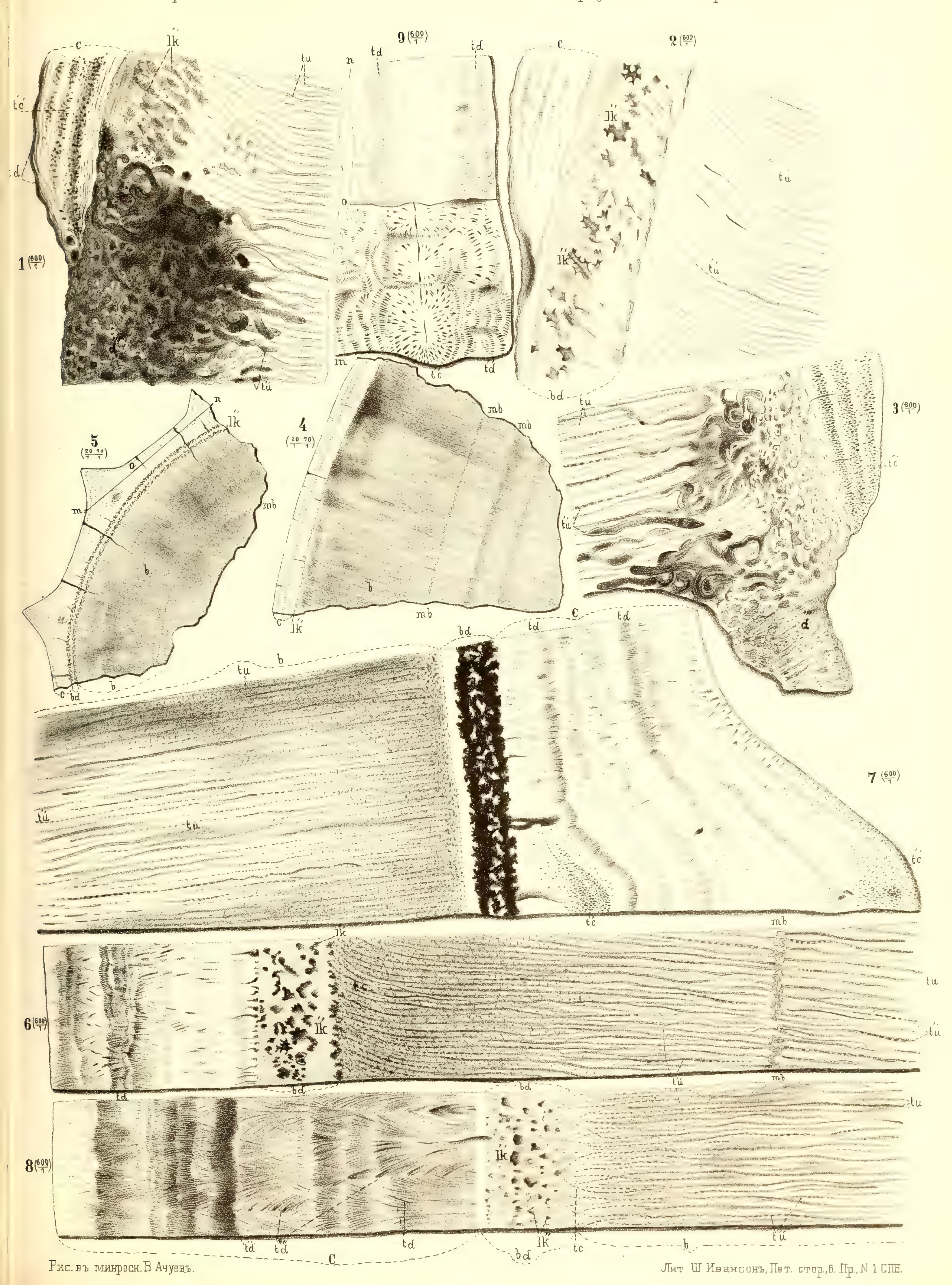


Рис. въ микроск. В Ачуевъ. Лит Ш Ивансонъ, Пет. стор., 6. Пр., № 1 СПБ.

1 (1/1)

A

F.

C.

B.

6 (2/1)

4 (2/1)

5 (10/1)

2 (1/1)

D.

B.

E.

7 (10/1)

8 (2/1)

9 (10/1)

3 (1/1)

A.

A. 1($\frac{1}{1}$) B. C.

1($\frac{1}{1}$)

2($\frac{1}{1}$) A. B. C.

d.

k.

2*

C**

k.

0*

Рис. съ нат. В. Ачуевъ

Лит. Шмельнова [illegible] ПБ

Рис. съ нат. и въ микроск. В. Ачуевъ.

Лит. [illegible]

Рис. съ нат. и съ микроск. В. Ачуевъ

Лит. Ш. Ивансонъ. петерб. ст. 6. просп. №1. С. П. Б.

1 C. (95/1)

2. C (95/1)

3. C (95/1)

1 E (600/1)

2 E (600/1)

3 E (600/1)

1 D (95/1)

2 D (95/1)

3 D (95/1)

1 F (600/1)

2 F (600/1)

3 F (600/1)

Рис. въ микроск. В. Ачуевъ
Лит. Ш. Ивансонъ петерб. ст. б. пр. № 1 С. П. Б.

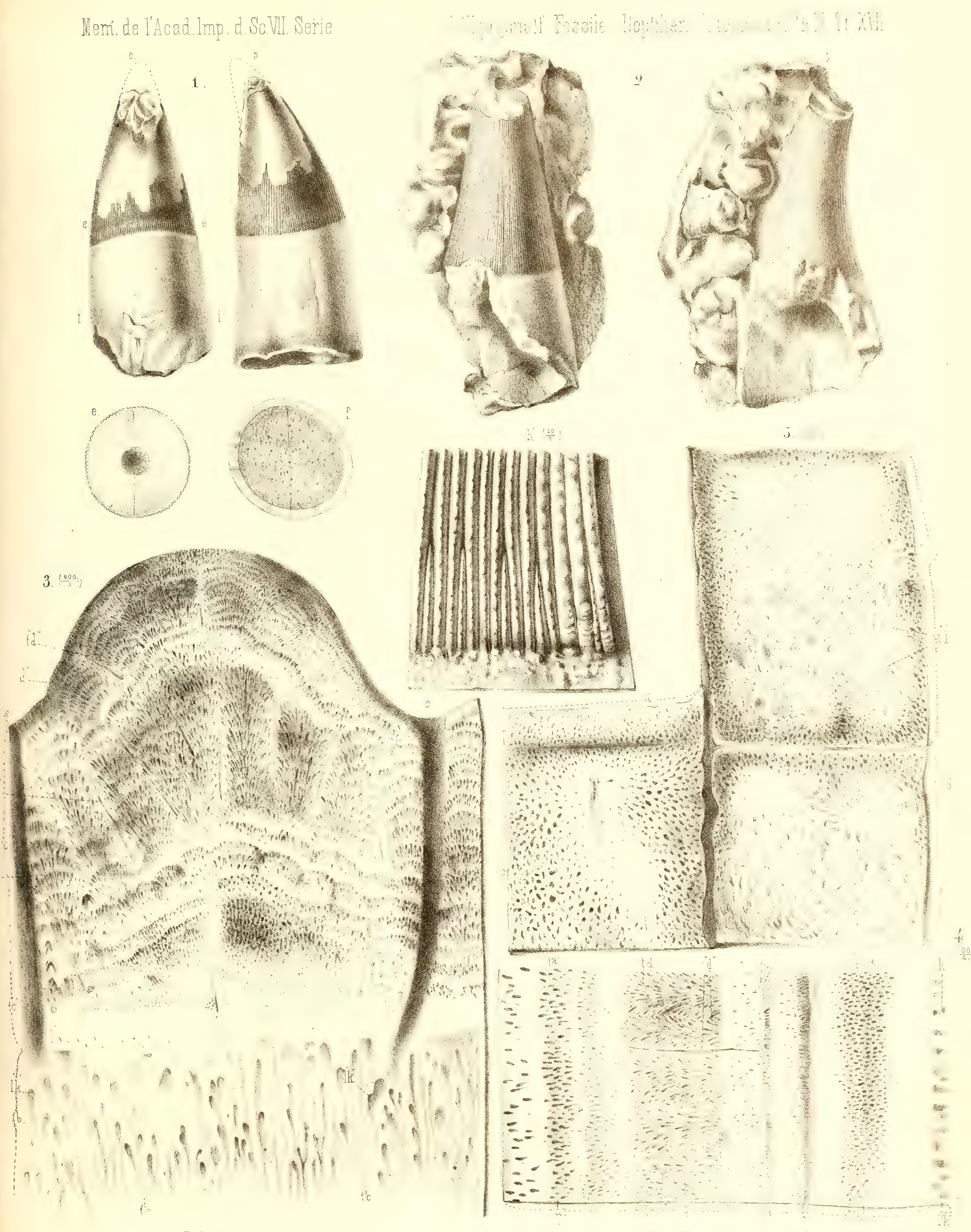


Рис. съ нат. и въ микроск. В. Ачуевъ.

Лит. Ш. Ивансонъ петерб.

1. $\left(\frac{450}{1}\right)$

2. $\left(\frac{450}{1}\right)$

3. $\left(\frac{450}{1}\right)$

4.

5. $\left(\frac{450}{1}\right)$

Рис. съ нат. В. Ачуевъ.

Лит. Ивансонъ Петерб. ст. [illegible]

1 ($\frac{1}{2}$)

2 ($\frac{1}{2}$)

3 ($\frac{1}{2}$)

4 ($\frac{1}{2}$)

5 ($\frac{1}{2}$)

6 ($\frac{10}{1}$)

7 ($\frac{10}{1}$)

Рис. съ нат. и въ лупу. В. Ачуевъ.

Лит. Ш. Ивансонъ. петерб. ст. 6. пр. №1. С.Л.Б.

B.
z'
k
o.
m.
I (½)
C.
k
k
w.
z
w'
p.
n.
v.
v.
z.
z'
A.
m.
o
B.
z.
2. (½)
C.
k
k.
k.
n.
p
v
v
z
z
A. 3 (½)
4. (½) A.
k.
B
B
C.
6. (½)
A.
n.
D. nn'
k.
Jk.
5. (35/1)
e' Jk.
n
d'
vn.
vn.
d.
Jk.
e
f
Jk.
vn
vn
vn
f.

kr
vn
vn
1
kr
lk
vn
vn
2
h'd
kr
lk
3
kr
vn
vn
lk
4
lk
vn
vn
kr
5 (95/1)
6 (600/1)
lk
vn
lk
vn
lk
kr
7 (600/1)
tl
lk
n
lk
vn
10 (600/1)
lk
kr
lk
t
lk
vn
14 (600/1)
vn
9
kr
11
vn
t
vn
12 (600/1)
t
lk
n
n
vn
13
n
lk
vn

Ouvrages paléontologiques publiés dans la VII. Série des Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences.

T. VI, № 2. **Volborth, A. v.** Ueber die mit glatten Rumpfgliedern versehenen russischen Trilobiten, nebst einem Anhange über die Bewegungsorgane und über das Herz derselben. 1863. Mit 4 lith. Taf. Pr. 80 K. = 2 Mk. 70 Pf.

T. VIII, № 9. **Volborth, A. v.** Ueber einige neue Ehstländische Illaenen. 1864. Mit 2 lith. Taf. Pr. 35 K. = 1 Mk. 20 Pf.

T. XVI, № 2. **Volborth, A. v.** Ueber Achradocystites und Cystoblastus, zwei neue Crinoideen-Gattungen, eingeleitet durch kritische Betrachtungen über die Organe der Cystideen. 1870. Mit 1 lith. Taf. Pr. 30 K. = 1 Mk.

№ 11. **Brandt, A.** Ueber fossile Medusen. 1871. Mit 2 Taf. Pr. 45 K. = 1 Mk. 50 Pf.

T. XIX, № 3. **Schmidt, F.** Ueber die Petrefacten der Kreideformation von der Insel Sachalin. 1873. Mit 8 Taf. Abbildungen. Pr. 1 R. 10 K. = 3 Mk. 70 Pf.

T. XXI, № 2. **Schmidt, F.** Miscellanea Silurica. I. Ueber die russischen silurischen Leperditien, mit Hinzuziehung einiger Arten aus den Nachbarländern. 1873. Mit 1 Taf. Pr. 35 K. = 1 Mk. 20 Pf.

№ 11. **Schmidt, F.** Miscellanea Silurica. II. Ueber einige neue und wenig bekannte baltisch-silurische Petrefacten. 1874. Mit 4 Taf. Abbildungen. Pr. 80 K. = 2 Mk. 70 Pf.

T. XXII, № 12. **Heer, O.** Beiträge zur Jura-Flora Ostsibiriens und des Amurlandes. 1876. Mit 31 Taf. Pr. 5 R. 50 K. = 18 Mk. 30 Pf.

T. XXIV, № 8. **Pahlen, A. v. d.** Monographie der baltisch-silurischen Arten der Brachiopoden-Gattung Orthisina. 1877. Avec 4 pl. Pr. 80 K. = 2 Mk. 70 Pf.

T. XXV, № 6. **Heer, O.** Beiträge zur fossilen Flora Sibiriens und des Amurlandes. 1878. Avec 15 pl. Pr. 3 R. 20 K. = 10 Mk. 70 Pf.

№ 7. **Heer, O.** Primitiae florae fossilis Sachalinensis.—Miocäne Flora der Insel Sachalin. 1878. Avec 15 pl. Pr. 3 R. 20 K. = 10 Mk. 70 Pf.

№ 9. **Möller, V. v.** Die spiral-gewundenen Foraminiferen des russischen Kohlenkalks. 1878. Avec 15 pl. Pr. 2 R. 50 K. = 8 Mk. 30 Pf.

T. XXVII, № 4. **Schmalhausen, J.** Beiträge zur Jura-Flora Russlands. 1879. Avec 16 pl. Pr. 2 R. 20 K. = 7 Mk. 30 Pf.

№ 5. **Möller, V. v.** Die Foraminiferen des russischen Kohlenkalks. 1879. Avec 7 pl. Pr. 1 R. 70 K. = 5 Mk. 70 Pf.

№ 10. **Heer, Prof. Dr. Osw.** Nachträge zur Jura-Flora Sibiriens gegründet auf die von Herrn Richard Maak in Ust-Balei gesammelten Pflanzen. 1880. Mit 9 Tafeln. Pr. 1 R. 30 K. = 4 Mk. 30 Pf.

T. XXVIII, № 5. **Nikitin S.** Die Jura-Ablagerungen zwischen Rybinsk, Mologa und Myschkin an der oberen Wolga. 1881. Mit 7 Tafeln. Pr. 1 R. 40 K. = 4 Mk. 70 Pf.

№ 8. **Kiprijanoff, W.** Studien über die fossilen Reptilien Russlands. I. Theil. Gattung Ichthyosaurus König aus dem Severischen Sandstein oder Osteolith der Kreide-Gruppe. 1881. Mit 19 Tafeln. Pr. 2 R. 45 K. = 8 Mk. 20 Pf.

T. XXX, № 1. **Schmidt, F.** Revision der ostbaltischen silurischen Trilobiten nebst geognostischer Uebersicht des ostbaltischen Silurgebiets. Abtheilung I. Phacopiden, Cheiruriden und Encrinuriden. 1881. Mit 16 Tafeln. Pr. 4 R. 50 K. = 15 Mk.

№ 6. **Kiprijanoff, W.** Studien über die fossilen Reptilien Russlands. II. Theil. Gattung Plesiosaurus Conybeare aus dem Severischen Sandstein oder Osteolith der Kreide-Gruppe. 1882. Mit 19 Tafeln. Pr. 2 R. = 6 Mk. 70 Pf.

T. XXXI, № 5. **Schmidt, Fr.** Miscellanea Silurica. III. I. Nachtrag zur Monographie der russischen silurischen Leperditien. II. Die Crustaceenfauna der Eurypterenschichten von Rootziküll auf Oesel. 1883. Mit 9 Tafeln. Pr. 2 R. = 6 Mk. 70 Pf.

Imprimé par ordre de l'Académie Impériale des sciences.

Juin, 1883. C. Vessélofsky, Secrétaire perpétuel.

Imprimerie de l'Académie Impériale des sciences.
(Vass.-Ostr., 9e ligne, № 12.)

MÉMOIRES
DE
L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES DE ST.-PÉTERSBOURG, VIIE SÉRIE.
TOME XXXI, N° 7.

STUDIEN

ÜBER DIE

FOSSILEN REPTILIEN RUSSLANDS.

VON

W. Kiprijanow.

IV. THEIL.

ORDNUNG CROCODILINA OPPEL.

INDETERMINIRTE FOSSILE REPTILIEN.

Mit 7 Tafeln.

(Lu le 1 mars 1883.)

ST.-PÉTERSBOURG, 1883.

Commissionnaires de l'Académie Impériale des sciences:

à St.-Pétersbourg: MM. Eggers et Cie et J. Glasounof;

à Riga: M. N. Kymmel;

à Leipzig: Voss' Sortiment (G. Haessel).

Prix: 90 Kop. = 3 Mark.

MÉMOIRES
DE
L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES DE ST.-PÉTERSBOURG, VIIE SÉRIE.
TOME XXXI, N° 7.

STUDIEN

ÜBER DIE

FOSSILEN REPTILIEN RUSSLANDS.

VON

W. Kiprijanow.

IV. THEIL.

ORDNUNG CROCODILINA OPPEL.

INDETERMINIRTE FOSSILE REPTILIEN.

Mit 7 Tafeln.

(*Lu le 1 mars 1883.*)

ST.-PÉTERSBOURG, 1883.

Commissionnaires de l'Académie Impériale des sciences:

à St.-Pétersbourg:	à Riga:	à Leipzig:
MM. Eggers et Cie et J. Glasounof;	M. N. Kymmel;	Voss' Sortiment (G. Haessel).

Prix: 90 Kop. = 3 Mark.

Imprimé par ordre de l'Académie Impériale des sciences.
Juin, 1883. C. Vessélofsky, Secrétaire perpétuel.

Imprimerie de l'Académie Impériale des sciences.
(Vass.-Ostr., 9 ligne, № 12.)

Inhalt.

Ordnung ICHTHYOPTERYGIA Owen.

Gatttung Ichthyosaurus König.

Spec. Ichthyosaurus Campylodon Cart.

Taf. II.

Das auf Taf. II, Fig. 1, *A* u. *D* in $^1/_2$ natürlicher Grösse mit den dazu gehörenden mikroskopischen Untersuchungen dargestellte Knochenbruchstück stammt, meiner Meinung nach, von einem Thiere der Gattung *Ichthyosaurus Campylodon* Cart. und ist der untere Theil des Sitzbeins (os ischii), der linken Seite. Diese Bestimmung gründet sich:

1) auf die Aehnlichkeit im mikroskopischen Bau der Gewebe;

2) darauf, dass dieser Knochen im Sewerischen Osteolith gefunden wurde, in dem, meiner Annahme nach, alle Ueberreste von Ichthyosauren, der einen Species *Ichth. Campylodon* Cart. angehören, und

3) auf die äusseren Merkmale dieses Knochens, der eine doppelte Biegung im Profil besitzt.

Die Sitzknochen liegen in der hinteren untern Hälfte des Beckens. (Es sind paarige Knochen). Sie sind paarweise vorhanden und jeder von ihnen hat einen Körper und einen Schaft. Am obern Ende vereinigen sie sich mit den Hüftbeinen (Ossa ilii) und den Schambeinen (Ossa pubis); unten stossen sie mit einander und mit den Schambeinen zusammen. Der Schaft ist oben mit einer Gelenkfläche versehen, die dem hintern Theil der tiefen Gelenkverbindung, acetabulum, entspricht; der absteigende Theil des Knochens aber, oder der Körper, verbreitet sich ein wenig und endet mit einem convexen Rande.

An besagtem Exemplar ist das obere Ende des Knochens abgebrochen und nicht erhalten. An der äusseren Oberfläche des Knochens, an allen Seiten, sind Ueberbleibsel vom Sewerischen Osteolith (in dem der Knochen eingebettet war), sichtbar. Die äussere Oberfläche selbst ist glatt, zeigt aber Vertiefungen und Andeutungen von Längsfurchen, die durch die

Sehnen entstanden sind. Die ganze Knochenmasse besitzt eine sehr dichte Structur und nur in der Mitte des Körpers zeigt sich die Structur des Netzgewebes.

Die auf Taf. II, Fig. 6*A* in der Längsrichtung und *B* in der Querrichtung bei $^{95}/_1$-facher lin. Vergr. dargestellte mikroskopische Bildung der Gewebe, sowie die Abbildung *C*, die nach dem Präparate *B*, jedoch bei $^{600}/_1$-facher lin. Vergr. angefertigt ist — zeigen deutlich die Merkmale jugendlichen Alters, indem die Veränderung der Knochengewebe, d. h. die Verwandlung des Knorpelknochengewebes in das festere Knochengewebe, sichtbar ist.

Auf der obern Oberfläche des Knochens sieht man die knorplige Structur des Periosts *hd* mit den Knorpelzellen *kr* in den verschiedenen Stufen ihrer Verwandlung in Osteoblastenzellen *rl* und *r'l'*, mit den Medullarhöhlen und den Canälen *v'n'* im provisorischen Gewebe.

Weiter in der Mitte der Knochenmasse sieht man die Medullarkanäle *vn* schon in mehr verknöchertem Gewebe, in welchem auch die Knochenzellen schon eine vollkommenere Bildung *rl*, erhalten haben, obgleich einige von den Medullarkanälen *vn* noch von einer Schicht des abgelagerten Blastems *bl*, das Fettzellchen *ft*, enthält, umgeben sind; diese Fettzellen *ft* gingen in die Osteodentinmasse *d''*, mit der die Havers'schen Kanäle *vn* und die Markräume im Knorpel *m* angefüllt waren, über.

Im Längendurchschnitt der Gewebe, Fig. *A* sind sind Knochenröhrchen *t* zu sehn, wie das auch in den Knochen der (Gliedmassen) Extremitäten von *Ichthyos. Campylodon* Cart. (vgl. Th. I) beobachtet wurde. Im Querschnitt Fig. *B* u. *C* sind Andeutungen von Radialrissen *n* zu bemerken.

Auf Taf. II, Fig. 2, 3 u. 4 sind, gleichfalls in $^1/_2$ natürlicher Grösse, Knochenbruchstücke abgebildet, die man nach den äusseren Merkmalen für Beckenknochen (ossa pelvis) und zwar für Schambeine (ossa pubis) halten muss; aus dem mikroskopischen Bau ihrer Gewebe aber ist ersichtlich, dass diese Knochen noch jungen Individuen angehörten.

Die Knochenbruchstücke Fig. 2 u. 3 stellen Theile eines Schambeinpaares dar, doch gehören sie nicht einem und demselben Individuum an, sondern Thieren etwas verschiedener Grösse.

Das Knochenbruchstück, Fig. 4, muss in diesem Falle das Gelenkende eines ebensolchen Knochens vorstellen, nur von einem noch grösseren Individuum.

Bei den Ichthyosauren zeigen die Schambeine (ossa pubis) einen festen breiteren Theil mit einer abwärts gehenden Verlängerung, welche in eine Gelenkverbindung mit dem Oberschenkelbeine (femur) ausläuft.

Die vorderen Ränder dieser Knochen sind convex und bilden, indem sie sich nach abwärts ausbreiten, zusammen mit den Hüftbeinen (ossa ilii), den vorderen Theil des Beckens. Unten und vorn stossen die Schambeine mit einander und mit den Sitzbeinen (ossu ischii) zusammen. Die Form der Gelenkenden an den in Rede stehenden Exemplaren musste durch einen Knorpelansatz (der im vorliegenden Falle nicht erhalten ist) bis zu einer, der Gelenkverbindung mehr entsprechenden Gestalt vervollständigt werden, worauf, in der That, zum

Theil der Bau der Enden ähnlicher Knochen hinweist (vgl. Taf. II, Fig. 4, wo man sieht, dass die Bildung der äusseren Knochenschicht vom Bau des inneren Theiles des Knochens abweicht).

Auf Taf. II, Fig. 2, 3 u. 4, zeigen die Abbildungen *B* die Breitseite dieser flachen Knochen und die Abbildungen *D* das Profil derselben.

Die ganze Masse dieser Knochen ist, trotz des jugendlichen Alters, sehr dicht; das Netzgewebe aber ist nur in der Mitte sichtbar.

Die Zeichnungen Taf. II, Fig. 7 stellen die Knochengewebe der auf Taf. II, Fig. 2, 3 u. 4 abgebildeten Knochenbruchstücke dar, nach Objecten, die aus dem Knochen Fig. 2 präparirt sind.

Die Abbildung *A* zeigt die Ansicht der Knochengewebe in der Längsrichtung bei $^{95}/_{1}$-facher lin. Vergr. *B* die Ansicht der Knochengewebe im Querschnitt im Puncte *n* aus dem Schaft, gleichfalls bei $^{95}/_{1}$ f. lin. Vergr.; *B*, die Ansicht der Knochengewebe im Querschnitt bei derselben lin. Verg., im Puncte *m*, aus dem breiteren Theil des Knochens und endlich *C* die Ansicht der Knochengewebe nach dem Object *B'*, jedoch bei $^{600}/_{1}$ facher lin. Vergr.

Derartige Untersuchungen zeigen, dass die Gewebe dieser Knochen, was ihren Bau, die Form und die Bildung der Knochenzellen *kr*, *lk*, *rl* und *r'l'* anlangt — sich noch in der Entwickelungsperiode ihres Uebergangszustandes befanden, dass die Knochenzellen *lk* im obern Theil *n* Ausläufer *fl* aufweisen, während im untern Theil *m* des Knochens die Ausläufer der Knochenzellen sich eben erst zu bilden beginnen, was darauf hinweist, dass die Verknöcherung im Schaft die Verknöcherung im breiteren Theil des Knochens etwas überflügelt hat.

In den Medullarkanälen *vn*, welche mit einer homogenen Schicht abgelagerten Blastems *bl* umgeben sind, sieht man die Ueberreste des Osteodentins *d''* mit den Medullarhöhlen *v'n'* im provisorischen Gewebe, die Zeichnung *C* aber zeigt die hier bemerkte Theilung der Knorpelzelle *kr*, wodurch die Sclerosirung des Knochenknorpelgewebes sich deutlich offenbart.

Auf Taf. II, Fig. 5, ist ein Schnitt durch die ganze Länge des Oberschenkelbeins (femur) eines jungen *Plesiosaurus Neocomiensis* Cpch. dargestellt und auf Fig. 8 sind die Ergebnisse der mikroskopischen Untersuchung der Gewebe des Fig. 4 dargestellten Gelenkendes des Schambeins (os pubis) von *Ichth. Campylodon* Cart. abgebildet.

Die Zeichnung *A* stellt das Knochengewebe in der Längsrichtung bei $^{95}/_{1}$ f. lin. Vergr. dar, die Zeichnung *B* im Querschnitt bei derselben lin. Verg. und *C* zeigt den Bau des Gewebes aus dem Präparat *B* bei $^{600}/_{1}$ f. lin. Verg. Alle diese Abbildungen erklären die Bildung der Knochengewebe nach der Länge des Knochens, ähnlich wie am Oberschenkelbein von Plesiosaurus Fig. 5, wo der netzartige Bau die Mitte desselben einnimmt und sowohl das Gelenkköpfchen für die Beckenknochen, als auch den entfernten Rand, der sich mit den Unterschenkelknochen, dem Schienbein (tibia) und dem Wadenbein (fibula) vereinigt, bildet; ferner, dass in der Mitte, nach der Länge des Knochens, und namentlich beim Uebergange des Schaftes in den entfernten breiteren Theil, oder den Körper, der innere, netzartige Bau bedeutend abnimmt und einem Knochengewebe späterer Bildung Platz macht.

Es ist offenbar, dass durch eine solche Anordnung der Knochengewebe alle derartigen Knochen an den Stellen, wo die Sehnen sich an dieselben befestigten, bedeutend verstärkt wurden.

Auf Taf. II, Fig. 8*A* sind, in Uebereinstimmung mit Fig. 4 u. 5, mit den Buchstaben *m*, *n*, die Knochengewebe der äusseren und inneren, oder netzartigen Schicht, bezeichnet und mit *ss* die gegenseitige Vereinigung, wo der verbindende Markkanal durchgeht. Ausserdem, dass im Gewebe der äusseren Schicht, *n*, sich mehr feine Markkanäle befinden, enthält auch die Knochenmasse selbst mehr Knochenzellen *lk*. In der Richtung der Vereinigung der äusseren Schicht *n* mit der inneren netzartigen Masse *m* geht der verbindende Markkanal *ss* durch, der sich weniger durch seine Dicke auszeichnet, als durch seine grade Richtung. In der inneren netzartigen Knochenmasse sind die feinen Medullarkanäle weniger häufig, wie auch die Knochenzellen selbst und endlich die Abbildungen der Gewebe eines ebensolchen Knochens im Querschnitt, Taf. II, Fig. 8*B* bei $^{95}/_{1}$ f. lin. Vergr. und *C* bei $^{600}/_{1}$ f. lin. Vergr. zeigen in ihrer ganzen Stuctur die junge Bildung des Knochens. Die Ueberbleibsel der Fettzellchen *ft* zeigen alle Veränderungen bis zur vollständigen Bildung der Knochenzellen *lk*. Stellenweise sind Radialrisse *n* bemerkbar. Alle Medullarkanäle werden von Blastemablagerungen *bl* umgeben und in allen Markkanälen und Markhöhlen sieht man Anzeichen der Verkalkung oder Sclerosirung der Knorpelzellen und ihre Vermehrung.

Ordnung SAUROPTERYGIA Owen.

Gruppe Thaumatosauria n.

Gattung Polyptychodon Owen.

Spec. Polyptychodon interruptus Owen.

Taf. I, Fig. 1, *A*, *B* und *C*; Taf. V, Fig. 1, *A*, *B* und *C*.

Vergleicht man das auf Taf. I, Fig. 1*A*, *B* u. *C* in halber ($^1/_2$) natürlicher Grösse abgebildete Knochenbruchstück mit den Zähnen des *Polypt. interruptus* Owen, die im III Theil meiner Studien über die fossilen Reptilien Russlands (von denen einige in demselben Steinbruche und in derselben Schicht gefunden wurden, wie dieser Knochen) beschrieben sind und berücksichtigt man die Kopfknochen (die Kieferbeine) der Thiere aus der Gattung *Pliosaurus* Owen (vgl. Palaeontographical Society, Monographs on the British fossil Reptilia from the Kimmeridge-Clay by R. Owen, vol. for 1861) — so kann man, glaube ich,

ohne zu irren, annehmen, dass das in Rede stehende Knochenbruchstück das Zahnstück des Unterkiefers (Dentary Ow. 32) von *Polypt. interruptus* Ow. vorstellt.

Die Grösse des Theiles der Zahnhöhle, *z*, Taf. I, Fig. 1*A* und selbst der auf Taf. V, Fig. 1*A*, *B* u. *C* abgebildete mikroskopische Bau der Gewebe dieses Knochens widerspricht dem, wie wir weiter unten sehn werden, nicht.

(Bei alledem jedoch muss man freilich die Aehnlichkeit im Bau des Kopfes von Thieren der Gattungen *Polyptychodon* Owen und *Pliosaurus* Owen zulassen, da die obenerwähnten Untersuchungen der Kopfknochen von *Pliosaurus* Owen und die von demselben Gelehrten beschriebenen Ueberreste der Kopfknochen von *Polypt. interruptus* Ow. [vgl. Supplement № III, to the monograph on the fossil Reptilia of the Cretaceous formations 1860] dieser Analogie nicht widersprechen).

Vorliegendes Zahnstück ist in drei Theile zerbrochen und ausserdem bedeutend beschädigt. Die äussere Oberfläche hat sich an demselben wohl kaum irgendwo vollständig erhalten und ist nur eine Vertiefung, *z*, an der Seite bemerkbar. Ich halte diese Vertiefung für ein Kennzeichen einer Zahnhöhle. Ungeachtet Alles dessen kann man die angegebene Bestimmung dieses Zahnstücks eines Kieferbeins noch dadurch vervollständigen, dass man sagt, es müsse aus dem vordern Ende des rechten Unterkieferastes herrühren.

Die mikroskop. Unters. der Gewebe dieses Knochens bestärkt uns darin, dass derselbe einem ausgewachsenen Individuum angehört hat und — aller Wahrscheinlichkeit nach — einem *Polypt. interruptus* Ow., der — so muss man glauben — einen durch die Schnauze verlängerten Kopf besass.

Fig. 1*A* auf Taf. I zeigt die Ansicht der äusseren, convexen und weniger verletzten Seite dieses Knochens.

Das Bruchstück ist mit nach unten gerichtetem vorderen Ende abgebildet und in der Mitte desselben, am hintern Ende, bemerkt man Anzeichen der obern Knochenschicht.

Die Abbildung *B* derselben Figur und Tafel stellt die innere oder concave Seite des Knochens und *C* den Querschnitt am hintern Ende desselben dar. Diese beiden Zeichnungen zeigen, dass der Knochen eine ziemlich grobe netzartige Structur besitzt, die zur convexen Oberfläche hin viel dichter wird. Hier bildet sie eine recht dicke, 1 Zoll starke Rinde, die diese Dicke vielleicht auch am vordern Ende bewahrte; dadurch erklärt sich auch die grosse Festigkeit dieses Knochens, der in allen Theilen eine bedeutende Verknöcherung erreicht hat.

Auf Taf. V, Fig. 1*A*, *B* u. *C* ist die mikroskop. Untersuchung der Gewebe dieses Bruchstücks aus dem rechten Aste des Zahnstücks des Unterkiefers von *Polypt. interruptus* Owen dargestellt.

A stellt das Knochengewebe in der Längsrichtung bei $^{95}/_{1}$-facher lin. Vergr. dar.

B dasselbe im Querschnitt, bei derselben Vergr.

C ist die Ansicht der Bildung des Knochens, im Querschnitt, aus dem Präparate *B*, jedoch bei $^{600}/_{1}$ f. lin. Vergr.

Diese Abbildungen zeigen deutlich, dass, obgleich das Knochengewebe in diesem Bruchstück schon vollständig verknöchert ist, das Thier, dem dieser Knochen angehörte, noch bei voller Thätigkeit des Lebensprocesses, oder besser gesagt, im blühenden Alter vom Tode ereilt wurde, denn in den Medullarkanälen *vn* dieses Knochens bemerken wir Anzeichen der Bildung von Knorpel- oder Knorpelknochenzellen *kr*.

Der allgemeine Character der Structur dieses Knochens und die Form der Knochenzellen *lk* stimmt mit dem Character der Knochengewebe und der Knochenzellen, die man an den Knochen von *Polypt. interruptus* und *Thaumatosaurus Mosquensis* (vgl. Taf. III meiner Studien) beobachtet hat, überein.

An den Zeichnungen *B* u. *C* sieht man concentrische Ablagerungen homogener Schichten und Radialrisse *n*, ausserdem aber auch concentrische Risse *n'*, die die Gebiete (oder Rayons) der Medullarkanäle gleichsam begrenzen.

Die Form der Knochenzellen *lk* erscheint vollendeter.—Alles das bestätigt die Voraussetzung, von der vollständigeren Verknöcherung des Zahnstücks des Kieferbeins, welches früher als die andern Knochen des Gerippes erhärten musste.

Ordnung SAUROPTERYGIA Owen.

Gruppe Thaumatosauria n.

Gattung Lütkesaurus n.

Taf. I, Fig. 2, *B*, *C*, *D* und Fig. 3, *B*, *D* ✻ und ✻✻ Taf. V, Fig. 2, *A*, *B* u. *C*.

Die auf Taf. I, Fig. 2 u. 3*B* u. *D*, mit den zugehörigen Querschnitten abgebildeten Knochen sind zusammen mit den Ueberresten von *Lütkesaurus n*, die im III Theil meiner Studien über fossile Reptilien Russlands beschrieben sind, gefunden worden.

Bei Untersuchung dieser Knochen gelangen wir unwillkürlich zu der Vermuthung, dass bei den Thieren der Gattung *Lütkesaurus* das Becken (pelvis) wie bei den Ichthyosauren von 6 verschiedenen Knochen gebildet werden konnte und zwar von einem Paar Hüftbeinen (ossa ilii), einem Paar Schambeinen (ossa pubis) und einem Paar Sitzbeinen (ossa ischii) und dass die Hüftbeine, im Vergleich mit den übrigen Knochen, vielleicht ebenfalls grösser waren.

Die abgebildeten Bruchstücke der Hüftbeine (ossa ilei) lassen ersehen, dass diese Knochen einen Körper und einen Schaft haben. Den Körper bildet der breitere Theil.

Die Knochen bestanden aus netzartigem Knochen, der zu den äusseren Oberflächen hin, bedeutend an Festigkeit (Consistenz) zunimmt; die Poren dieser Knochen wurden bei

Lebzeiten des Thieres natürlich mit Fett angefüllt — zur Herstellung des Gleichgewichts zwischen ihrer Schwere und der Schwere der Flüssigkeit in den Meeren, in der sie gelebt haben.

Der Schaft *m* des Knochens Taf. I, Fig. 2*B* bildet dessen hintern Theil, der am entfernten Ende, Taf. I, Fig. 3*B* u. *D*, von der Gelenkfläche begrenzt wurde.

Der vordere oder breitere Theil *n*, Taf. I, Fig. 2*B* u. *D*, endet augenscheinlich mit einem halbkreisförmigen Rande. Die obere Seite dieses Theils ist ein wenig convex, die untere, oder innere aber concav.

Die Knochen-Bruchstücke Taf. I, Fig. 2 u. 3 muss man, trotz einiger Aehnlichkeit mit ebensolchen Knochen von Ichthyosauren, nothwendigerweise Thieren der Ordnung *Sauropterygia*, der Gruppe *Thaumatosauria* und der Gattung *Lütkesaurus* zuweisen, sowohl auf Grund der grösseren Aehnlichkeit im mikroskopischen Bau der Knochengewebe, als auch deshalb, weil sie zusammen mit den Ueberresten des *Lütkesaurus*, die im III Th. meiner Studien über fossile Reptilien Russlands beschrieben worden sind, gefunden wurden und schliesslich wegen der gleichartigen Versteinerung aller dieser Fossilia. Letzteres weist auf den gleichen Ort und die Gleichzeitigkeit ihres Unterganges oder der Verschüttung durch Niederschläge vom Meere her.

Taf. I, Fig. 2*B*, bildet die Ansicht der inneren oder concaven Seite eines Bruchstücks des obern Theiles des Hüftbeins (ilium) der linken Seite eines *Lütkesaurus*. Die Abbildung stellt das Knochenbruchstück mit nach unten gekehrtem obern Ende dar: *n* bezeichnet das obere, *m* das untere Ende, *o* die zum Kopfe, *p* die zum Schwanze gekehrte Seite.

Taf. I, Fig. 2*D* ist die Profilansicht der zum Kopfe gewandten Seite, *C* der Querschnitt am hintern Ende, *m*, dieses Bruchstücks.

Die unverletzte Oberfläche erscheint ziemlich glatt, obgleich stellenweise, an den lateralen Seiten *o* und *p* eine geringe Rauhigkeit zu bemerken ist, die zur bessern Anheftung der Sehnen diente.

Auf Taf. I, Fig. 3*B*, ist ein Bruchstück des untern Endes des Hüftbeins von der unteren oder concaven Seite abgebildet und Fig. 3*D* zeigt das Profil dieses Knochens.

Die Sternchen * u. ** auf der Zeichnung *B* deuten die Stellen an, wo die Querschnitte die auf derselben Tafel abgebildet sind, gemacht worden sind.

Indem wir diesen Knochen zu den Ueberresten von *Lütkesaurus* zählen, (wofür die Gründe schon früher erklärt sind) sehen wir, dass die zellige oder netzartige Masse in demselben zu den äusseren Oberflächen und dem untern Ende hin, durch Compactwerden eine dickere Rinde bildet, als am obern, breiteren Ende *n*, sodass zur Gelenkfläche des untern Endes *m* hin, der Schaft schon aus compacter Masse, vgl. Fig. 3*D*, besteht.

Die äussere Oberfläche des untern Endes (Fig. 3) ist etwas rauher, als die Oberfläche des Knochens am obern Ende (Fig. 2) und auf der untern Seite des Bruchstücks Fig. 3 sieht man starke Längsfalten, welche zur festeren Vereinigung mit den Sehnen beitrugen.

Indem ich die Knochenbruchstücke Fig. 2 u. 3 als dem Hüftbein angehörend betrachte zweifle ich jedoch, dass sie Theile *eines* Paares solcher Knochen waren.

Wenn die Vermuthung, dass die Ueberreste Taf. I, Fig. 2 u. 3 Hüftbeinen von *Lütkesaurus* angehört haben, richtig ist, so muss das Becken bei diesen Thieren, nach der Grösse und Dicke dieser Ueberreste zu urtheilen, sehr stark und fest gebaut gewesen sein, was ebenfalls auf einen bedeutenden Unterschied in der äusseren Form zwischen *Lütkesaurus* und dem allgemeinen äusseren Aussehn der Ichthyosauren hinweist.

Die *Lütkesaurus* hatten, indem sie Flossen besassen, die bloss zum Rudern bestimmt waren, einen grossen, schweren Kopf (was man aus den dicken, kegelförmigen Zähnen, die die Kiefer ausgerüstet, schliessen kann), einen kurzen Hals und einen Rumpf, der zwar nicht so lang war wie bei den Ichthyosauren, aber ebenso mächtig, in dem jedoch die Knochen kein so fest gefügtes Skelet bildeten, wie wir es bei den Thieren finden, die auf dem Lande zu leben bestimmt sind.

Ich habe die Knochengewebe beider Bruchstücke von Hüftbeinen, die auf Taf. I, Fig. 2 u. 3 abgebildet sind, mikroskopischen Untersuchungen unterzogen, auf Taf. V, Fig. 2*A*, *B* u. *C* aber sind nur Zeichnungen nach Präparaten aus dem Bruchstück des untern Endes (Taf. I, Fig. 3) vorgeführt.

Die Zeichnung *A* stellt das Knochengewebe in der Längsrichtung und *B* im Querschnitt dar, beide 95 Mal vergrössert. Die Abbildung *C* ist nach dem Präparat *B* bei $^{600}/_{1}$ f. lin. Vergr. angefertigt.

Aus dem Gesagten ist ersichtlich, dass dieser Knochen schon eine verhältnissmässig vollständige Verknöcherung erreicht hat, der Tod das Thier aber noch im Process der Lebensthätigkeit ereilte, denn in den Markkanälen *vn* und um dieselben herum, bemerkt man noch die Bildung der Verknöcherung. Nach der Structur der Knochengewebe, ihrer Bildung und der Form der Knochenzellen *lk* und der Osteoblastenzellchen *rl* stimmen diese Knochengewebe im allgemeinen Charakter mit den Knochengeweben der Ueberreste desselben Thieres, die im III Thl. meiner Studien beschrieben sind, überein.

Auf den Zeichnungen *B* u. *C* sieht man die concentrische Ablagerung des Blastems *bl*, als homogene Schicht mit Radial- und concentrischen Rissen *n* und *n'*.

Die Form der Knochenzellen *lk* erscheint stellenweise als durchaus vollendet, mit sehr entwickelten Ausläufern *fl*.—Alles dieses bestärkt die Annahme der mehr oder minder vollständigen Ausbildung des Knochens.

Die mikroskopische Untersuchung der Knochengewebe aus dem Bruchstück des obern Endes eines ebensolchen Hüftbeins Taf. I, Fig. 2, bietet keine besonderen Eigenthümlichkeiten. Man bemerkt nur, dass die Bildung dieses letzteren Knochens eine etwas jüngere ist, als die Bildung des untern Endes Taf. I, Fig. 3.

Ordnung CROCODILINA Oppel.

Gatt. Poekilopleuron M. Eudes-Deslongchamps.

M. Eudes-Deslongchamps. Mémoire sur Poekilopleuron Bucklandii. Grand Saurien fossile, intermédiaire entre les crocodiles et les lézards; découvert dans les carriéres de la Maladrerie, près Caen, au mois de juillet 1835.
(Extrait du sixième volume des Mémoires de la Société Linnéenne de Normandie. Caen 1837.
R. Owen. Report. Brit. assoc. 1841, p. 84.
C. G. Giebel. Fauna der Vorwelt. Bd. 1, Abth. 2, 1847, p. 100.
F. J. Pictet. Paléontologie, Tom. 1, 1853, p. 497.
J. V. Carus. Zoologie, Bd. 1, p. 410.

Spec. Poekilopleuron Schmidti n.

Taf. IV, Fig. 1—5 und Taf. V, Fig. 4 *A*, *A'*, *A''*, *A'''*, *B*, *B'* und *B''*.

M. Eudes-Deslongchamps erklärt im 6-ten Bande der «Mémoires de la Société Linnéenne» genau die Organisation des Skelets von *Poekilopleuron* (d. h. einer Eidechse, die verschiedengeformte Rippen besass).

Das *Poekilopleuron Bucklandii*, Deslongchamps wurde im Jahre 1835 in Frankreich, im Jura-Kalkstein, in der Nähe von Caen entdeckt; die Länge dieses Thieres nimmt man auf 25 Fuss an.

M. E.-Deslongchamps hält dieses Thier für einen grossen fossilen Saurier, der, seiner Organisation nach, die Stelle zwischen den Crocodilen und den ächten Eidechsen (lézards) einnahm. Nach der Meinung R. Owen's aber hatte das *Poekilopleuron Bucklandii* mehr Aehnlichkeit mit den Crocodilen.

Auf Taf. IV, Fig. 1, 2 u. 3, sind die obern Theile der mittleren Rippen abgebildet. *A* ist die Ansicht der zum Schwanz, *B* der zum Kopf gekehrten Seite. Von diesen Rippen sind die beiden ersten—Rippen der linken, die dritte eine Rippe der rechten Seite. Auf den mit *C* u. *C'* bezeichneten Abbildungen sieht man die Querschnitte des obern, breiteren Endes der Rippe und des Rippenstieles.

Fig. 4, auf Taf. IV stellt das Oberarmbein (humerus) des linken Fusses von demselben Thiere dar und *A* zeigt die Ansicht des Knochens von der Kopfseite, *B* von der Schwanzseite. *C* stellt die laterale Seite des Knochens dar.

Die mit den Sternchen (* und **) bezeichneten Abbildungen zeigen die Querschnitte in Puncten, die auf den vorhergehenden Zeichnungen mit denselben Zeichen versehen sind.

Aus dem Querschnitt *C'* des Rippenstieles ist zu ersehn, dass der letztere aus com-

pactem Knochen besteht und dass dieser Knochen in der Mitte der Rippe eine netzartige Structur besitzt, die zur äusseren Oberfläche hin dichter wird.

Das Oberarmbein (humerus), Fig. 4, hat im Innern einen grossen, vollständig leeren Raum, der von dicken, unregelmässig-cylindrischen, aus sehr hartem, dichtem Knochen (vgl. die Zeichnungen *A*, *B*, *C* und ∗∗) bestehenden Wänden eingefasst ist und das stimmt auch mit den angegebenen Eigenschaften ebensolcher Knochen von *Poekilopleuron* überein.

Die von mir besprochenen Knochen sind alle zusammen im Sewerischen Osteolith gefunden worden; Spuren des letzteren gewahrt man an der Oberfläche der Knochen.—Die Versteinerung aller dieser Knochen ist eine gleichartige und es unterliegt daher gar keinem Zweifel, dass sie gleichzeitig und am gleichen Ort untergegangen, oder von Ablagerungen begraben worden sind.

Die Bestimmung oder Zuzählung dieser Knochen zur Gattung *Poekilopleuron* ist in der Form der Rippen und in der Aehnlichkeit des Oberarmbeins mit ebensolchen, von M. E.-Deslongchamps vorgeführten Theilen begründet. Dabei besteht die Uebereinstimmung offenbar nicht nur in der Form, sondern auch in den Dimensionen der in Rede stehenden Knochen.

Die Abtrennung der vorliegenden Fossilien des Kursker Gouvernements von den in Caen gefundenen, in eine besondere Species beruht sowohl darauf, dass die russischen Ueberreste in viel später gebildeten Schichten gefunden wurden, als die von M. E.-Deslongchamps beschriebenen, aus dem Oolith stammenden, wie auch darauf, dass man nach so unbedeutenden Theilen nicht über die Identität von Thieren verschiedener Faunen urtheilen kann.

Die Gelenkflächen der Wirbelkörper von *Poekilopleuron* sind zwar wenig, aber doch auf beiden Seiten vertieft; die Form der Wirbelkörper aber verändert sich in der Länge der Wirbelsäule. Die Schwanzwirbel sind sehr kurz und zahlreich. Das Alles macht es schwer, wenn nicht ganz unmöglich, die Wirbel — wenn sie einzeln und beschädigt aufgefunden werden, von den Wirbeln vieler Species der Plesiosauren und besonders von *Plesiosaurus neocomiensis* Cpch, der unserem Sewerischen Osteolith eigenthümlich ist, zu unterscheiden.

Auf. Taf. IV, Fig 5, ist die mikroskopische Untersuchung der Knochengewebe der Rippen von *Poekilopleuron Schmidti*, die auf derselben Tafel, Fig. 1, 2 und 3, abgebildet sind, dargestellt. Die Zeichnung *A* zeigt die Gewebe in der Längenrichtung und *B* im Querschnitt bei $^{95}/_{1}$ facher lin. Vergr. *C* ist nach dem Präparat *B* bei $^{600}/_{1}$ facher Vergrösserung angefertigt.

Auf Taf. V zeigen die Fig. 4*A*, *A'*, *A''*, *A'''*, *B*, *B'* u. *B''* die Structur der Gewebe eines Bruchstücks vom Oberarmbein (humerus) des linken Fusses eines *Poekilopleuron Schmidti* n. (Taf. IV, Fig. 4*A*, *B* u. *C*).—*A* stellt den Bau des Gewebes an der Oberfläche des Knochens, im Puncte *n* dar; *A'* den Bau des Gewebes parallel der äusseren Oberfläche im Puncte *n*, jedoch bei tieferem Eindringen in den Knochenkörper;—*A''* die Structur in der Längenrich-

tung, aus dem harten cylindrischen Theil *m*, des obern Endes des Knochenkörpers; *B* das Knochengewebe im Querschnitt am untern Ende *n* und *B'* gleichfalls im Querschnitt, jedoch am obern Ende *m* des Knochenkörpers. Die Abbildungen *A*, *A'*, *A''*, *B* u. *B'*, zeigen die Structur der Knochengewebe bei $^{95}/_{1}$ facher lin. Vergr., *A'''* u. *B''* aber bei $^{600}/_{1}$ facher Vergr. nach den Präparaten *A* u. *B'*.

Die Abbildungen der Gewebe der Rippen zeigen deutlich, nicht nur, dass der Knochen noch im Bildungsprocess vom Tode ereilt wurde, sondern lassen sogar erkennen, dass die Bildung, oder Verknöcherung dieser Theile eine junge ist, obgleich diese Rippen einem vielleicht schon ausgewachsenen Thiere angehörten. Im letzteren Falle beweist die jüngst erfolgte Bildung der Knochengewebe in den Rippen nur, dass beim *Poekilopleuron* die Verknöcherung in den Rippen viel später stattfand, als in vielen anderen Theilen seines Skelets.

An den Zeichnungen *A* u. *B* erkennt man deutlich, dass die Medullarkanäle *vn* mit Breicement *d''*, der aber noch nicht festgeworden war und keinen deutlichen Bau aufweist, angefüllt war. In der Breicementmasse gewahrt man die Verkalkung des Knorpelgewebes mit Knorpelhöhlen und Osteoblastenzellen *kr* und *rl*, der Knochen selbst aber wird von Röhrchen *t* durchzogen, die man für erhaltene Spuren der Reihen primärer Zellen *t'n'* halten muss.

An der Abbildung *C* sehen wir, 600 Mal vergrössert, einen Theil eines Medullarkanales *vn*, der mit einer homogenen Schicht abgelagerten Blastems umgeben ist und auf dessen Ausdehnung wir Osteoblasten-Zellchen *rl*, ohne Anzeichen von Ausläufern, sowie Fetttröpfchen und Osteoblasten-Zellchen *r'l'* mit Keimen von Ausläufern und bisweilen mit concentrischer Streifung der Wandung bemerken. Ferner stellt das Knochengewebe in dem Raume zwischen den Markkanälen, der stellenweise von Radialrissen, *n*, durchzogen wird, einen Uebergangszustand von Osteoblastenzellchen in die verschiedensten Stufen ihrer Umbildungen und Medullarhöhlen *v'n'* im provisorischen Gewebe dar.

Die auf Taf. V, Fig. 4 abgebildeten Gewebe finden wir in höherem Grade verknöchert. Die periostale Knochenschicht selbst erscheint, wie die Abbildungen *A* u. *A'''* zeigen, im vollen Uebergangszustande der Verkalkung; dabei sieht man jedoch die Medullarkanäle *v'n'* im provisorischen Gewebe. Beim unbedeutendsten Eindringen in die Knochenmasse jedoch, verändert sich schon das Knochengewebe, wie die Abbildung *A'* zeigt. Die Medullarkanäle *v'n'* beginnen zu verschwinden; die Knochenzellen *lk* aber weisen häufiger deutlichere und verlängerte Ausläufer *tl* auf.

Aus den Abbildungen *A''* und *B'* ersieht man, dass der Knochen in den cylindrischen Wandungen am obern Ende *m*, des Bruchstücks vom Humerus sehr dicht ist und härter, als am untern Ende, *n*, desselben, wie das die Vergleichung mit der Zeichnung *B* beweist.

An den Zeichnungen *B*, *B'* u. *B''* des Querschnittes der Gewebe sieht man bei $^{95}/_{1}$ facher und $^{600}/_{1}$ facher Vergr., dass die Medullarkanäle *vn* öfter von schwachen Ablagerungen des Blastem's *bl*, das eine homogene Schicht bildet, umgeben sind; diese Ablagerungen enthalten

Osteoblastenzellchen *rl* und *r'l'*, die in Knochenzellen *lk* übergingen. Ferner ersieht man auch, dass die Knochenzellen *lk* zahlreiche und sehr feine Ausläufer *tl* aufweisen. Eine ganz besondere Aufmerksamkeit muss man jedoch auf die sehr häufige Richtungsänderung der Schichten des Blastems *bl*, das die Medullarkanäle umgiebt, richten (vgl. die Zeichnungen *B*, *B'* u. *B''*) und sieht dabei, dass die Schichten der vorhergehenden Ablagerungen, von Schichten späterer Verkalkungen durchbrochen werden, wie man Solches auch an menschlichen Knochen beobachten kann (vgl. H. Frey: Grundzüge der Histologie, Leipzig 1875, p. 75, Fig. 65, ein menschliches Fingerglied im Querschnitt).

Alles dieses beweist jedoch nur, dass in diesem harten Knochen die Knochengewebe bei ihrer Verdichtung bis zu dem gegenwärtig beobachteten Zustande, mehr als einmal in dem Maasse wechselten, als die gebogene Form dieses Knochens (sowohl bei den Crocodilen, als auch bei den Schildkröten und anderen Thieren) bei der Verrichtung einer der wirksamsten Functionen, bei starken Bewegungen des ganzen Körpers des Thieres, sich allmählich entwickelte. Ob ich dabei wohl dessen besonders zu erwähnen habe, dass, meiner Meinung nach, aus allen Erklärungen meiner Beobachtungen erhellt, dass ich, auf Grund der von mir vorgeführten Untersuchungen fossiler Knochen, mir die jetzt anerkannte Lehre erkläre, dass der verkalkte Knorpel nicht zum osteoiden Gewebe wird! Er schmiltzt vielmehr ein und in dem so gewonnenen Lückensystem etablirt sich als neues, vom Periost geliefertes Gewebe, die Knochensubstanz (vgl. H. Frey, Histologie, p. 70).

Es darf nicht mit Stillschweigen übergangen werden, dass, bei Vergleichung der Gewebe der Rippen mit den Geweben des Oberarmbeins von *Poekilopleuron* (vgl. Taf. IV, Fig. 5 u. Taf. V, Fig. 4), man an der Zugehörigkeit derselben zu einem und demselben Thiere zweifeln könnte; erinnert man sich jedoch dessen, dass diese Knochen am selben Orte gefunden wurden und, ihrer äusseren Form nach, genügend bestimmt worden sind, so kann man es sich hinlänglich erklären, dass die scheinbare Nichtübereinstimmung im Bau der Gewebe nicht auf der Verschiedenheit der Species beruht, sondern auf der verschiedenen Lage dieser Knochen, die solchen Theilen des Skelets (den Rippen und Füssen) angehören, in denen die Verknöcherung der Gewebe bei einem und demselben Individuum, sich auf verschiedene Stufen der Erhärtung und Erstarkung der Knochen und ihrer Knochengewebe befinden musste und die gebogene Form des Humerus muss durch eine andere Structur der Gewebe bedingt sein, als in den graden Theilen der Rippen.

Vergleicht man den von mir beschriebenen mikroskopischen Bau der Gewebe des Oberarmbeins (humerus) von *Poekilopleuron* mit dem mikroskopischen Bau der Gewebe des Oberschenkelbeins (femur) von *Crocodilus biporcatus* (vgl. Descriptive and illustrated Catalogue of the histological series in the Museum of the Royal College of Surgeons of England, vol. II, London 1855, p. 128 und die Präparate *B*, *b*, 77 u. 79. Pl. IX, Fig. 6—9), so kann man bemerken, dass der auf Fig. 6 u. 7 bei $^{95}/_1$ facher und $^{400}/_1$ facher lin. Vergr. gezeigte Querschnitt des Oberschenkelbeins (femur) von *Crocodilus biporcatus* eine Menge kleiner Haverscher Kanäle darstellt, die von einer sehr undeutlichen Schichtung umgeben sind.

Die Zellen (lacunae) sind concentrisch angeordnet. Sie sind auffallend gross und entsenden viele Ausläufer (canaliculi). Um die Haverschen Kanäle — ganz an den Rändern derselben — bemerkt man keine Zellen (lacunae), sieht aber deutlich die Vereinigung der Ausläufer (canaliculi) der Zellen mit den Haverschen Kanälen.

Im Längenschnitt desselben Knochens (d. h. des Oberschenkelbeins femur von *Crocodilus biporcatus*, Fig. 8 u. 9) sieht man, dass in einem Theile des Durchschnitts die Haverschen Kanäle sich in der Länge theilen, im andern aber nehmen sie eine mehr oder weniger schräge Richtung ein; doch sieht man in beiden Theilen die Zellen deutlich und im ersten Theile sind sie in paralellen Reihen angeordnet; einige derselben erscheinen beträchtlich lang.

Ferner wird im obenerwähnten Catalogue, p. 129, nach den Präparaten *B*, *b*, 81 u. 82, der mikroskopische Bau der Gewebe im Längen- und Querschnitt des Oberschenkelbeins (femur) vom Crocodil aus dem Lias, von Charmouth und Dorsit erklärt. Dabei ist zu bemerken, dass in der Nähe der äusseren Oberfläche des Knochens eine andere (peculiar) Anordnung der Haverschen Kanäle und Zellen zu Tage tritt, als die, welche nach Knochenschnitten jetzt lebender Crokodile beschrieben ist und dass die Haverschen Kanäle näher zur Mitte des Knochens sehr gross werden und jeder von ihnen von einer dünnen Knochenschicht, die Zellen von der gewöhnlichen Form aufweist, umgeben ist. Die Grenze oder der Rayon eines jeden Systems eines Haverschen Kanales ist sehr scharf markirt, weil die Kanäle und ihre Verzweigungen dunkler gefärbt erscheinen, als jeder andere Theil des Schnittes.

Im Längendurchschnitt desselben Knochens sieht man die Haverschen Kanäle zahlreich; sie laufen parallel zu einander und vereinigen sich durch Zweige, die von ihnen in der Querrichtung ausgehn. Die Zellen folgen grösstentheils der Richtung der Kanäle. Die Ausläufer der Zellen (canaliculi) jedoch treten nicht so deutlich hervor.

Das Präparat *B*, *b*, 83, stellt den Querschnitt des untern Oberschenkelbeinendes (femur) vom grossen *Alligator lucius* dar und man sieht darauf zahlreiche Haversche Kanäle, die sich in der Querrichtung theilen. Diese Kanäle sind nur von wenigen Schichten umgeben; die Schichtung selbst aber ist grösstentheils nicht mehr zu erkennen. Die Zellen um die Medullarhöhlen der Kanäle sind concentrisch angeordnet; sie sind in der Richtung ihres kleinen Durchmessers weiter von einander entfernt und zeichnen sich durch die grosse Zahl ihrer Ausläufer (canaliculi) und die häufige Verzweigung der letzteren aus.

Der Querschnitt eines ebensolchen Knochens, Präparat *B*, *b*, 84—zeigt auch dem unbewaffneten Auge zweierlei Structur: eine sehr dichte und eine mehr oder weniger netzartige oder gitterförmige (cancellated). Erstere communicirt mehr mit der äusseren Oberfläche des Knochens, letztere mit dem innern Theil desselben. In dem dichten Gewebe sind die Haverschen Kanäle kleiner und weniger zahlreich; die Zellen sind zu parallelen Reihen geordnet. In dem netzartigen Theil aber sind die Kanäle dicker und von concentrischen Knochen-

schichten umgeben. Die Zellen zwischen ihnen sind durch ihre zahlreichen Ausläufer (canaliculi) bemerkenswerth.

Auf Taf. VI, Fig. 1*A* u. *B* u. Fig. 2 u. 3 ist in halber natürlicher Grösse ein Knochenbruchstück dargestellt, dessen ich hier ausschliesslich deshalb erwähne, um dem Reichthum der Fauna unseres Sewerischen Osteolith's keinen Eintrag zu thun.

Dieses Bruchstück ist zu klein und zu ungenügend erhalten, als dass man nach demselben einen positiven Schluss auf den ganzen Knochen ziehen könnte; trotzdem genügt es soweit, dass man danach mit einiger Sicherheit annehmen kann, dass es das obere oder nähere Ende eines Metatarsalknochens aus dem rechten Fuss eines crokodilartigen Thieres ist, wie mir scheint jedoch keines *Poekilopleuron*, da bei diesem die Knochen der Extremitäten verhältnissmässig dicker gewesen sein müssen.

Dass dieser Knochen aus dem Sewerischen Osteolith stammt, unterliegt gar keinem Zweifel, denn man bemerkt an demselben deutliche Spuren dieser Steinart und auch die Art und Weise, wie er versteinert ist, bestärkt in dieser Annahme.

Die Abbildung Taf. VI, Fig. 1*A*, stellt die Breitseite, die Abbildung, Fig. 1*B*, die schmale, oder dünne Seite des Knochens dar.

Fig. 2, zeigt die obere Gelenkseite und Fig. 3, den Querschnitt des Knochenkörpers.

Das Innere des Knochens ist mit einer Masse angefüllt, die deutliche Merkmale der netzartigen Structur aufweist; die Knochenwandungen aber sind aus sehr dichtem Knochen gebildet.

Der mikroskopische Bau der Gewebe dieses Knochens ist auf Taf. VII, Fig. 1*A*, *B* u. *C* abgebildet.

Die Abbildungen *A* u. *B*. sind in $^{95}/_1$ facher, *C* in $^{600}/_1$ facher lin. Vergrösserung, nach demselben Präparat, wie die Zeichnung *B* angefertigt.

Vergleicht man die Abbildungen Taf. VII, Fig. 1*A*, *B* u. *C* mit den Abbildungen auf Taf. IV, Fig. 5*A*, *B* u. *C*, so findet man einige Aehnlichkeit zwischen der Structur der Knochengewebe in den Rippen von *Poekilopleuron Schmidti* und der Structur der Gewebe des Metatarsalknochens, der muthmasslich einem Crocodil angehört hat.

Die Gewebe des vorliegenden Knochens weisen deutliche Spuren dessen auf, dass der Knochen sich beim Tode des Thieres im Bildungsprocess befand und lassen erkennen, dass die Verknöcherung derselben vor nicht langer Zeit erfolgt war.

Aus den Zeichnungen ist ersichtlich, dass die Medullarkanäle *vn* mit Breicement *d''* angefüllt waren, in dessen Masse die Verkalkung des Knorpelgewebes vor sich ging; im Knochen selbst aber bemerkt man Spuren der Röhrchen *t*.

Auf den Abbildungen des Querschnittes der Gewebe, die 95 und 600 Mal vergrössert

sind, erscheinen die Medullarkanäle *vn* von gleichartigen (homogenen) Schichten umgeben, in deren Ausdehnung man die Zellen *rl* u. *r'l'* sieht; an den Grenzen der Medullarkanäle aber kommen Radialrisse *nn* vor.

Fossilia indeterminata.

I.

Der auf Taf. III, Fig. 1 u. 2, abgebildete Knochen wurde im Sewerischen Osteolith, zusammen mit einigen Ueberresten von *Plesiosaurus* gefunden und stellt eine, diesen gleichartige Versteinerung dar, was zweifellos von der Gleichzeitigkeit des Unterganges aller dieser Knochen an jenem Orte zeugt.

Die Knochenmasse des vorliegenden Knochens besitzt eine netzartige Structur die zur äusseren Oberfläche hin dichter wird; hier bildet sich denn auch unter Mitwirkung einer solchen Verdichtung eine Rinde von beträchtlicher Dicke.

Diese Bildung des besagten Knochens weist darauf, dass derselbe einem säugethier- oder schildkrötenartigen Thiere, das vorzugsweise im Meere lebte, angehört hat.

Die Dimensionen des Knochens lassen einen Schluss ziehen auf die Grösse, Stärke und die Kraft im ganzen Skelete eines Individuums dieser Art.

R. Owen hat im Monograph on the fossil Reptilia of the Cretaceous formations, das in der Palaeontographical Society vom Jahre 1851 abgedruckt war, in der History of british fossil Reptiles, Section II, auf Tab. XLIV, Fig. 8, in natürlicher ($^1/_1$) Grösse den Oberarmknochen (humerus) von Chelonian fossils (indeterminatae) aus der untern Kreide, abgebildet. Dabei erklärt er auf S. 167 (der History), dass es der Oberarmknochen (humerus) des linken Fusses einer Schildkröte ist, der sich von denselben Knochen gegenwärtig lebender Species durch die grössere Breite des entfernten Endes unterscheidet.

Das von mir untersuchte Bruchstück aus dem Sewerischen Osteolith bietet, der Form und Bildung nach, eine grosse Aehnlichkeit mit dem obern Ende des Knochens, den Owen für den Oberarmknochen von unbekannten Cheloniern hält; es hat ebenfalls dem Knochen des linken Fusses, vielleicht einer Schildkröte, angehört und unterscheidet sich vom englischen Exemplar durch die viel beträchtlichere Grösse; das englische ist nämlich, bei $3^1/_2$ Zoll Länge, am obern Ende etwas mehr, als $1^1/_2$ Zoll, am entfernten Ende aber fast $1^3/_4$ Zoll breit, während mein Bruchstück von einem Knochen stammt, der mehr als 5, fast 6 Mal so gross war, als der englische. Und in der That, wenn wir mein Exemplar nach dem englischen restauriren wollten, so müssten wir die ganze Länge dieses Knochens auf 20 Zoll, die Breite am obern Ende auf $8^1/_2$ und am untern Ende auf nicht weniger als 11 Zoll annehmen.

Berücksichtigen wir, dass aus dem Tertiärgebilde des Himalaya und ebenso Deutschlands, die fossilen Ueberreste der Riesenschildkröten (vgl. *Colossochelys atlas* Falc. und Gautley, *Atlantochelys* Ag. und *Makrochelys mira* H. v. M.) schon bekannt sind und dass die Thiere der Ordnung Chelonia Brongn., die sich nach bekannten Daten in der Juraperiode zeigten, sich mehr und mehr verbreiteten und auch in gegenwärtiger Zeit in voller Entwickelung fortbestehn, so könnten Entdeckungen, wie diejenige, auf die ich hingewiesen habe, keinen Zweifel einflössen, wenn die Wahrscheinlichkeit der Bestimmung dabei durch die mikroskopische Untersuchung der Gewebe dieses Knochens bestätigt worden wäre.

Auf Taf. V, Fig. 3*A*, *B* u. *C* ist der mikroskopische Bau der Gewebe dieses Knochens abgebildet—in der Längenrichtung, bei $^{95}/_1$ facher lin. Vergr. (Zeichnung *A*) und in der Querrichtung aus demselben Object, bei $^{95}/_1$ facher und $^{600}/_1$ facher lin. Vergr. (Zeichnung *B* u. *C*); auf Taf. VII, Fig. 4*A*, *B* u. *C* aber ist, behufs Vergleichung, die mikroskopische Untersuchung der Gewebe des Oberschenkelbeins (femur) von *Testudo Horsfieldi*, die ich durch die Liebenswürdigkeit des Herrn Dr. A. Strauch erhalten habe, dargestellt.

Colossochelys Falc. und Gautley, dem man am ehesten mein Bruchstück des fossilen Knochens zuweisen kann, nähert sich am meisten der jetzt lebenden Gattung *Testudo* L.; folglich müsste auch die Vergleichung des mikroskopischen Baues der Gewebe gleichartiger Knochen dieser Thiere befriedigendere Resultate liefern.

Aus dem Oberschenkelbein von *Testudo Horsfieldi* habe ich auf Taf. VII, Fig. 4*A*, *B* u. *C* die Gewebe in derselben Ordnung und unter denselben Verhältnissen, unter denen der Bau der Gewebe des fossilen Knochens (Taf. V, Fig. 3*A*, *B* u. *C*) abgebildet ist, dargestellt und zwar zeigen: die Zeichnung *A*, die Structur der Gewebe in der Längenrichtung bei $^{95}/_1$-facher lin. Vergr., die Zeichnungen *B* u. *C* die Gewebe in der Querrichtung nach demselben Object bei $^{95}/_1$ facher und $^{600}/_1$ facher lin. Vergrösserung.

Indem ich mich zu den Untersuchungen der englischen Histologen wende (vgl. Descriptive and illustrated Catalogue of the histological series, contained in the Museum of the Royal College of Surgeons of England, vol. II, pp. 131—134, Plate XVII, Fig. 5 and 6), kann ich nicht umhin, eine vollständige Aehnlichkeit zwischen der Structur der in diesem Catalogue abgebildeten Gewebe von Schildkrötenknochen und den auf Taf. VII, Fig. 4 dargestellten Geweben von *Testudo Horsfieldi* zu finden; andererseits sind diese, unter einander ähnlichen Gewebe (die englischen und die von mir beschriebenen) gänzlich verschieden von den Geweben auf Taf. V, Fig. 3*A*, *B* u. *C*. — Indessen sind die Gewebe auf Taf. V, Fig. 3*A*, *B* u. *C*, ähnlich den auf Taf. V, Fig. 1 u. 2 abgebildeten, von denen Fig. 1, die Gewebestructur des Bruchstücks vom Zahnstück des Unterkiefers (dentary, 32) eines *Polyptychodon* Owen (?) zeigt; Fig. 2 derselben Tafel veranschaulicht die Structur der Gewebe des Hüftknochens (os ilei) der linken Seite von *Lütkesaurus* auf Taf. I, Fig. 3.

Aus Allem oben Gesagten erhellt, dass der auf Taf. III, Fig. 1 u. 2 abgebildete Knochen nicht einem Thiere der Ordnung *Chelonia* Brongniart (*Testudinata* Oppel) zugewiesen werden darf, sondern eher einem Thiere der Ordnung *Sauropterygia* Owen; vielleicht hat

er sogar einem Individuum der Gruppe *Thaumatosauria* n. angehört und in diesem letzteren Falle kann er nicht unbedingt für einen Oberarmknochen (humerus) gehalten werden.

Das ist ein neuer Beweis dafür, wie es bisweilen auch für den Palaeontologen wichtig und nothwendig ist, zu mikroskopischen Beobachtungen der Knochen, die ihm zur Untersuchung vorliegen, seine Zuflucht zu nehmen, wenn auch nicht mit dem directen Zweck, sie zu bestimmen, so doch wenigstens zur Controle einer Schlussfolgerung, die ihm sehr plausibel erscheint.

Aus Anlass des Obenerwähnten kann ich mich nicht zur Bestimmung bloss auf Grund von Erwägungen entschliessen und betrachte diesen Knochen als einen solchen, der einer bis hierzu noch unbekannten Art fossiler Reptilien angehören muss.

II.

Auf Taf. VI, Fig. 4*A*, *B*, *C*, *D* u. *E* u. Fig. 7, sind in $^1/_3$ der natürlichen Grösse Knochen abgebildet, die im Kursker Gouvernement und Kreise, in der Nähe des Dorfes Mieschkowo (Мѣшково), am rechten Ufer des Flüsschens Tuskari, das in den Sseim, einen Zufluss des Dniepr mündet, gefunden wurden.

Diese Knochen lagen in einer Schicht des Sand- (oder Kalk-, oder Kreide-) Mergels, der den Bewohnern jener Gegenden unter dem Namen Ssurka (сурка) bekannt ist.

Die Ssurka liegt unmittelbar unserem Sewerischen Osteolith auf und man muss diesen Mergel für eine Ablagerung halten, die zur Formation des Grünsandes gehört.

Die verliegenden Knochen gehören vielleicht einer der Gattungen der fossilen Riesensaurier der Grünsandperiode an.

Der erste dieser Knochen, Taf. VI, Fig. 4 konnte dem Boden entnommen werden und hat sich in meiner Sammlung in dem auf den Abbildungen dargestellten Aussehn erhalten. An der äusseren Oberfläche zeigt er Spuren des Anliegens an Sewerischen Osteolith und auch die Knochenzellen scheinen mit dieser Masse ausgefüllt zu sein.

Das Bruchstück, Taf. VI, Fig. 7, war dermassen verwittert und die Knochenmasse so schwach und so spröde, dass es unmöglich war, dasselbe aus dem aufgeweichten und nassen Boden heil zu gewinnen; es musste daher in Partien und nach allmähliger Reinigung von der umliegenden Masse abgezeichnet werden. Was nun die Dimensionen dieses Knochens anlangt, so sind dieselben auf den Zeichnungen in englischen Fussen, Zollen und Linien angegeben.

Vergleicht man das unter Fig. 4*A* u. *B* abgebildete Knochenbruchstück mit dem Knochenbruchstück aus Hyth (vgl. History of British Fossil, vol. IV, R. Owen: Reptiles pp. 201 — 209), so kann man vermuthen, dass das russische Exemplar einen Theil des Körpers (zum untern Ende) des Oberarms (humerus) von einem Thiere derselben Art, wie das englische, darstellt.

An den Abbildungen *C* u. *D*, derselben Figur, sind die Querschnitte am untern und obern

Ende unseres Bruchstücks und auf der Zeichnung *E*, die Structur des Knochens gezeigt. An dieser letzten Zeichnung sieht man, dass der Knochen, von der äussern, dichten Oberfläche her allmählich in die netzartige oder grobzellige Structur übergeht und dass eine solche grobzellige Masse die ganze Innenhöhle ausfüllte; aber vermuthlich zerfiel diese schwache Masse und erhielt sich nur in den mehr erstarkten Theilen.

Das auf Taf. VI, Fig. 7 abgebildete Knochenbruchstück kann man für das untere oder entfernte Ende des grossen Schienknochens (tibia) halten. Dieser Knochen ist offenbar dem von G. Cuvier im Tom. X seiner Ossements fossiles, Pl. 249, Fig. 34 u. 35 vorgeführten Knochen, den er aus der Stadt Honfleur erhalten hat, sehr ähnlich. Auf pag. 204 hält G. Cuvier diesen Knochen für das untere Ende des grossen Schienknochens, der auf einen besonderen Bau der Hinterfüsse eines solchen fossilen Sauriers hinweist. Die Zeichnungen G. Cuvier's sind in $^1/_4$, die meinigen in $^1/_3$ der natürlichen Grösse ausgeführt. Das lässt einen Schluss auf die relative Grösse dieses fossilen Thieres ziehen und weist zugleich darauf, dass dasselbe die Grösse des grossen *Iguanodon* erreichte.

R. Owen bemerkt bei der Beschreibung derartiger Knochen aus dem untern Grünsande von Hyth, dass sie einem fossilen Riesensaurier angehört haben müssen und zwar einer den Crocodilen nahestehenden Gattung, die an Grösse den Gattungen *Cetiosaurus* und *Polyptychodon* nicht nachstand. Wegen des Fehlens von Theilen aber, die die Eigenthümlichkeiten der Zähne und Wirbel bestimmen, kann man auch bis auf den heutigen Tag diese grosse Wassereidechse keiner der bekannten Gattungen zuzählen. Bei alledem hat jedoch R. Owen die Eigenschaften bezeichnet, durch welche sich diese Ueberreste von ebensolchen Knochen bekannter, ausgestorbener, eidechsenartiger Thiere unterscheiden. Indem er in Erwägung zieht, dass die langen Knochen der Extremitäten keine Markhöhlen haben, aber einen innern, aus grobem netzartigem Gewebe bestehenden Bau aufweisen, schliesst er, dass das Thier, von dem diese Knochen stammen, zum Leben im Wasser bestimmt war, nicht aber zu den Dinosauriern gehörte. Aus der Form des Oberschenkelbeins (femur) und unabhängig von der Grösse und Form der Metatarsalknochen, ersieht R. Owen, dass diese Ueberreste keinem walfischartigen Thiere angehört haben können, während man sie nach der Grösse und Form der Metatarsalknochen weder zu Säugethiergattungen, noch zu den Amphibien der Ordnung der Enaliosaurier zählen kann.

Die Knochenzellen, welche das netzartige Knochengewebe bilden, messen fasst eine Linie im Durchmesser. Die dichte äussere Rinde der Knochenwände ist 4 — 5 Linien dick. Im lebenden oder frischen Zustande waren die Zellen des netzartigen Knochengewebes dieser Wassereidechse ohne Zweifel mit flüssigem Fett angefüllt—ganz ebenso, wie bei den Knochen der walfischartigen Thiere, die mit ihnen ein ebensolches, grobes, netzartiges Gewebe gemein hatten; auf diese Weise glich sich die Schwere des Thieres mit der Schwere der Flüssigkeit, in der dieses Thier, wenn auch nicht ausschliesslich, so doch vorzugsweise—zu leben bestimmt war, fast aus.

R. Owen gelangt, indem er nach dem Knochen, den er für einen coracoiden Knochen

dieses Thieres hält, urtheilt, zu dem Schluss, dass die Breite desselben auf eine starke Entwickelung der zur Bewegung der Vorderfüsse bestimmten Muskeln hinweist und folgert daraus weiter, dass die vordern Extremitäten bei diesem Thiere stärker waren, als bei den Crocodilen. Bei der jetzt lebenden Familie der Crocodile, dienen die vordern Extremitäten vorzugsweise zur Stütze des Körpers bei der Fortbewegung des Thieres auf dem Lande; beim Schwimmen werden sie durch eine Bewegung, die wieder durch die Thätigkeit des starken, in der verticalen Richtung comprimirten breiten Schwanzes hervorgerufen wird, an die Seiten der Brust angezogen. Da die Seitenbewegungen der Vorderfüsse sehr beschränkt sind, so sind der coracoide Knochen und die von ihm ausgehenden Muskeln ziemlich dünn.

Bei den Enaliosauriern, bei denen die Vorderfüsse in Ruderglieder umgewandelt sind, sind die coracoiden Knochen sehr erweitert, denn das ist für die Zunahme der Kraft des Oberarmgelenks und zur Vergrösserung der Oberfläche, an die sich die Muskeln befestigen, die die seitlichen Bewegungen und die Schläge mit den schaufelförmigen Gliedern im Wasser ausführe n, unumgänglich. Daraus folgt, dass die vordern Extremitäten des — wie man annimmt — ausgestorbenen Riesencrocodils, in Folge irgendwelcher Veränderungen in der Schwimmhaut, mehr zum Schwimmen angepasst waren, als die Füsse der jetzt lebenden Crocodile.

Ferner sagt R. Owen, dass die Gewebe des Oberschenkelbeins, des grossen und kleinen Schienknochens (femur, tibia u. fibula) hinlänglich die Unmöglichkeit einer Identität dieses eidechsenartigen Thieres aus dem Grünsande von Hyth — mit dem *Iguanodon* und *Megalosaurus*, von denen der erstere im untern Grünsande von Maidston entdeckt wurde und beide in der Wealdenstufe und der Oolithformation vorkommen, beweisen.

Hierauf werden die Beziehungen dieses Thieres zu den Gattungen *Mosasaurus* und *Poekilopleuron* betrachtet.

Die Länge und Dicke des Oberschenkelbeins (femur), das Vorhandensein von Gelenkhügeln (condyles) an demselben, die Dichtheit und die eckige Form der Metatarsalknochen — alle diese Eigenschaften lassen keinen Vergleich mit *Plesiosaurus*, und um so weniger mit *Ichthyosaurus* zu.

Die obere Erweiterung des Schambeins (os pubis), der breite coracoide Knochen, der die Form des Oberschenkelbeins hat und überhaupt die bedeutenden Dimensionen aller Knochen, lassen keinen Vergleich zu zwischen dem erwähnten eidechsenartigen Thiere und irgend einem Reptil aus der Gattung der Crocodile, wie der ausgestorbenen, so der lebenden, deren Extremitätenknochen schon bekannt sind.

Wenn der Mosasaurus wirklich bewegliche Extremitäten in Form abgeplatteter Ruderglieder, wie der Plesiosaurus, gehabt hätte, so wäre die Identität des der Beurtheilung vorliegenden Reptils mit der Gattung von Maistricht einfach in Abrede zu stellen wegen der unzweideutigen Ueberbleibsel von Flossenknochen, welche auf die Form des Fusses, der dem Fusse des Crocodil's entspricht, deuten. Und wenn — was sehr wahrscheinlich ist — die Metatarsalknochen des, im Grünsande von New-Jersey gefundenen Eidechsentypus, einem

Mosasaurus gehören, so unterscheiden sich die Knochen aus dem Grünsande von Hyth von denselben durch ihre Grösse, ihre Form und den Mangel jeglicher Markhöhle.

Das eidechsenartige Thier von Hyth entspricht, was die Eigenthümlichkeiten der Knochen anlangt, am meisten dem ausgestorbenen Crocodil, den R. Owen *Cetiosaurus* benannt hat und dessen Wirbel im Wealdenboden und in der Oolithformation gefunden wurden; seine langen Knochen besitzen keine Markhöhlen.

Das von M. E.-Deslongchamps in Caen entdeckte und mit dem Namen *Poekilopleuron Bucklandii* benannte Riesenreptil kann — nach dem Oberschenkelbein, den Theilen des grossen und des kleinen Schienknochens und den Metatarsalknochen zu urtheilen, gemäss der Meinung R. Owen's den Sauriern von Hyth zugezählt werden.

Nach der Form der Gelenkhügel des Oberschenkelbeins und des hintern Theiles der zwischen ihnen liegenden Vertiefung — gleicht das eidechsenartige Reptil von Hyth mehr dem *Poekilopleuron* als dem *Iguanodon*, aber die grosse Markhöhle des Oberschenkelbeins von *Poekilopleuron* unterscheidet dieses, wie auch das Oberschenkelbein von *Iguanodon* von dem gleichen Reptil aus Hyth.

Da im Exemplar von Hyth die Wirbel und Zähne fehlen, so konnte R. Owen keinen Vergleich zwischen diesen Theilen des Skelets zweier ausgestorbener eidechsenartiger Thiere anstellen und die Frage in Betreff des Characters der Zähne von *Poekilopleuron* bleibt, wie zur Zeit von M. E.-Deslongchamps, nicht vollständig entschieden. Letzterer hat bei der Beschreibung eines einzelnen, von einem grossen Crocodil stammenden, Zahnes (vgl. Fig. 8, Pl. VI seiner Mémoiren), der im Oolith, in der Nähe des Dörfchens Allemagne, gefunden wurde, eine Aehnlichkeit in Bezug auf die Grösse zwischen diesem Zahne und den Ueberresten von *Poekilopleuron* erkannt.

Der eben genannte Gelehrte hat es nicht für überflüssig gehalten, dieses Zahnes bei der Besprechung der Zähne von *Poekilopleuron* zu erwähnen, es späteren Entdeckungen überlassend, die Frage betreffs dieser Aehnlichkeit zu entscheiden.

Aus demselben Grunde hat auch R. Owen der Untersuchung des Sauriers von Hyth und der Beschreibung der Zähne eines grossen und bis dahin noch unbekannten Thieres aus dem Grünsande von Maidston — eine Besprechung ähnlicher Zähne aus der Kreideformation von Sussex, Kent und Cambridge hinzugefügt.

Auf Grund des im dritten Theil meiner «Studien» Dargelegten, kann man, glaube ich — was die Untersuchung der Thiere der Gruppe *Thaumatosauria* im Allgemeinen und der Gattung *Polyptychodon* im Besonderen betrifft — zugeben, dass sowohl das fossile Reptil von Hyth, als auch die beim Dorfe Mieschkowo im Gouvernement Kursk, im Kreidemergel gefundenen Knochen, nicht nur nicht Thieren einer und derselben Gattung, sondern nicht einmal einer und derselben Familie zugeschrieben werden können, und wenn etwas darauf hinweist, dass der *Polyptychodon* der Ordnung *Sauropterygia* Owen zuzuzählen ist, so wird der Eidechse von Hyth vielleicht mit Recht ein Platz in der Ordnung *Crocodilina* Oppel

angewiesen werden. Deshalb hatte ich mich auch für berechtigt, diese fossilen Thiere vorläufig zu den indeterminirten fossilen Reptilien zu rechnen.

Wenden wir uns nun zur mikroskopischen Untersuchung der Knochengewebe des auf Taf. VI, Fig. 4, dargestellten Exemplares, aus dem es möglich war, befriedigende Objecte herzustellen.

Der Bau dieses Knochens und die Structur seiner Gewebe sind von mir bei linearen Vergrösserungen von 10 bis 600 Mal beobachtet worden.

Schon bei $^{10}/_{1}$ facher Vergrösserung sieht man deutlich, wie das Knochengewebe im Längen- und im Querschnitt, von der äusseren, dichten Oberfläche an, mehr und mehr netzartig wird und wie in dieser Richtung die Markkanäle allmählich an Dicke zunehmen, die harten, zwischen ihnen liegenden (interstitiellen) Platten aber sich von einander entfernen.

Auf Taf. VII, Fig. 2*A* u. Fig. 2*B*, sieht man schon bei $^{95}/_{1}$ facher Vergrösserung, dass die mit Osteodentin *d''* ausgefüllten Medullarkanäle *vn* von concentrischen Blastemschichten umgeben sind und dass in dieser concentrischen Schichtung Knochenzellen *lk*, gleichfalls in concentrischer Richtung angeordnet, enthalten sind. Diese Knochenzellen *lk* haben eine längliche Form und ausserdem sind stellenweise Strahlenrisse oder innere Spalten *nn*, die in dem Gewebe der Zwischenkieferknochen von *Ichthyosaurus* beobachtet wurden (vgl. Thl. I, m. Studien), zu sehn. Da aber die Risse *nn* offenbar in den Knochengeweben nur einiger Thiere vorkommen, so kann man sie vielleicht zum Theil für ein Kennzeichen dieser Thiere annehmen.

Im Längendurchschnitt des Knochens Fig. 2*A*, erscheinen die Knochenzellen bedeutend verlängert.

Auf Taf. VII, Fig. 2*C*, ist der Bau eines ebensolchen Knochens, gleichfalls im Querschnitt, nach dem Object Fig. 2*B*, jedoch bei $^{600}/_{1}$ facher Vergrösserung abgebildet.

Aus dieser Abbildung ersieht man, dass die Knochenzellen *lk* eine grosse Anzahl langer Ausläufer *tl*, die in der Richtung der Radien der Markkanäle gehn, aussenden und dass ausserdem in der Richtung des langen Durchmessers die Knochenzellen sich durch längliche Fäden, *yy*, von denen wiederum quere Ausläufer abgehn, verlängern. Daneben sieht man deutlich die concentrischen Risse *n'n'*, die an den Knochen der Ichthyosauren nicht wahrgenommen wurden.

Die eben beschriebene Eigenthümlichkeit der Form der Knochenzellen mit den von ihnen ausgehenden langen Ausläufern *tl*, besonders aber ihre Verlängerung durch die Fortsätze *yy* in der Achse ihrer grössten Ausdehnung und das Vorhandensein bedeutender Risse *n'n'* in den Interstitien der concentrischen Schichten um die Medullarkanäle — kann einigermassen als Unterscheidungs- und sogar als characteristisches Merkmal des Baues der Gewebe solcher Knochen dienen.

Vergleicht man den (oben beschriebenen) Bau des Knochens aus dem Kreidemergel des Dorfes Mieschkowo mit dem Bau der Knochengewebe von walfischartigen und von Rüssel-

thieren (Ord. *Cetacea* und Ord. *Proboscidea*), so kann man nicht umhin, eine Aehnlichkeit zwischen ihnen zu erkennen, wovon sich Jeder überzeugen kann, der selbst ein Object aus Knochen der jetzt lebenden, bezeichneten Thiere angefertigt hat; man ersieht diese Aehnlichkeit auch aus den im vol. II des «Descriptive and illustrated Catalogue of the histological series, contained in the Museum of de Royal College of Surgeons of England» 1855, pp. 175—188, Pl. XII and XIII beschriebenen und abgebildeten Untersuchungen

Die mikroskopische Untersuchung der Gewebe des Ellenbogenbeins (Ulna, Cubitus) des rechten Fusses vom fossilen Ochsen (*bos primigenius*) zeigen, wie die auf Taf. VII, Fig. 3, *A*, *B* u. *C* in der Längen- und Querrichtung bei $^{95}/_{1}$ facher und $^{600}/_{1}$ facher Vergrösserung abgebildeten Gewebe darthun, ebenfalls eine—wenn auch nicht so grobe, doch eine Structur von demselben Character, wie die Structur der auf Taf. VII, Fig. 2*A*, *B* u. *C* abgebildeten Gewebe des Knochens, Taf. VI, Fig. 4; der weniger grobe Bau der Gewebe des Knochens, Taf. VII, Fig. 3, rührt zum Theil von der Anfertigung der Objecte aus dem länglichen, schmalen Rande dieses Knochens her.

Ich halte es nicht für überflüssig, hier noch dessen zu erwähnen, dass der Bau der Gewebe des Ellenbogenbeins von *Bos primigenius* dem Bau des Oberschenkelbeins (femur) vom Hausochsen, *Bos Taurus* L. (vgl. do. Catalogue, Pl. XIV, Fig. 1) sehr ähnlich ist.

III.

Der auf Taf. VI, Fig. 5 u. 6 abgebildete Knochen wurde auch im Mergel von Mieschkowo entdeckt und bietet noch mehr Zweifel und Räthselhaftigkeit dar.

Er konnte ebenfalls nicht dem aufgeweichten und nassen Boden entnommen werden und musste daher im Steinbruche in dem Verhältniss der allmähligen Befreiung von der ihn umgebenden Masse abgezeichnet werden. Deshalb darf die Genauigkeit der Zeichnungen nicht mit vollständiger Unfehlbarkeit angenommen werden, obgleich dieselben mit möglichster Genauigkeit ausgeführt wurden.

Den Knochen auf Taf. VI, Fig. 5 u. 6, halte ich für ein Oberschenkelbein (os femoris) des linken Fusses und hat derselbe einige Aehnlichkeit mit dem gleichen Knochen eines anoplotherioiden (Pictet) Thieres, das in der Eocän-Stufe der Tertiärformation vorkommt.

Die Abbildung Fig. 5 zeigt die Seitenansicht des untern oder entfernten Endes des Knochens; die Abbildung Fig. 6 aber die Gelenkseite für die Schienbeine. Die Buchstaben *a*, *a'* und *b* erklären die Wechselbeziehungen der abgebildeten Theile.

Ich darf die unfehlbare Richtigkeit der Bestimmung des auf Taf. VI, Fig. 5 u. 6 abgebildeten Knochens nicht behaupten, denn mir fehlt die Möglichkeit einer genauen Verification desselben; ich will auch nicht darauf bestehn, dass er unbedingt der Fauna der Kreideperiode zuzuzählen ist, weil ich das Auffinden eines einzigen solchen Knochens im Kreidemergel für ungenügend halte und zwar um so mehr, als die Einsenkung desselben

in den aufgeweichten Mergel viel später erfolgen konnte, als die Ablagerung des letzteren und in Folge vollständig zufälliger Umstände.

Allgemeine Ergebnisse und Reflexionen.

Wenn man als die Hauptaufgabe der Palaeontologie die zoologischen Beziehungen, welche zwischen den fossilen Thieren bestanden, desgleichen aber auch die Untersuchung der Beziehungen zwischen den ausgestorbenen und den jetzt lebenden Thieren anerkennt, so muss diese Wissenschaft auch bestrebt sein, die Veränderungen in der Organisation, die sich in den langen Zeitperioden vollzogen, aufzuklären und das ist nur mit Hilfe von Vergleichung der contemporanen Thiere mit nicht mehr vorkommenden Thieren möglich. Dabei muss man sich jedoch unbedingt auch von der vergleichenden Physiologie und Embryologie leiten lassen.

Indem ich mich bemühte, so viele Data, als möglich, zur Erleichterung der Entscheidung derartiger Fragen, die beim Studium der Entstehung und Entwickelung organischer Wesen nothwendigerweise aufkommen, zu liefern, habe ich es für unerlässlich erachtet, die Möglichkeit zu benutzen, den mikroskopischen Bau der Knochengewebe von Exemplaren fossiler, in der vorliegenden Abhandlung beschriebener Reptilien zu untersuchen, und zwar um so mehr als alle Zähne und Knochen meiner Sammlung, wie mehrfach erwähnt, es durchaus ermöglichten, aus denselben Objecte für die mikroskopische Untersuchung des feinsten Baues von Geweben bei linearen Vergrösserungen von 10 bis 600 und mehr Mal der natürlichen Grösse anzufertigen; doch hängt dieses natürlich von den, nicht immer so günstigen, Bedingungen, unter denen die Gewebe versteinerten, ab.

Ich halte es für nothwendig, an den Leser die Bitte zu richten: eine besondere Aufmerksamkeit auf den Umstand zu verwenden, dass die histologischen Untersuchungen von Geweben jetzt lebender Wesen ganz andere Data darbieten, als diejenigen, welche beim Studium der Gewebe fossiler Thiere möglich sind. Und in der That wählt der Histologe, der z. B. den Verknöcherungsprocess im Knorpel studiren will, die dazu der Gattung und dem Alter nach passenden, ihm bereits bekannten Thiere aus, beginnt seine Beobachtungen von der allerersten Periode des embryonalen Lebens und gelangt bis zu dem Entwickelungsstadium, wo das Knochenskelet für schon vollständig ausgebildet gelten kann.

Auf den Antheil der Palaeontologen sind aber bekanntlich keine thierischen Fruchtkeime (foetus) gelangt, oder man verstand es wenigstens nicht, sie zu entdecken; die Möglichkeit ihrer Existenz in der fossilen Welt wurde jedoch nicht in Abrede gestellt, da wir bereits Abdrücke geflügelter Insecten im Stein kennen und man im Bernstein vollständige Exemplare derselben findet.

Uns sind weder das Alter der Individuen, deren Ueberreste wir in den Schichten der Erde finden, noch die Dimensionen bekannt, die Individuen einer Species in einem gewissen Alter erreichen mussten, noch auch die Grösse, die sie in vollkommen ausgewachsenem Zustande haben konnten. Unbekannt ist uns ferner der Grad der Verknöcherung, den die Knochen der von mir untersuchten Organismen zu erreichen im Stande waren.

Ohne Ausnahme alle von mir untersuchten Knochen von Reptilien aus dem Sewerischen Osteolith weisen mehr oder weniger knochenknorpelige Gewebe auf und das deutet vielleicht auf eine ihnen eigenthümliche Eigenschaft, die darin bestand, dass in diesen Knochen die Knorpelgewebe entweder sehr langsam — während des Verlaufs des ganzen, langdauernden Lebens dieser Thiere — oder wenigstens während der ganzen Dauer ihrer Wachsthumsperiode, die auch wieder sehr lange währen konnte, in Knochengewebe übergingen. Nach der Analogie mit den jetzt lebenden eidechsenartigen Thieren und den ungeheuerlichen Wassersäugethieren zu urtheilen, muss man annehmen, dass die von mir besprochenen ausgestorbenen Wasserthiere, die Saurier, eine sehr lange Wachsthumsperiode hatten, trotz der verhältnissmässig niederen Organisation. Man muss glauben, dass diese Thiere noch lange, nachdem alle ihre Theile schon vollständig ausgebildet waren, wuchsen, oder dass es ihren Knochen eigen war, während der ganzen Lebensdauer eine nicht vollständige Verknöcherung der Gewebe zu bewahren, etwa in der Weise, wie Skelette einiger contemporaner Fische stets knorpelig bleiben.

Auf Grund solcher Umstände ist es verständlich, dass man bei histologischen Untersuchungen fossiler Knochen nur die, sich dem beobachtenden Auge darbietenden Veränderungen der Gewebe wahrnehmen und nach den hervortretenden Merkmalen bei ihrer Vergleichung mit den histologisehen Untersuchungen jetzt lebender Organismen einen Schluss auf die eine, oder die andere, in ihnen noch bei Lebzeiten vorgegangene Veränderung ziehen kann. Daraus folgt, dass je mehr Beobachtungen, wie die meinige, gemacht und je mehr genaue Abbildungen solcher Veränderungen in den Knochengeweben gesammelt sein werden, desto leichter und bequemer werden auch solche auf Vergleichen beruhende Erwägungen werden und desto richtiger wird die Entwickelung und das Wachsthum der Knochen erklärt werden können und das ist deshalb um so wichtiger, weil der Antheil des Knorpels an der Entwickelung des Knochens noch bis auf den heutigen Tag zu wenig aufgeklärt ist. Daraus erhellt, dass es bei dem heutigen Zustande der Histologie der Knochengewebe den Palaeontologen noch schwer fällt, irgend eine der aufgestellten Theorien über die Entwickelung des Knochens aus dem Knorpel anzunehmen, obgleich diese Theorien von den Herren Uranossow und Stieda in ihren, im Jahre 1872 erschienenen Abhandlungen (Gregor Uranossow: «Materialien zur Lehre von der Entwickelung des Knochens aus dem Knorpel» und Ludwig Stieda: «Die Bildung des Knochengewebes») schon besprochen worden sind.

Das ist der Grund, weshalb ich weder Zeit, noch Mühe geschont habe, um zahlreiche Beobachtungen der oben erwähnten Art anzustellen und keine Kosten gescheut habe, um möglichst viele Abbildungen dieser Untersuchungen zu gewinnen.

Die geringe Anzahl mir bekannter Untersuchungen dieser Art war die Ursache äusserster Beschwerden, die ich sowohl bei der Anstellung der Beobachtungen selbst, als auch bei der Erklärung derselben erfahren habe.

Selbst die Nomenclatur, die von den Autoren zur Erklärung der von ihnen unter dem Mikroskop beobachteten Gewebe jetzt lebender Thiere angenommen wurde, kann bei der Beschreibung der Structur fossiler Gewebe nicht genügen und zwar in Folge des Zweifels, ob die Elemente solcher Gewebe, die dem Uebergange in Versteinerungen offenbar unzugänglich sind, sich im fossilen Zustande wirklich erhalten können.

Wenn solche Elemente auch nicht in den versteinerten Zustand übergehn konnten, so ist ihre Existenz nichts desto weniger so weit ausgesprochen, dass unter dem Mikroskop die Wechselbeziehungen ihrer Ueberreste in so befriedigendem Masse beobachtet werden, dass über die Möglichkeit der Darstellung derselben in Zeichnungen und der Vergleichung mit denjenigen Daten, die von den Histologen beim Studium der Gewebe jetzt lebender Thiere erlangt werden, nicht der geringste Zweifel mehr obwalten kann. Durch ein solches vergleichendes Verfahren kann man auch nur zu einer klaren Vorstellung über den Process der Entwickelung der Gewebe in fossilen Knochen und den Process der Umbildung des Knorpelgewebes in Knochenknorpelgewebe und in Knochengewebe gelangen und die Anwendung dieses controlirenden Verfahrens ist für den Palaeontologen um so nothwendiger als— wie ich wiederholt betont habe—nach der äusseren Form der Knochen allein, die Kennzeichen verschiedener Thiergattungen mit den ausschliesslich vom Alter der Thiere abhängenden Unterschieden vermischt werden können.

Noch lange bevor die ersten Versuche der Anwendung des Mikroskops zum Zweck der Erlernung des Ursprunges und der Entwickelung der Gewebe des thierischen Organismus überhaupt, gemacht waren, interessirte die Entwickelung des Knochens, schon von Hippokrates an, die Gelehrten. Von der Zeit an verschwand diese Frage bis auf den heutigen Tag nicht vom Schauplatz und bildete fortwährend einen Gegenstand von Untersuchungen.

Was aber das Studium der Histologie der Zähne und Knochen von Thieren der fossilen Welt anlangt, so wurde ein solches erst in den dreissiger Jahren unseres Jahrhunderts von dem berühmten Gelehrten, dem Professor R. Owen, begonnen und seine umfangreichen Arbeiten auf diesem Gebiet haben vielleicht das Nacheifern der gleichfalls berühmten Gelehrten L. Agassiz, unseres unvergesslichen C. H. Pander, E. J. Quecket und der wenigen englischen Gelehrten hervorgerufen, die in den fünfziger Jahren Antheil nahmen an der Zusammenstellung des so häufig von mir citirten «Descriptive and illustrated Catalogue of the histological series, contained in the museum of the Royal College of surgeons of England. Prepared for the microscope. Vol. I and II, Structure of the skeleton of vertebrate animals. London, 1850—1855».

Hiermit schliesse ich vorliegende Untersuchungen der fossilen Reptilien Russlands und des Sewerischen Osteoliths vorzugsweise.

Da wir aus den Ablagerungen des Grünsandes des mittleren Russlands gegenwärtig

schon hinreichend bestimmte Pflanzen, Mollusken, Fische und Amphibien besitzen, kann ich zur Erklärung der geologischen Bildung der vom Sewerischen Osteolith eingenommenen Gebiete schreiten.

Das wird einen besonderen Theil meiner Arbeit ausmachen und werde ich mich bemühen, in derselben die synchronistischen Beziehungen des Sewerischen Osteolith's zu den ihm, der Bildung nach, nahestehenden Ablagerungen, sowohl Russlands als anderer Gegenden Europas zu erklären.

Erklärung der Tafeln.

Die Originale befinden sich alle in der Sammlung W. A. Kiprijanoff's, gegenwärtig im Besitz der Akademie der Wissenschaften.

Tafel I.

Die Abbildungen sind in halber ($^1/_2$) natürlicher Grösse dargestellt.

Fig. 1*A*, *B* u. *C*. Bruchstück eines Zahnstücks des Unterkiefers (*Dentaire* Cuvier, *Dentary* Owen 32) vermuthlich von einem Thiere der Gattung *Polyptychodon* Owen. *A*, Ansicht der obern convexen Seite mit einem Theil einer Zahnhöhle *z*. *B*, Ansicht der innern concaven Seite. *C*, Ansicht des Querschnittes des Knochens am hintern Ende des Knochens.

Fig. 2. Bruchstück des obern Theiles des Hüftbeins (ileum), vermuthlich von einem Thiere der Gattung *Lütkesaurus*. *B*, Ansicht der innern oder concaven Seite, *n*, das obere, *m*, das untere Ende des Bruchstücks. *o*, die zum Kopf des Thieres, *p*, die zum Schwanz desselben gewandte Seite. *D*, Ansicht der zum Kopf gewandten Seite des Thieres. *C*, Querschnitt des Knochens am hintern Ende *m*.

Fig. 3*D*, * und ** Bruchstück des untern Endes eines ebenso grossen Hüftbeines (ileum), wie Fig. 2*B*, untere concave Seite. *D*, Profilansicht des Knochens. * und ** Querschnitte des Knochens an den auf der Zeichnung *B* mit denselben Sternchen angegebenen Stellen.

Tafel II.

Die Abbildungen sind in halber ($^1/_2$) natürlicher Grösse dargestellt.

Fig. 1*A* u. *D*. Bruchstück des untern Theiles des linken Sitzbeins (os ischii), wahrscheinlich von *Ichthyosaurus Campylodon* Carter? *A*, Ansicht der äussern Seite des Knochens. *B*, Ansicht im Profil der zum Schwanz des Thieres gekehrten Seite.

Fig. 2*B* u. *D*. Bruchstück eines Beckenknochens, vermuthlich des Schambeins (os pubis) und wahrscheinlich auch von einem *Ichthyosaurus Campylodon* Cart.? *B*, Ansicht der Breitseite des Knochens. *D*, Profilansicht.

Fig. 3*B* u. *D*. Ein ebensolcher Knochen eines ebensolchen Thieres, nur der andern Seite. *B* u. *D*, haben dieselbe Bedeutung wie bei Fig. 2.

Fig. 4. Bruchstück des Gelenkendes eines ebensolchen Knochens und von einem Thiere derselben Gattung. *B*, Ansicht der Breitseite des Knochens. *D*, Profilansicht. Mit dem Sternchen * ist der Querschnitt des Knochens in dem auf der Abbildung *B* mit demselben Zeichen angedeuteten Puncte bezeichnet.

Fig. 5. Längendurchschnitt des Oberschenkelbeins (femur) eines jungen Individuums der Gattung *Plesiosaurus neocomiensis* Cpch?

Fig. 6*A*, *B* u. *C*. Abbildungen der Structur des Knochengewebes aus dem untern Theil des Sitzbeins (os ischii) von *Ichthyosaurus Campylodon* Cart? (Taf. 2, Fig. 1). *A*, in der Längenrichtung bei $^{95}/_1$ facher lin. Vergr. *B*, im Querschnitt, gleichfalls bei $^{95}/_1$ facher lin. Vergr. *C*, stellt die, nach dem Präparat der Zeichnung *B* ausgeführte Structur des Knochengewebes im Querschnitt dar, jedoch bei $^{600}/_1$ facher Vergrösserung der natürlichen Grösse.

Fig. 7*A*, *B* *B'* u. *C* stellen die Knochengewebe von Bruchstücken der Beckenknochen (Fig. 2, 3 u. 4 dieser Tafel) eines vermuthlich jungen Individuums der Species *Ichthyosaurus Campylodon* Cart(?) dar. *A*, Ansicht des Knochengewebes in der Längenrichtung bei $^{95}/_1$ facher lin. Vergr. *B*, Ansicht des Querschnittes der Gewebe aus denselben Knochen im Puncte *n* (Fig. 2) bei $^{95}/_1$ facher lin. Vergr. *B'* ein ebensolcher Querschnitt durch die Knochengewebe, jedoch im Puncte *m* (Fig. 2) bei derselben lin. Vergr. *C*, stellt das Gewebe nach dem Präparat der Zeichnung *B'* bei $^{600}/_1$ facher lin. Vergr. dar.

Alle Präparate, die zur Herstellung der Zeichnungen *A*, *B*, *B'* u. *C* gedient haben, sind aus dem Taf. 2, Fig. 2*B* u. *D*, abgebildeten Knochen angefertigt.

Fig. 8*A*, *B* u. *C* stellen das Knochengewebe aus dem Fig. 4 dieser Tafel in der Längenrichtung der Gewebestructur abgebildeten Gelenkende des Schambeins (os pubis) von *Ichthyosaurus Campylodon* Cart. bei $^{95}/_1$ facher lin. Vergr. dar. Mit den Buchstaben *m*, *n* u. *ss* sind die Stellen der Gewebe und die sie trennende Linie in Uebereinstimmung mit der Andeutung auf Fig. 4 u. 5 bezeichnet. *B*, Ansicht der Gewebe im Querschnitt desselben Knochens bei $^{95}/_1$ facher lin. Vergr. *C*, Abbildung der Gewebe nach dem Präparate der Zeichnung *B*, jedoch bei $^{600}/_1$ facher lin. Vergr.

Tafel III.

Die Abbildungen sind in halber ($^1/_2$) natürlicher Grösse dargestellt.

Fig. 1. Ansicht eines Knochenbruchstücks von einem Individuum des indeterminirten fossilen Reptils — von der einen Seite.

Fig. 2. Ansicht desselben Knochens von der entgegengesetzten Seite.

Tafel IV.

Die Abbildungen sind in halber ($^1/_2$) natürlicher Grösse dargestellt.

(Ordng. *Crocodilina* Oppel, Gattg. *Poekilopleuron* M. Eudes-Deslongchamps, Spec. *Poekilopleuron Schmidti* n).

Fig. 1 u. 2. Der obere Theil der mittleren Rippen der linken Seite. *A*, Ansicht der hintern oder innern d. h. der zum Schwanz des Thieres gekehrten Seite. *B*, Ansicht der vorderen oder äussern,

d. h. der zum Kopf des Thieres gekehrten Seite. *C* Querschnitt im obern erweiterten Ende der Rippe.

Fig. 3. Der obere Theil der mittleren Rippe der rechten Seite. *A*, Ansicht der hinteren, *B* der vorderen Seite. *C*, Querschnitt durch den Rippenschaft.

Fig. 4. Oberarmbein (humerus) des linken Fusses. *A*, Ansicht von vorn, von der Kopfseite. *B*, Ansicht von hinten, von der Schwanzseite. *C*, Seitenansicht der äusseren Seite. Die Sternchen ⁎ und ⁎⁎ bezeichnen die Querschnitte in den auf den vorhergehenden Abbildungen mit denselben Zeichen angegebenen Puncten.

Fig. 5*A*, *B* u. *C* stellen die mikroskopische Untersuchung der Knochengewebe der Rippen Fig. 1, 2 u. 3. dieser Tafel dar. Die Abbildungen *A* u. *B*, zeigen die Gewebe in der Längen- und in der Querrichtung bei $^{95}/_1$ facher lin. Vergr.; die Abbildung *C* veranschaulicht die Structur der Gewebe im Querschnitt bei $^{600}/_1$ facher lin. Vergr. Diese letzte Zeichnung ist nach dem Präparat der Zeichnung *B* angefertigt.

Tafel V.

Mikroskopische Untersuchung der Knochengewebe.

Fig. 1. Gewebe aus dem auf Taf. I, Fig. 1, dargestellten Zahnstück des Unterkiefers (dentary 32) von *Polyptychodon* Ow.(?) *A* in der Längen-, *B* in der Querrichtung bei $^{95}/_1$ facher lin. Vergr. *C*, Abbildung aus dem Präparat *B*, jedoch bei $^{600}/_1$ facher lin. Vergr.

Fig. 2. Gewebe aus dem auf Taf. I, Fig. 3, abgebildeten Bruchstück des untern Endes des Hüftbeins (os ilei) der linken Seite eines *Lütkesaurus* m. *A* stellt die Knochengewebe im Längendurchschnitt, *B* im Querschnitt bei $^{95}/_1$ facher lin. Vergr. dar; die Abbildung *C* ist nach dem Präparat der Zeichnung *B* angefertigt und stellt den Querschnitt der Gewebe bei $^{600}/_1$ facher lin. Vergr. dar.

Fig. 3. Gewebe aus dem auf Taf. III abgebildeten Knochenbruchstück eines indeterminirten fossilen Reptils. *A* stellt die Knochengewebe im Längendurchschnitt, *B* im Querschnitt bei $^{95}/_1$ facher lin. Verg. dar. *C*, Abbildung nach dem Präparate *B* bei $^{600}/_1$ facher lin. Vergr.

Fig. 4. Gewebe aus dem auf Taf. IV, Fig. 4 abgebildeten Bruchstück des Oberarmbeins (humerus) des linken Fusses von *Poekilopleuron Schmidti* n. Die Abbildungen *A*, *A'*, *A''*, *B* u. *B'* zeigen die Structur der Gewebe bei $^{95}/_1$ facher lin. Vergr., die Abbildungen *A''* u. *B''* bei $^{600}/_1$ facher lin. Vergr. Die Zeichnung *A''* ist nach dem Präparat *A*, die Zeichnung *B''* nach dem Präparat *B'* angefertigt. Auf Taf. IV, Fig. 4 sind mit den Buchstaben *m* u. *n* die Stellen bezeichnet, an denen aus dem Knochen die Objecte *A* u. *A'* (*n*) u. *A''* (*m*), *B* (*n*) u. *B'* (*m*) herausgesägt wurden.

Tafel VI.

Die Abbildungen 1—3 sind in halber ($^1/_2$) natürl. Grösse dargestellt, 4—7 in $^1/_3$ der natürl. Grösse.

Fig. 1*A* u. *B*, bilden die schmale und die breite Seite des oberen oder näheren Endes eines Mittelfussknochens (os metatarsi) des rechten Hinterfusses eines crocodilartigen Thieres.

Fig. 2. Die obere Gelenkseite desselben Knochens.

Fig. 3. Querschnitt durch den Körper am Ende des Bruchstücks desselben Knochens.

Fig. 4*A*, *B*, *C*, *D* u. *E*, stellen den untern Theil des Körpers des Oberarmbeins (humerus) von einem Thiere, das vielleicht derselben Gattung angehörte, wie das englische aus Hyth, dar.

Fig. 5 u. 6. Oberschenkelbein (os femoris) des linken Fusses; dasselbe hat Aehnlichkeit von einem anoplotherioiden (Pictet) Thiere der Eocän-Stufe in Frankreich. Die erste Zeichnung zeigt die Seitenansicht des untern oder entfernten Knochenendes, die zweite stellt die Gelenkseite oder den Gelenkhügel dieses Knochens für die Schienbeinknochen dar. Die Buchstaben *a*, *a'* und *b*, *b'* erklären die Wechselbeziehungen der abgebildeten Zeichnungen.

Fig. 7, stellt ein Bruchstück des untern oder entfernten Endes eines Schienbeinknochens (tibia) dar, das dem von G. Cuvier, Tom. X, Pl. 249, Fig. 34 u. 35 vorgeführten sehr ähnlich ist.

Anmerkung. Die Versteinerungen Fig. 4—7 wurden im Kursker Kreise des Gouvernement gleichen Namens, in der Nähe des Dorfes Mieschkowo, am rechten Ufer des Flüsschens Tuskari, das in den Sseim—einen Zufluss des Dniepr mündet, in einer Sandmergelschicht gefunden. Dieser *Sand-* oder *Kalk-* oder *Kreide-Mergel* ist bei den Bewohnern jener Gegenden unter dem Namen *Ssurka* bekannt und liegt unmittelbar dem *Sewerischen Osteolith* auf; man muss die *Ssurka* als eine zur Formation unseres Grünsandes gehörende Ablagerung betrachten.

Tafel VII.

Mikroskopische Untersuchung der Knochengewebe.

Fig. 1. Gewebe aus dem auf Taf. VI, Fig. 1, 2 u. 3 abgebildeten Bruchstück des obern Endes eines Mittelfuss- (Metatarsal-) Knochens des rechten Fusses. *A*, in der Längen-, *B* in der Querrichtung bei $^{95}/_{1}$ facher lin. Vergr. *C* zeigt die Structur der Gewebe bei $^{600}/_{1}$ facher lin. Vergr. nach dem Object der Zeichnung *B* im Querschnitt der Gewebe.

Fig. 2. Gewebe aus dem auf Taf. VI, Fig. 4, abgebildeten Bruchstück eines Oberarmbeins (humerus) von einem Thiere, das vielleicht derselben Gattung angehört hat, wie das englische aus Hyth. Die Abbildung *A* zeigt den Bau der Gewebe in der Längen-, *B* in der Querrichtung bei $^{95}/_{1}$ facher lin. Vergr. Die Abbildung *C* ist nach demselben Object angefertigt, wie die Abbildung *B*, jedoch bei $^{600}/_{1}$ facher lin. Vergr.

Fig. 3. Gewebe aus dem Ellenbogenbein (Ulna, Cubitus) eines fossilen Ochsen (Bos primigenius). Die Abbildungen *A* u. *B* stellen den Bau der Gewebe bei $^{95}/_{1}$ facher lin. Vergr. dar. *A* zeigt den Bau der Gewebe (wie oben) in der Längen-, *B* in der Querrichtung. *C* ist nach demselben Object angefertigt, wie *B*, jedoch bei $^{600}/_{1}$ facher lin. Vergr.

Fig. 4. Gewebe aus dem Körper des Oberschenkelbeins (femur) von *Testudo Horsfieldi*. Die Abbildungen *A*, *B* u. *C* stellen den Bau der Gewebe unter denselben Bedingungen, wie oben (Fig. 3), dar.

A. 1 (½) B.

z

B.

* ** 3 (½)

C.

C.

**

B. m. 2 (½)

D.

p

o.

D.

n.

Рис. съ нат. В. Ачуевъ. Лит. Н. Ивановой, Петерб. ст. 6 пр. С. П. Б.

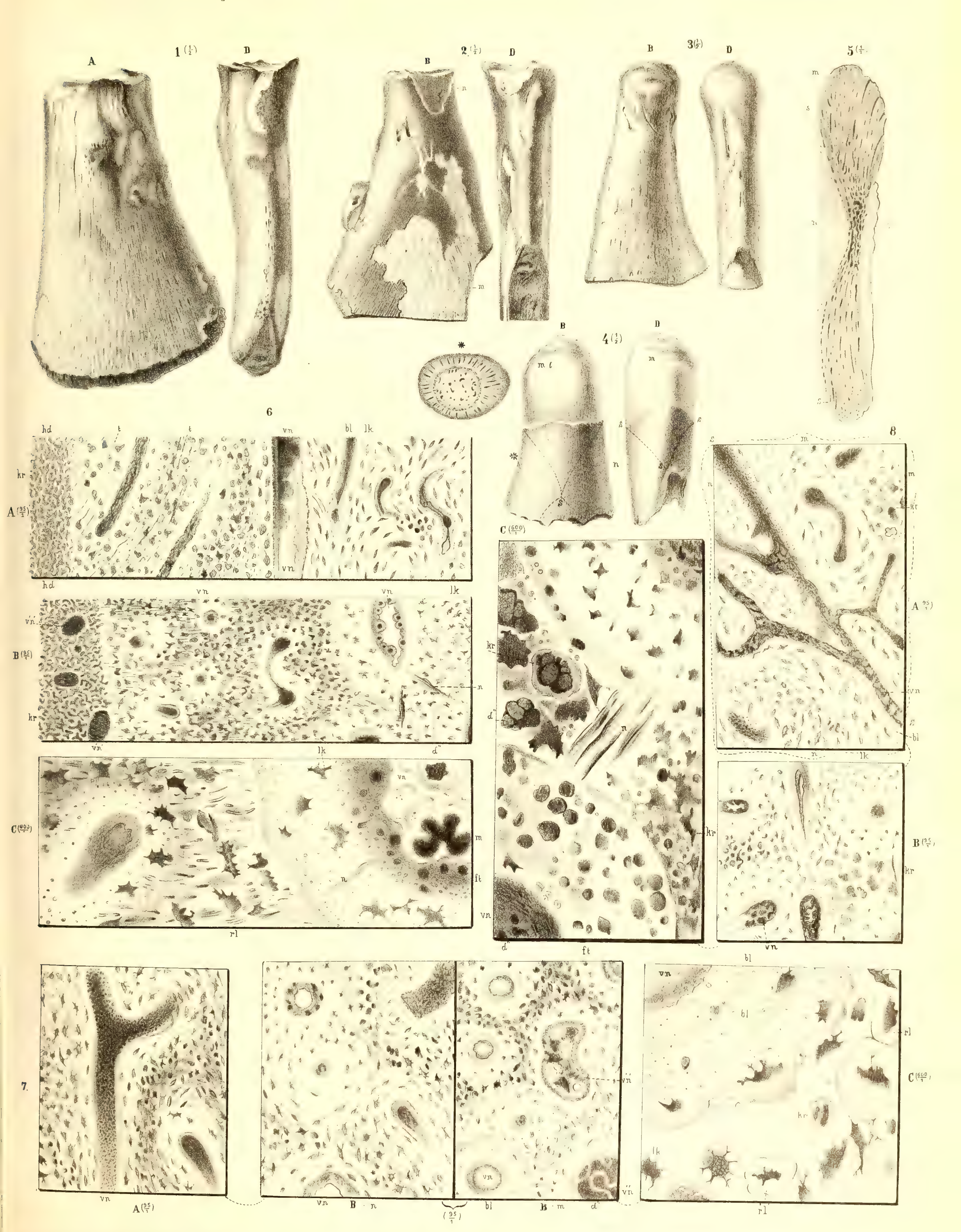


Рис. съ нат. и въ лупу В. Ачуевъ.

Лит. Ивансонъ петерб. ст. 8. лр. №1



Рис. съ нат. В. Ачуевъ. Лит. Ш. Ивансонъ. петерб. ст. б. просп. №1 С. П. Б.

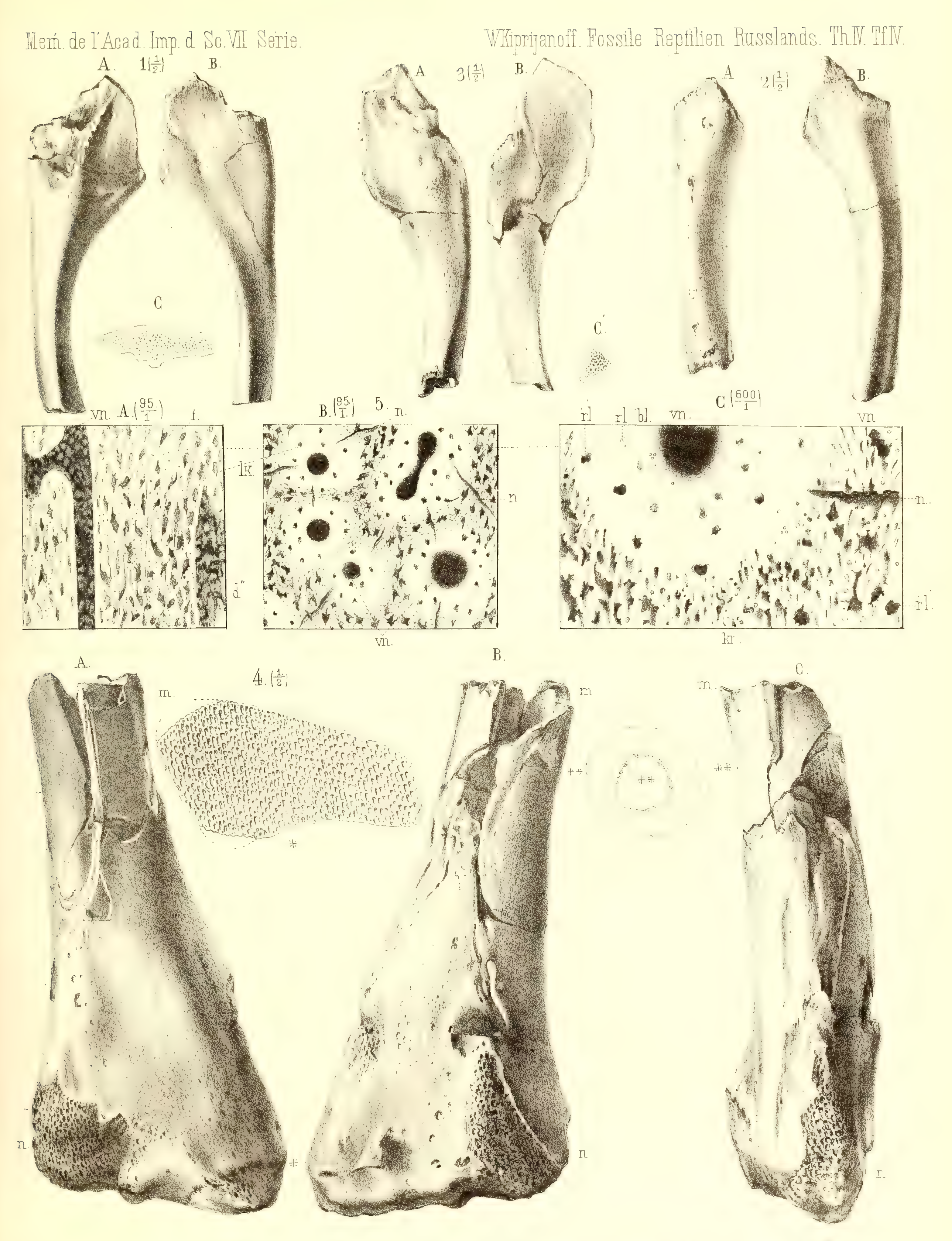


Рис. съ нат. и въ микроскопъ В. Ачуевъ

Лит. Ш. Ивансонъ. петерб. ст. б. просп. № . С. П. Б.

Рис. съ микроск. В. Ачуевъ.

Лит. Ш. Ивансонъ, Г

A 4. (1/3)

B.

A. 1 (1/2) B 3 (1/2)

2 (1/2)

1' 7½'''

E (1/1)

C. 5" 2''' 8" 1'''

D. 5" 7''' 3" 9'''

5. (1/3)

7" 7'''

6. (1/3) 8" b'

a' b

4" 6½''' a 10"

15"

7. (1/3)

10" 5'''

b' a a'

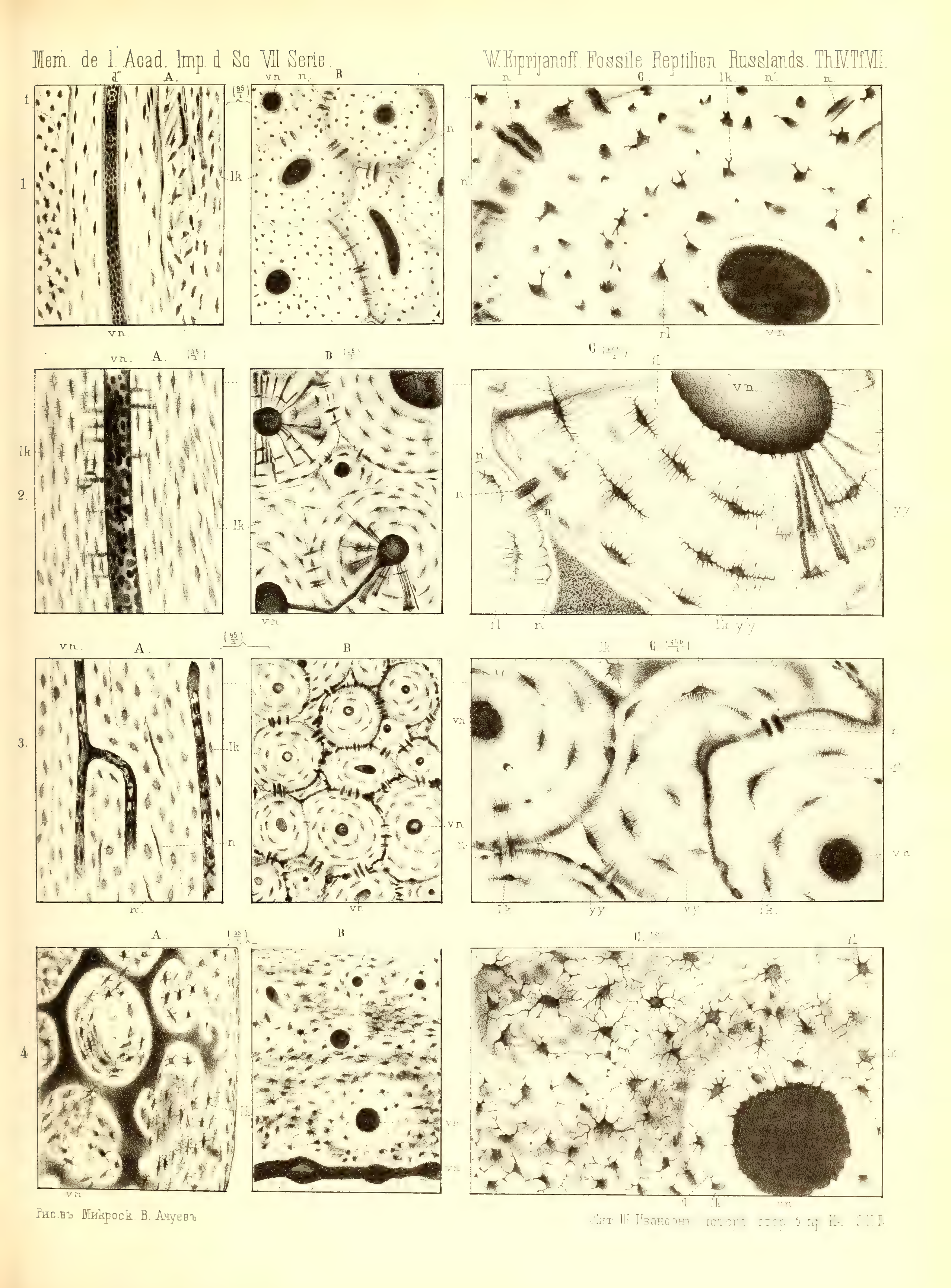


Рис. въ Микроск. В. Ачуевъ

Ouvrages paléontologiques publiés dans la VII. Série des Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences.

T. VI, № 2. **Volborth, A. v.** Ueber die mit glatten Rumpfgliedern versehenen russischen Trilobiten, nebst einem Anhange über die Bewegungsorgane und über das Herz derselben. 1863. Mit 4 lith. Taf. Pr. 80 K. = 2 Mk. 70 Pf.

T. VIII, № 9. **Volborth, A. v.** Ueber einige neue Ehstländische Illaenen. 1864. Mit 2 lith. Taf. Pr. 35 K. = 1 Mk. 20 Pf.

T. XVI, № 2. **Volborth, A. v.** Ueber Achradocystites und Cystoblastus, zwei neue Crinoideen-Gattungen, eingeleitet durch kritische Betrachtungen über die Organe der Cystideen. 1870. Mit 1 lith. Taf. Pr. 30 K. = 1 Mk.

№ 11. **Brandt, A.** Ueber fossile Medusen. 1871. Mit 2 Taf. Pr. 45 K. = 1 Mk. 50 Pf.

T. XIX, № 3. **Schmidt, F.** Ueber die Petrefacten der Kreideformation von der Insel Sachalin. 1873. Mit 8 Taf. Abbildungen. Pr. 1 R. 10 K. = 3 Mk. 70 Pf.

T. XXI, № 2. **Schmidt, F.** Miscellanea Silurica. I. Ueber die russischen silurischen Leperditien, mit Hinzuziehung einiger Arten aus den Nachbarländern. 1873. Mit 1 Taf. Pr. 35 K. = 1 Mk. 20 Pf.

№ 11. **Schmidt, F.** Miscellanea Silurica. II. Ueber einige neue und wenig bekannte baltisch-silurische Petrefacten. 1874. Mit 4 Taf. Abbildungen. Pr. 80 K. = 2 Mk. 70 Pf.

T. XXII, № 12. **Heer, O.** Beiträge zur Jura-Flora Ostsibiriens und des Amurlandes. 1876. Mit 31 Taf. Pr. 5 R. 50 K. = 18 Mk. 30 Pf.

T. XXIV, № 8. **Pahlen, A. v. d.** Monographie der baltisch-silurischen Arten der Brachiopoden-Gattung Orthisina. 1877. Avec 4 pl. Pr. 80 K. = 2 Mk. 70 Pf.

T. XXV, № 6. **Heer, O.** Beiträge zur fossilen Flora Sibiriens und des Amurlandes. 1878. Avec 15 pl. Pr. 3 R. 20 K. = 10 Mk. 70 Pf.

№ 7. **Heer, O.** Primitiae florae fossilis Sachalinensis.—Miocäne Flora der Insel Sachalin. 1878. Avec 15 pl. Pr. 3 R. 20 K. = 10 Mk. 70 Pf.

№ 9. **Möller, V. v.** Die spiral-gewundenen Foraminiferen des russischen Kohlenkalks. 1878. Avec 15 pl. Pr. 2 R. 50 K. = 8 Mk. 30 Pf.

T. XXVII, № 4. **Schmalhausen, J.** Beiträge zur Jura-Flora Russlands. 1879. Avec 16 pl. Pr. 2 R. 20 K. = 7 Mk. 30 Pf.

№ 5. **Möller, V. v.** Die Foraminiferen des russischen Kohlenkalks. 1879. Avec 7 pl. Pr. 1 R. 70 K. = 5 Mk. 70 Pf.

№ 10. **Heer, Prof. Dr. Osw.** Nachträge zur Jura-Flora Sibiriens gegründet auf die von Herrn Richard Maak in Ust-Balei gesammelten Pflanzen. 1880. Mit 9 Tafeln. Pr. 1 R. 30 K. = 4 Mk. 30 Pf.

T. XXVIII, № 5. **Nikitin S.** Die Jura-Ablagerungen zwischen Rybinsk, Mologa und Myschkin an der oberen Wolga. 1881. Mit 7 Tafeln. Pr. 1 R. 40 K. = 4 Mk. 70 Pf.

№ 8. **Kiprijanoff, W.** Studien über die fossilen Reptilien Russlands. I. Theil. Gattung Ichthyosaurus König aus dem Severischen Sandstein oder Osteolith der Kreide-Gruppe. 1881. Mit 19 Tafeln. Pr. 2 R. 45 K. = 8 Mk. 20 Pf.

T. XXX, № 1. **Schmidt, F.** Revision der ostbaltischen silurischen Trilobiten nebst geognostischer Uebersicht des ostbaltischen Silurgebiets. Abtheilung I. Phacopiden, Cheiruriden und Encrinuriden. 1881. Mit 16 Tafeln. Pr. 4 R. 50 K. = 15 Mk.

№ 6. **Kiprijanoff, W.** Studien über die fossilen Reptilien Russlands. II. Theil. Gattung Plesiosaurus Conybeare aus dem Severischen Sandstein oder Osteolith der Kreide-Gruppe. 1882. Mit 19 Tafeln. Pr. 2 R. = 6 Mk. 70 Pf.

T. XXXI, № 5. **Schmidt, Fr.** Miscellanea Silurica. III. I. Nachtrag zur Monographie der russischen silurischen Leperditien. II. Die Crustaceenfauna der Eurypterenschichten von Rootziküll auf Oesel. 1883. Mit 9 Tafeln. Pr. 2 R. = 6 Mk. 70 Pf.

№ 6. **Kiprijanoff, W.** Studien über die fossilen Reptilien Russlands. III. Theil. Gruppe Thaumatosauria N. aus der Kreide-Formation und dem Moskauer Jura. 1883. Mit 21 Tafeln. Pr. 2 R. 25 K. = 7 Mk. 50 Pf.

Imprimé par ordre de l'Académie Impériale des sciences. Juin, 1883. C. Vessélofsky, Secrétaire perpétuel.

Imprimerie de l'Académie Impériale des sciences. (Vass.-Ostr., 9e ligne, № 12.)

MÉMOIRES
DE
L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES DE ST.-PÉTERSBOURG, VIIE SÉRIE.
TOME XXXI, N° 8.

DIE KREISFÖRMIGE NUTATION

UND

DAS WINDEN DER STENGEL.

VON

Prof. Dr. **J. Baranetzki.**

(*Lu le 26 avril 1883.*)

ST.-PÉTERSBOURG, 1883.

Commissionnaires de l'Académie Impériale des sciences:

à St.-Pétersbourg:	à Riga:	à Leipzig:
MM. Eggers et Cie et J. Glasounof;	M. N. Kymmel;	Voss' Sortiment (G. Haessel).

Prix: 60 Kop. = 2 Mark.

MÉMOIRES
DE
L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES DE ST.-PÉTERSBOURG, VIIE SÉRIE.
Tome XXXI, N° 8.

DIE KREISFÖRMIGE NUTATION

UND

DAS WINDEN DER STENGEL.

VON

Prof. Dr. **J. Baranetzki.**

(Lu le 26 avril 1883.)

ST.-PÉTERSBOURG, 1883.
Commissionnaires de l'Académie Impériale des sciences:

à St.-Pétersbourg:	à Riga:	à Leipzig:
MM. Eggers et Cie et J. Glasounof;	M. N. Kymmel;	Voss' Sortiment (G. Haessel).

Prix: 60 Kop. = 2 Mark.

Imprimé par ordre de l'Académie Impériale des sciences.
Juillet, 1883. C. Vessélofsky, Secrétaire perpétuel.

Imprimerie de l'Académie Impériale des sciences.
(Vass.-Ostr., 9 ligne, № 12.)

Die Frage — wie und warum das Winden der Stengel zu Stande kommt, wurde schon vielfach discutirt. Von Palm, H. v. Mohl, Dutrochet, Ch. Darwin, Hugo de Vries und zuletzt von Schwendener wurde dieselbe zum Gegenstande einer eingehenden Untersuchung gemacht. Bei der Mehrzahl der genannten Forscher ging die Antwort dahin aus, dass es die kreisförmige Nutation der Spitze windungsfähiger Stengel ist, welche das Winden derselben um die Stützen vermittelt und bedingt und diese Thatsache allein darf als festgestellt betrachtet werden. Was aber die mechanische Seite des Vorgangs im einzelnen betrifft, die Art und Weise selbst wie die kreisförmige Nutation zur Entstehung der dauernden Windungen führt, so gehen hier die Vorstellungen einzelner Beobachter schon so weit auseinander, dsss man die Frage immer noch als offen betrachten muss. — Wenn das Umwinden der Stütze auch von einer kreisförmigen Nutation begleitet wird, so ist doch in der That nicht mehr ohne Weiteres zu ersehen, in welcher Weise diese Nutation hier erfolgen wird. Denkt man sich eine in horizontaler Lage nutirende Stengelspitze, welche durch eine auf ihrem Wege gestellte Stütze in ihrer fortschreitenden Bewegung aufgehalten wird, so wird weiterhin die Nutation nur in dem freien, ausserhalb der Stütze befindlichen Theile der Spitze noch fortdauern können. Diese Nutation kann aber jetzt a priori in zweierlei Weise gedacht werden: entweder nutirt dieser freie Theil in horizontaler Ebene weiter fort, seine Stütze direct umwindend, oder die freie Spitze bewegt sich jetzt um den horizontalen, der Stütze unbeweglich anliegenden Stengeltheil in derselben Weise im Kreise herum, wie sie früher um den aufrechten Stengel nutirte, wodurch die Bewegungsebene eine verticale Stellung erhalten würde. Ob eine von diesen Möglichkeiten wirklich zutrifft oder wie sich die Sache bei den betreffenden Umständen überhaupt verhalten muss — wurde von den Beobachtern nicht näher untersucht, während die einzelnen von ihnen stillschweigend bald die erstere, bald die letztere von den oben aufgestellten Möglichkeiten angenommen haben. Eine genaue, fortgesetzte Beobachtung der windenden Stengelspitze zeigt aber, dass die Bewegungen, welche dieselbe ausführt, weder durch die eine noch durch die andere der obigen Eventualitäten sich ohne Weiteres erklären lassen. Solche Beobachtungen führen

vielmehr zu dem Schlusse, dass noch manche andere organische oder mechanische Verhältnisse dabei maassgebend eingreifen müssen. Dass aber eine befriedigende Lösung des Problems keine einfache Aufgabe sein darf, muss schon aus der Zahl der zum Theil ganz hervorragenden wissenschaftlichen Kräfte geschlossen werden, welche sich daran betheiligten, nicht etwa um gewisse specielle Fragen zu bearbeiten, sondern um sich jedesmal eine und dieselbe ganz allgemeine Frage zu stellen, — wie kommt das Winden der Stengel zu Stande? Der Grund davon liegt zum Theil in der Natur selbst der zu verfolgenden Erscheinung. Im Weiteren werden wir sehen, dass das Winden nur zum kleineren Theile durch die mechanischen Verhältnisse, hauptsächlich aber durch gewisse organische Eigenschaften der windungsfähigen Stengelspitze bestimmt wird. Diese Eigenschaften müssen zuerst einzeln genau studirt werden. Ohne solches vorhergehende Studium, aus der blossen Beobachtung der windenden Stengel, ist es auch kaum möglich, den Vorgang im einzelnen richtig zu verstehen. —

In der hier folgenden Uebersicht der vorhandenen Litteratur werde ich mich zunächst wesentlich auf die Angaben beschränken, insofern dieselben auf die Ursachen des Windens im Ganzen sich direct beziehen, denn die Litteratur der einzelnen speciellen Fragen muss bei der Discussion dieser Fragen selbst genauer berücksichtigt werden. —

Die ersten wissenschaftlichen Untersuchungen über das Winden der Pflanzenstengel datiren seit der Entdeckung der kreisförmigen Nutation der freien Stengelspitze, — einer Entdeckung, welche von Palm und H. v. Mohl gleichzeitig gemacht wurde. L. Palm[1]) hat sich über die Natur und die Mechanik dieser Bewegung (welche er als «Bewegung um die Stütze» bezeichnet) nicht näher ausgesprochen, wenn auch ihr Zusammenhang mit der Wachsthumsfähigkeit der Stengel ihm nicht entgangen ist (l. c. S. 17—18.) Das Winden selbst solcher Stengel betrachtete Palm als eine unmittelbare Folge ihrer Nutation oder vielmehr als einfache Fortsetzung der kreisförmigen Bewegung um die Stütze herum. Diese Vorstellung scheint aber mehr aus einer naheliegenden theoretischen Betrachtung gewonnen worden, denn es wurde nicht versucht die Bewegungen, welche die Spitze eines windenden Stengels durchmacht, genauer zu verfolgen und mit der angegebenen Vorstellung zu vereinigen. Noch weniger klar wird der Vorgang in der Darstellung von Palm dadurch, dass der Angabe des genannten Autors zufolge, die Bewegungen einer windenden Stengelspitze im hohen Grade durch das Licht beeinflusst werden: eine solche Stengelspitze soll nämlich während des Tages wesentlich nur dem Laufe der Sonne folgend, also von Osten nach Westen sich bewegen können. Durch diesen letzteren Umstand wird von Palm die Thatsache erklärt, dass während eine freie Stengelspitze im Laufe von 24 Stunden 6—8 Nutationskreise beschreibt, so ist sie in derselben Zeit im Stande, nur einen Umlauf der Spirale um die Stütze zu bilden (l. c. S. 68—70).

---

1) L. W. Palm. Ueber das Winden der Pflanzen. Stuttgart. 1827.

Hugo v. Mohl[1]) hat ebenfalls eine kreisförmige Bewegung der freien Stengelspitze als eine allen Schlingpflanzen zukommende Eigenschaft erkannt. Er beobachtete aber zugleich, dass ältere Internodien solcher Stengel (falls sie nicht eine Stütze umwunden haben) eine Torsion erhalten, welche mit der Richtung der Nutationsbewegung immer gleichläufig ist. Diese letztere Beobachtung hat H. v. Mohl zu einer ganz falschen Vorstellung über die Natur der kreisförmigen Bewegung der Spitze geführt, welche Bewegung er als eine passive, durch die Drehung der älteren Stengelinternodien verursacht, betrachtete. Die Thatsache, dass die Zahl der Torsionsumgänge keineswegs mit der Zahl der von der Spitze umschriebenen Kreise zusammenfällt, ist dem genannten Forscher nicht aufgefallen. Bei den Stengeln, welche eine Stütze umwunden haben, hat H. v. Mohl keine Torsion beobachtet und von seiner ersten Vorstellung ausgehend, hat er nun logisch weiter geschlossen, dass dabei auch keine kreisförmige Bewegung der Spitze stattfinden konnte und dass folglich diese Bewegung auch nicht als Ursache des Windens zu betrachten sei. Einen directen Beweis für die Richtigkeit dieser letzteren Meinung glaubte H. v. Mohl in der Beobachtung der Ranken-tragenden Pflanzen zu finden, welche mit ihren Spitzen ähnliche Bewegungen ausführen, ohne doch eine Stütze umwinden zu können (l. c. S. 111—112). Als die Ursache des Windens erklärte H. v. Mohl die Reizbarkeit der windungsfähigen Stengel, — eine Auffassung, welche durch keine Thatsachen bewiesen, wesentlich nur auf der äusseren Aehnlichkeit der Erscheinung mit dem Umschlingen der Ranken begründet und durch spätere Untersuchungen auch widerlegt wurde. —

Dutrochet waren die Arbeiten seiner Vorgänger nicht bekannt. An *Pisum sativum* beobachtete er die kreisförmige Bewegung der Stengelspitze und eine ähnliche Bewegung an den jungen Ranken (was H. v. Mohl scheinbar unbekannt geblieben ist) von *Pisum*, *Bryonia*, *Cucumis* und beschrieb ausführlich den Gang der Erscheinung und ihre Abhängigkeit vom Lichte und von der Temperatur[2]). Ueber die Mechanik dieser Bewegung hat sich Dutrochet erst in einer späteren Abhandlung[3]) ausgesprochen. Man findet hier wenigstens eine Stelle, aus welcher zu schliessen ist, dass die Natur der kreisförmigen Bewegung von Dutrochet zuerst richtig verstanden wurde; l. c. S. 157 heisst es: «....dans le mouvement révolutif on observe un état passager des courbures successives qui opèrent la révolution, laquelle a lieu dans une courbe fermée....». Die Betrachtung der Erscheinung führte Dutrochet auf den Gedanken, es möge das Winden der Pflanzenstengel auf die Stützen, welches im Grunde ebenfalls eine kreisförmige Bewegung vorstellt, — auf derselben Ursache beruhen. In der That fand Dutrochet bei allen von ihm beobachteten Schlingpflanzen die freie Stengelspitze im Kreise sich bewegen. Den Zusammenhang des Windens mit der Nutation hat aber Dutrochet in einer anderen Weise als jeder seiner Vorgänger aufge-

1) Hugo v. Mohl. Ueber den Bau und das Winden der Ranken und Schlingpflanzen. Tübingen. 1827.

2) Annales des sc. natur. 2-me sér. T. XX, p. 316.

3) Annales des sc. natur. 3-me sér. T. II, p. 156.

fasst. Er meinte: die Neigung sich successive nach allen Richtungen zu krümmen, ist eine diesen Pflanzen selbstständig zukommende Eigenschaft; das Winden selbst kommt zu Stande, wenn diese successiven Krümmungen dauernd werden, — wodurch eine Spirale entstehen muss. Die Anlage zur Bildung einer Spirale sei in den Schlingpflanzen organisch gegeben, indem diejenige Seite des Stengels, welche zur Aussenseite der Spirale werden soll, stärker wachsthumsfähig ist, — was oft an der Bildung einer Spirale an freien Stengeln sich zu erkennen giebt (zweite Abhandlung, S. 165—166). Als eine unmittelbare Folge davon müsste es offenbar sein, dass nicht jede beliebige sondern jedesmal nur eine bestimmte Stengelseite zur Innenseite der Spirale werden kann, — was aber von Dutrochet nicht eingesehen, wenigstens nicht geprüft wurde. — War die Auffassung von Palm eine rein mechanische, so war im Gegentheil die Vorstellung von Dutrochet eine rein physiologische. Der Einfluss der Stütze auf das Zustandekommen der Windungen ist nach Dutrochet nur insofern von Bedeutung, als die der Stütze zugewendete Stengelseite der Einwirkung der äusseren Agentien entzogen und dadurch die natürliche Anlage des Stengels nur begünstigt wird.

Nachdem von Dutrochet seine offenbar richtige Vorstellung von der Natur und der Mechanik der kreisförmigen Bewegung der Spitze nur in einem kurzen Satze ausgesprochen und wenig anschaulich gemacht wurde, blieb es Ch. Darwin das Verdienst vorbehalten, die richtige Deutung des betreffenden Vorgangs zu einer anerkannten wissenschaftlichen Thatsache zu machen. Darwin zeigte[1]), dass in dem Maasse als eine nutirende Stengelspitze einen Kreis beschreibt, wird sie zugleich um ihre Axe umgedreht, so dass successive immer eine andere Stengelkante zur convexen Seite der Krümmung wird. Da eine einfache Krümmung der Spitze durch ungleiche Länge der convexen und concaven Seite derselben bedingt wird, so kommt also die kreisförmige Bewegung dadurch zu Stande, dass die Verlängerung oder Verkürzung (Darwin meinte eben Verkürzung, — Journ. of the Linnean Soc.) einer Seite in einer bestimmten Richtung successive immer auf die andere Stengelkante übergeht. Dadurch wurde die oben angeführte Vorstellung von H. v. Mohl über die Ursache der kreisförmigen Nutation beseitigt. Die Unrichtigkeit dieser Vorstellung demonstrirte Ch. Darwin unmittelbar, indem er zeigte, dass die Zahl der Torsionsumgänge der älteren Stengeltheile immer viel geringer ist, als die Zahl der von der Spitze umschriebenen Kreise, ja bei manchen Rankenpflanzen, deren Spitzen energisch nutiren, an den Stengeln auch überhaupt keine Torsion zu bemerken ist (S. 6). Die weitere Angabe H. v. Mohl's es sei die Reizung der Stengelspitze durch die sie berührende Stütze als die Ursache des Windens zu betrachten, widerlegte Darwin ebenfalls durch Versuche, welche ergaben, dass eine Reizbarkeit der windungsfähigen Stengel thatsächlich nicht bewiesen werden kann und die Be-

1) Journ. of the Linn. Soc. Vol. LX (1865) und — als eine neue Auflage derselben Schrift — Die Bewegungen und Lebensweise der kletternden Pflanzen. Uebersetzt von V. Carus. Stuttgart. 1876. Obgleich diese neue Auflage später erschien als die noch zu besprechende Arbeit von Hugo de Vries, so enthält sie doch im Vergleich mit seinem ursprünglichen Text keine wesentlichen Abänderungen, weshalb ich mich im Folgenden auf die letztcitirte Schrift berufen werde.

rührung mit harten Gegenständen ruft hier keineswegs derartige Krümmungen hervor, wie sie bei wirklich reizbaren Ranken dabei eintreten. Darwin selbst kehrt zu der Auffassungsweise Palm's zurück und sieht die Ursache des Windens in der fortgesetzten Nutation des freien Endes einer durch die Stütze aufgehaltenen Stengelspitze: «Wenn ein Mensch ein Seil rund über dem Kopfe schwingt und das Ende trifft eine Stange, so wickelt es sich um dieselbe in Uebereinstimmung mit der schwingenden Bewegung» (deutsch, S. 12). Durch diese bildliche Vergleichung ist die Auffassungsweise klar dargelegt: Darwin dachte sich also das freie Ende einer durch die Stütze aufgehaltenen Stengelspitze ihre Nutation in der früheren Weise fortsetzen, die Bewegungsebene somit nach wie vor horizontal bleiben. Ebenso wie Palm ist auch Ch. Darwin die Thatsache nicht entgangen, dass die freie Nutation immer viel rascher fortschreitet als das Umschlingen der Stütze und diese Erscheinung glaubte Darwin dem Einflusse der mechanischen Störungen zuzuschreiben, welche bei dem Umwinden der Stütze die normale Schnelligkeit der Nutation beeinträchtigen (S. 13—14 und S. 31).

Nach Darwin wurde die Erscheinung des Windens von Seiten Hugo de Vries zum Gegenstande einer eingehenderen Untersuchung gemacht[1]). Dieser Autor bestätigte die Angaben von Darwin die Mechanik der kreisförmigen Nutation betreffend, sowie die Beobachtungen desselben Forschers über die Nichtreizbarkeit der windungsfähigen Stengel. Vries erkannte aber, dass die von Darwin gegebene Erklärung der Mechanik des Windens in dieser einfachen Form nicht hinreicht, um die wirklich stattfindenden Bewegungen einer windenden Stengelspitze im einzelnen klar zu machen und versuchte den Verlauf des Vorgangs und seine einzelnen Momente genauer zu analysiren. Die Beobachtungen von Hugo de Vries zeigten ihm Folgendes: «Wird an einem rotirend nutirenden Sprossgipfel einer Schlingpflanze eine Stelle des überhängenden Theils, z. B. der höchste Punkt des Bogens durch irgend welche Ursache festgehalten, so hört selbstverständlich die normale Nutationsbewegung auf. Die freigebliebene Spitze müsste jetzt um eine durch die Axe des Stengels an der festgehaltenen Stelle gezogene gerade Linie als Axe weiter nutiren, und anfänglich findet dies auch statt: die Spitze erhebt sich auf derjenigen Seite, welche bei der Nutation voranging, bis ihre Krümmungsebene etwas über die Horizontale hinausgekommen ist, bis ihre Krümmung also vom Befestigungspunkte nach der Spitze zu schief aufsteigt» (l. c. S. 338). Die so gebildete Krümmung der Spitze stellt schon einen Theil einer aufsteigenden Spirale dar und von nun an wächst die Spitze in der Richtung derselben Schraubenlinie weiter fort, gleichgültig ob in der Mitte der Windungen sich eine Stütze befindet oder nicht, so «dass die Spitze von um hinreichend dünne Stützen sich windenden Schlingpflanzen immer in einem nach der Stütze concaven, meist fast horizontalen Bogen absteht» (p. 336); dabei «nur die äusserste Spitze bewegt sich anscheinend unregel-

1) Arbeiten des botan. Instituts in Würzburg. I Bd. p. 317.

mässig hin und her, und drückt sich dadurch einmal an die Stütze an, ein andermal entfernt sie sich wieder von dieser» (p. 323). — Die Vorstellung von der Mechanik des Windens, welche sich der Verfasser auf Grund der beobachteten Thatsachen gebildet hat, ist nun die folgende: wird die normale Nutation durch Dazwischenkommen einer Stütze verhindert, so versucht das freie Ende der Stengelspitze allein ihre Nutation und zwar um den jetzt horizontalen Stengel, also in verticaler Ebene fortzusetzen, — was an der eintretenden Hebung der Spitze sich auch wirklich zu erkennen gebe. Weiter als bis zu dieser Hebung kommt aber die Spitze deshalb nicht, weil das Gewicht der Endknospe dem entgegenwirkt. An einem in fast horizontaler Ebene gekrümmten Bogen soll nämlich das Gewicht des freien Endes des Bogens eine Drehung des rückwärtsliegenden Theiles der Spitze um ihre Axe und somit das Heruntersinken des freien Endes der Spitze verursachen. In dem Maasse aber als dieses Sinken erfolgt, sucht die Spitze durch die in verticaler Ebene vor sich gehende Nutation sich immer wieder zu heben. Wenn beide Vorgänge sich das Gleichgewicht halten, so behält die freie Stengelspitze fortwährend dieselbe Form und Lage und wächst so um die Stütze herum fort, indem sie immer einen nach der Stütze concaven, von derselben mehr oder weniger abstehenden, oft fast horizontalen Bogen (manchmal von mehr als 360°) darstellt. Erst nach und nach strebt die Spitze im älteren Theile ihres freien Bogens sich (in Folge des negativen Geotropismus) aufzurichten und wird dadurch fest an die Stütze angedrückt. Nach Hugo de Vries ist es also nur das freie, von der Stütze abstehende Stengelende, welches bestrebt ist, ihre Nutationsbewegungen auszuführen, somit bei dem Winden allein thätig ist, während das feste Anlegen des Stengels an die Stütze schon unabhängig von den specifischen Eigenschaften eines windungsfähigen Stengels erfolgt.

Ein wesentlicher Unterschied zwischen der Auffassungsweise von Ch. Darwin und derjenigen von Hugo de Vries besteht also darin, dass während der erste von den genannten Beobachtern den freien Theil einer durch Stütze aufgehaltenen Stengelspitze ihre Nutation in horizontaler Ebene fortsetzen, der andere sie dabei in verticaler Ebene nutiren lässt. Das enge Umfassen der Stütze durch die Stengelwindungen, welche in der Erklärung von Darwin als eine unmittelbare Folge der Nutation der Spitze erscheint, wird nach Hugo de Vries erst nachträglich durch den Geotropismus bewerkstelligt. —

Die Erklärung von Ch. Darwin kann in ihrer einfachen Form nur bei der Voraussetzung angenommen werden, dass die Schnelligkeit des Längenwachsthums und der Nutation einer windenden Stengelspitze unter allen Umständen eine gewisse Proportionalität einhalten, denn Thatsache ist, dass bei windenden Stengeln, — wenn nur die Stütze ein gewisses Maximum der Dicke nicht überschritten hat, — fast fortwährend eine mehr oder weniger lange Stengelspitze frei bleibt. Bei verschieden dicken Stützen müsste also entweder das Längenwachsthum des Stengels oder dessen Nutation ungleich schnell vor sich gehen, — was jedenfalls nicht bewiesen wurde. Andererseits, wenn das Umwinden der Stütze in Folge der fortgesetzten normalen Nutation der freien Stengelspitze in horizontaler Ebene erfolgte, so müsste diese Spitze fortwährend dieselbe relative Lage an der Stütze be-

halten, d. h. von derselben gerade horizontal oder in einem nach abwärts gekrümmten Bogen abstehen, — was aber die directe Beobachtung keineswegs bestätigt. Im Gegentheil, eine windende Stengelspitze macht eben diese beständigen, «anscheinend unregelmässigen Hin- und Herbewegungen», welche schon Hugo de Vries aufgefallen sind und welche es bedingen, dass die freie Spitze nicht nur etwa die eben besprochenen, sondern zeitweise verschiedene andere Lagen annimmt, welche mit der Theorie von Darwin sich nicht vereinbaren lassen.

Was die Theorie von Hugo de Vries betrifft, so ist es ebenfalls leicht sich zu überzeugen, dass verschiedene ihrer Forderungen mit den zu beobachtenden Thatsachen nicht zu vereinigen sind. Die Annahme von Hugo de Vries, dass die durch das Gewicht der bogenförmig nach vorwärts gekrümmten Spitze verursachte antidrome Torsion des Stengels gerade so schnell erfolgt, um der Aufwärtsbewegung der nutirenden Spitze fortwährend das Gleichgewicht zu halten, wurde zwar von dem genannten Beobachter nicht bewiesen und ist auch nicht geprüft worden. Soll das aber wirklich der Fall sein, so muss dabei offenbar auf jeden Nutationsumgang der Spitze auch ein Torsionsumgang des Stengels kommen und da wir später sehen werden, dass eine windende Stengelspitze auch bei verhältnissmässig dünnen Stützen mehrere Nutationsumgänge machen muss, damit sie eine Windung um die Stütze bildet, so müssten also auf jede Windung mehrere Torsionsumgänge des Stengels kommen, — was aber durch Thatsachen keineswegs bestätigt wird. Es giebt sogar Pflanzen, wie z. B. *Convolvulus arvensis*, deren energisch und regelmässig windende Stengel überhaupt nur sehr schwache, stellenweise gar keine antidrome Torsionen erkennen lassen. Die Theorie von Hugo de Vries lässt sich schliesslich nicht mehr auf die Fälle anwenden, wo die Spitze beinahe ihrer ganzen Länge nach meistentheils an die Stütze angedrückt bleibt (wie es bei sehr dicken Stützen oder schwächlichen Pflanzen manchmal zu beobachten ist) wo also die wesentliche Bedingung des Windens, — das Gewicht der überhängenden Spitze, wegfällt. — Uebrigens in keinem anderen Falle behält etwa die Spitze fortwährend diejenige Lage, welche nach der Theorie von H. de Vries erforderlich ist. Man findet sie zwar am meisten wirklich so gekrümmt, dass die Oeffnung des Bogens in schiefer Ebene der Stütze zugekehrt ist, aber ebenso gut auch in verschiedenen anderen Lagen und bei manchen Pflanzen, wie bei verschiedenen Arten von *Dioscorea*, bleibt die freie Spitze die grösste Zeit in einer beinahe verticalen Ebene scharf nach abwärts gekrümmt.

Die eben erörterte Unzulänglichkeit des Erklärungsversuches von Hugo de Vries gab schliesslich Veranlassung zu der vor einem Jahre erschienenen Untersuchung von S. Schwendener[1]). Durch Versuche konnte sich Schwendener überzeugen, dass das Eigengewicht der windenden Stengelspitze in der That keine Bedingung des Windens ausmacht; er erkannte ebenfalls, dass diese Spitze nicht etwa in einer bestimmten Lage verharrt, son-

1) Monatsber. der königl. Akad. der Wiss. zu Berlin. 1882. p. 1077.

dern ihre Nutationsbewegungen nach allen Gegenden factisch ausführt. Diesen Thatsachen gegenüber blieb es zu erklären wie es dazu komme, dass trotz die vergänglichen Nutationskrümmungen der Spitze nach allen Seiten erfolgen, der Stengel doch eine bestimmte und bleibende Krümmung in der Richtung des Windens erhält. Das Zustandekommen dieser bleibenden Krümmuug erklärt Schwendener ausschliesslich aus den mechanischen Umständen, welche, durch das Dazwischenkommen der Stütze, die Form der Krümmung einer windenden Spitze beeinflussen, — und zwar in folgender Weise. Wenn die nutirende Spitze sich in horizontaler Ebene krümmt, so fasst sie die Stütze mittelst der Endknospe und einer etwa 120—200° rückwärts liegenden Stelle des Bogens «in ähnlicher Weise wie man etwa mittelst Daumen und Zeigefinger eine cylindrische Glassröhre oder ein leichtes Weinglass u. dgl. anzufassen pflegt». Der mittlere Theil des Krümmungsbogens steht mehr oder weniger weit von der Stütze ab. Sucht aber die Krümmung sich noch enger zusammenzuziehen, so entsteht dadurch eine Spannung, in deren Folge der Krümmungsbogen nach der Stütze hingezogen wird, bis er überall fest sich an dieselbe anlegt. Diese gezwungene Bewegung (Krümmen) nach der Stütze hin, nachdem sie sich öfters wiederholt, wird schliesslich in dauerndes Wachsthum nach dieser Seite umgesetzt und somit die erste mechanische Ursache des Windens ausmacht. Einen weiteren Umstand, welcher in demselben Sinne mitwirkt, findet Schwendener in der antidromen Torsion des Stengels, welche das Umwinden der Stütze nothwendig begleitet. Der genannte Forscher hat nämlich gezeigt, dass wenn die Krümmungsebene der Spitze nicht horizontal sondern gegen die Axe der Stütze mehr oder weniger geneigt ist «...so verursacht die vorhandene Spannung ausser der Krümmung zugleich eine der Windungsrichtung entgegengesetzte Torsion des Stengels...», was auch Schwendener an einem Drathbogen demonstrirt, an den man eine entsprechend angebrachte Kraft wirken lässt. In Folge dieser Torsion «...die ursprüngliche Innenseite (d. h. die der Stütze zugekehrte Seite der gekrümmten Spitze), auf welche nun im weiteren Verlauf der Nutationsbewegung die Convexität übergeht, sich gleichzeitig mehr nach unten verschiebt. Es kommt deshalb nicht zu einer nach aussen concaven Krümmung, sondern höchstens zur Aufhebung des Contactes» (mit der Stütze). Durch diese beiden Umstände glaubt Schwendener die Thatsache erklären zu müssen, dass bei einer windenden Stengelspitze die Krümmungen nach der Stütze hin über alle anderen vorherrschen, — was eben für das Winden maassgebend ist (l. c. S. 1081—1085). — Aus der von ihm beobachteten Thatsache, dass die Pflanze zu winden aufhört, wenn sie der Wirkung der Schwerkraft entzogen wird, hat Schwendener geschlossen, dass der Geotropismus einen weiteren, wesentlichen Factor des Windens ausmacht. Die Bedeutung des Geotropismus erklärt Schwendener dadurch, dass wenn eine nutirende Stengelspitze sich von ihrer Stütze entfernt hat, so wird sie durch den Geotropismus gehoben und an die Stütze wieder angedrückt. Durch den Einfluss des Geotropismus werden somit «...dieselben Spannungen verursacht, wie sie beim Ergreifen der Stütze in Folge der Nutationskrümmung entstehen». «Geotropische und Nutationskrümmungen addiren sich also in ihren Wirkungen» (l. c. S. 1089).

Die Entstehung der freien Spiralwindungen ausserhalb der Stütze, was von Hugo de Vries als normale Erscheinung gedeutet wurde, wird von Schwendener als zufällig und abnorm gehalten. —

Gegen die sinnreiche Theorie des Windens von Schwendener lässt sich im Voraus nichts einwenden, weil zum Theil die Thatsachen selbst, auf welche sie sich stützt, bisher von keinem Beobachter genau verfolgt wurden und überhaupt nur wenig bekannt sind. Die Untersuchungen aber von Schwendener selbst sind wieder meistens zu theoretisch dargelegt und nicht mit den Beobachtungen über die windenden Pflanzen selbst genügend illustrirt — was besonders in Betreff der Bewegungen und Krümmungen einer windenden Stengelspitze zu sagen ist. Genaue thatsächliche Angaben wären aber in der uns beschäftigenden Frage desto mehr nothwendig, als hier, wie bemerkt, selbst über die ganz elementaren Thatsachen, — wie z. B. die Art und Reihenfolge der Bewegungen, welche eine windende Stengelspitze factisch ausführt, die mögliche Bildung der normalen Spiralwindungen ausserhalb der Stütze, — bis sur letzten Stunde ganz schroffe Widersprüche bestehen. —

Schwendener's Arbeit konnte ich bei meinen Untersuchungen nur zum Theil berücksichtigen, weil diese Untersuchungen beinahe abgeschlossen waren, als die Abhandlung von Schwendener erschien, doch werden meine Beobachtungen im Stande sein, auch die von Schwendener zum ersten Male in der Mechanik des Windens hervorgehobenen Momente thatsächlich zu beleuchten. —

Nachdem Ch. Darwin und später Hugo de Vries gezeigt haben, dass die windungsfähigen Stengel nicht reizbar sind, dass aber andererseits die kreisförmige Nutation ihrer Spitze nicht etwa durch Torsionen der älteren Stengeltheile verursacht wird, sondern eine selbstständige Bewegung der wachsenden Spitze selbst ist, — musste von vorn herein höchst wahrscheinlich werden, dass das Winden eben durch diese Bewegung bedingt wird. Schon Palm und dann seit Darwin alle die späteren Forscher sind auch wirklich von dieser Vorstellung ausgegangen; allein, in Angesicht der sich in wichtigsten Punkten widersprechenden Angaben, kann die Art und Weise wie Nutation sich in Winden umsetzt, noch keineswegs als aufgeklärt betrachtet werden, — offenbar weil die Thatsachen selbst, auf denen die Erscheinung beruht, uns noch nicht genügend bekannt sind. War aber eine nahe Beziehung des Windens zur Nutation kaum mehr zu bezweifeln, so durfte eine vollständigere Lösung des Problems von einem eingehenderen Studium der Nutation selbst zu erwarten sein. Aus diesem Grunde suchte ich die letztgenannte Erscheinung und ihren Verlauf bei geänderten Bedingungen und mechanischen Hindernissen näher zu studiren, als es bisher immer geschehen ist. Das Winden selbst, d. h. die dabei stattfindenden Bewegungen der Stengelspitze, verfolgte ich Schritt für Schritt und habe mir die aufeinanderfolgenden Veränderungen in der Lage dieser Spitze jedesmal notirt und zugleich möglich genau nachgezeichnet, denn, wie das auch Schwendener erkannte, ohne das ist es kaum möglich sich in der Reihenfolge dieser Bewegungen eine klare Rechenschaft zu geben. —

Zu meinen Beobachtungen dienten mir hauptsächlich einige Arten von *Ipomaea*, *Dioscorea*, ebenso *Pharbitis hispida* und *Polygonum Convolvulus* als Repräsentant der rechtswindenden Pflanzen. Sämmtliche Beobachtungsobjecte wurden im Zimmer gezogen und auch beobachtet und zwar ausschliesslich in den Sommermonaten, denn das rasche Wachsthum der Objecte ist eine fast unerlässliche Bedingung für den Erfolg solcher Untersuchungen. —

Kreisförmige Nutation der Stengelspitze.

Nutation freier Spitze eines aufrechten Stengels, — symmetrische Nutation. Wächst an einem aufrechten Stengel eine Seite desselben stärker in die Länge, so wird der Stengel nach der Seite des schwächeren Wachsthums bogenförmig gekrümmt. In einer solchen Krümmung geht aber, wie Ch. Darwin zeigte, das stärkste Wachsthum fortwährend von der convexen auf eine seitliche Kante des Stengels über; die Convexität der Krümmung wird also jedesmal von einer anderen Stengelkante eingenommen, — was eine kreisförmige Bewegung der gekrümmten Spitze in horizontaler Ebene zur Folge hat. Diese Art der kreisförmigen Nutation werde ich als symmetrische Nutation bezeichnen, weil dabei die nutirende Spitze in allen Stellungen dieselbe relative Lage sowohl zum Horizonte, als zum unteren, aufrechten Stengeltheile behält, dessen Verlängerung, zugleich die Axe der Nutationsbewegung vorstellt. — An den jungen, ihre Nutation eben beginnenden Stengeln, entsteht die Nutationskrümmung gewöhnlich schon wenige Centimeter rückwärts von der Gipfelknospe. Die nutirende Strecke ist somit zunächst verhältnissmässig kurz und pflegt dabei ihrer ganzen Länge nach die Form eines Kreisbogens darzustellen, welcher oft nahe an 180° umfasst, so dass die Endknospe nach abwärts schaut. Eine solche Form der nutirenden Spitze zeigt, dass alle Theile derselben sich gleichmässig activ an der Nutation betheiligen, d. h. dass zu einer gegebenen Zeit in jeder Querzone der Spitze die Verlängerung einer Seite stärker ist, als diejenige der gegenüberliegenden. Geht der Vorgang regelmässig vor sich, d. h. kommt das stärkste Wachsthum einer Längskante der Spitze in allen ihren Theilen immer zu gleicher Zeit zu Stande, so bleibt die ganze Krümmung fortwährend in verticaler Ebene liegen. Allein schon Ch. Darwin ist aufgefallen, dass das nicht immer der Fall ist, dass vielmehr der jüngste Theil der Spitze oft anders gekrümmt ist, als der übrige Theil derselben, — was Darwin einer langsameren Nutation dieses jüngsten Theiles zuzuschreiben scheint (l. c. S. 10—11). Es ist in der That eine oft zu beobachtende Erscheinung, dass bei einer symmetrisch nutirenden Spitze das äussere Ende derselben zeitweise eine, meist enge Krümmung in horizontaler Ebene bildet, während der übrige Theil der Krümmung in verticaler Ebene liegen bleibt. Die horizontale Krümmung ist in der Regel nach vorn (d. h. in der Richtung der Nutation) geöffnet. Eine umgekehrte Richtung der hakenförmigen Krümmung der Spitze ist nur ausnahmsweise zu beobachten. Das Auftreten und das Bestehen solcher Krümmungen ist überhaupt ganz unregelmässig, nach mehr oder weniger kurzer Zeit werden

sie gewöhnlich wieder ausgeglichen. Wie leicht einzusehen, muss die Entstehung im jüngsten Theile der Spitze einer horizontalen Krümmung nach vorwärts nicht, wie Darwin meinte, durch langsamere, sondern im Gegentheil, durch beschleunigte Nutation dieses Theiles bestimmt werden. Wird aber in der darauffolgenden Zeit die Nutation dieses jüngsten Theiles wieder verlangsamt, so muss seine horizontale Krümmung passiv in Folge der Umdrehung des nutirenden älteren Theiles wieder in verticale Ebene gebracht werden. Dass man bei diesen Vorgängen wirklich nur die ungleichmässige Nutation verschiedener Theile und nicht vielleicht etwaige Torsionen der Spitze vor sich hat, wird dadurch bewiesen, dass eine längs der Spitze aufgetragene Linie bei den Krümmungen nach vorwärts und zurück keine Verschiebungen erfährt und der Axe der Spitze immer parallel bleibt. Die ofte Bildung im jüngsten Theile der Spitze der betreffenden Krümmung nach vorwärts, zeigt, dass selbst bei einer frei nutirenden Spitze, der jüngste Theil derselben die Neigung besitzt, schneller zu nutiren, — eine Neigung, welche, wie wir später sehen werden, bei gewissen Bedingungen viel auffallender hervortritt. — Die horizontale Krümmung der jüngsten Spitze ist gewöhnlich verhältnissmässig sehr eng, fast kann man sagen hakenförmig und in Folge dieser Eigenschaft muss sie der Pflanze (solange diese noch symmetrisch nutirt), wie schon Darwin hervorhob, für das Ergreifen einer Stütze ausserordentlich nützlich sein. Die Ursachen, warum diese Krümmung so enge zu sein pflegt, werden wir später kennen lernen. —

Die zuerst und spontan entstehende Nutationskrümmung ist, wie schon bemerkt, verhältnissmässig nur wenig von dem Ende der Stengelspitze entlegen. Nutirt aber eine solche Spitze längere Zeit ohne mit einer Stütze in Berührung zu kommen, so wird die in der Nutation begriffene Strecke immer länger. Das wird dadurch bestimmt, dass während die Spitze rasch in die Länge wächst, bleibt die ursprüngliche Stelle der Nutationskrümmung am Stengel beinahe unverändert. Es ist in der That die gewöhnliche und scheinbar kaum berücksichtigte Erscheinung, dass die einmal entstandene Krümmung sich nur schwer wieder ausgleicht; der einmal gekrümmte Stengeltheil wird nicht wieder gerade. Die von Ch. Darwin beschriebene Beobachtungsreihe mit einem Hopfenstengel (l. c. S. 2—4) mag nur für sehr steife und nicht rasch genug wachsende Stengel zutreffen. In der Regel kommt aber das Wiederaufrichten der gekrümmten Stengeltheile nur in sehr beschränktem Maasse zu Stande und da die horizontal schwebende Spitze sich inzwischen immer mehr verlängert, so ist es leicht an den selbst im Zimmer gewachsenen Exemplaren von *Dioscoreen*, *Ipomeen*, *Pharbitis hispida* bis 20 Cent. lange, horizontal ausgestreckte und symmetrisch nutirende Stengelspitzen zu beobachten. An den im Freien oder im Gewächshaus treibenden Pflanzen dürfte dasselbe in noch höherem Grade sich bemerklich machen und Ch. Darwin hat einen Fall von *Ceropegia Gardneri* angeführt, wo eine horizontale Stengelspitze bei ihrer kreisförmigen Bewegung einen Kreis von 5 Fuss Durchmesser beschrieb. — Wenn der unmittelbar gekrümmte Stengeltheil zu wachsen aufhört, so erstarrt so zu sagen seine Krümmung, — die Krümmungsebene rotirt nicht mehr und behält dauernd ihre Stellung. Die

jüngere Stengelspitze setzt aber ihre Bewegungen immer fort und zwar jetzt auf eine Weise, die wir weiter unten werden kennen lernen. —

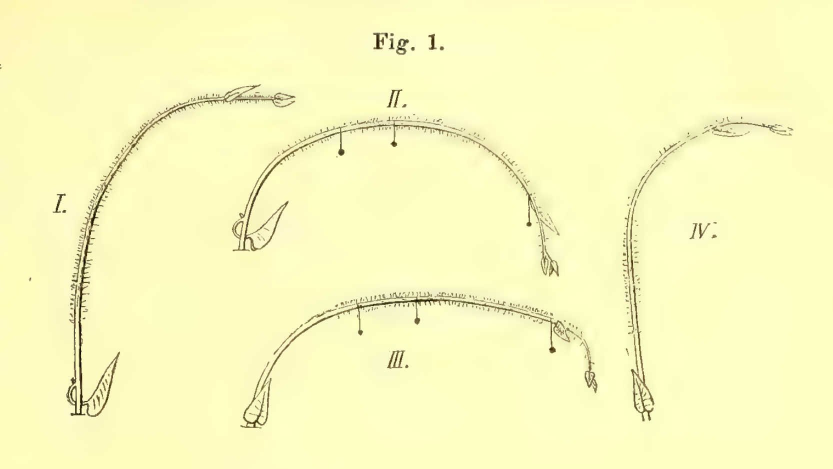
Hat die Stengelspitze eine beträchtliche Länge erreicht, so erscheint sie gewöhnlich nicht mehr ihrer ganzen Länge nach gekrümmt. Sie bleibt im Gegentheil mehr oder weniger vollständig gerade und horizontal, so dass die Krümmung jetzt auf einen ziemlich kurzen, älteren Stengeltheil allein sich beschränkt. Eine ähnliche Form der nutirenden Spitze ist bisweilen an den noch jungen und kurzen Stengelspitzen zu beobachten und zwar desto mehr, je träger das Wachsthum und die Nutation einer solchen Spitze vor sich geht. Bei der angegebenen Form der nutirenden Stengelspitze bleibt die active Nutation offenbar auf die unmittelbar gekrümmte Strecke beschränkt, welcher die gerade Spitze aufsitzt, während diese letztere nur passiv im Kreise herumgeführt wird. Indem ich auf die Ursachen dieses scheinbar passiven Verhaltens des äusseren Theiles der nutirenden Stengelspitze später nochmals zu sprechen komme, bleibt hier nur zu bemerken, dass eine solche Spitze eben nur scheinbar passiv bleibt. Das letztere ist schon daraus zu schliessen, dass sehr häufig, zumal bei den horizontalen Stengelspitzen, welche eine bedeutende Länge haben, ist von Zeit zu Zeit die Bildung in ihrem jüngsten Theile derjenigen engen, hakenförmigen Krümmung in horizontaler Ebene zu beobachten, welche schon oben beschrieben wurde. —

Entstehung der Nutationskrümmungen und den Ort ihres Auftretens an dem Stengel. Bei dem ersten Auftreten der Nutationskrümmung ist zwar die Länge der sich krümmenden Stengelspitze im Ganzen nur unbedeutend, doch bei verschiedenen Pflanzen sehr verschieden, — was wesentlieh von der Länge der wachsenden Stengelregion abhängen muss. Es scheint überhaupt angenommen zu werden, dass die ursprüngliche Krümmung durch die Schwere der Spitze verursacht wird. Diese Vorstellung ist aber nur zum Theil richtig, denn es ist leicht sich zu überzeugen, dass eine nutationsfähige Stengelspitze eine selbstständige Neigung besitzt in Folge des ungleichseitigen Längenwachsthums sich zu krümmen. Wird eine horizontal gestreckte und ganz gerade, nutirende Stengelspitze von *Pharbitis hispida*, *Thunbergia alata* in vertical aufrechte Lage gebracht und in ihrem unteren Theile befestigt, so vergehen kaum 10—15 Minuten als im oberen Ende der Spitze sich eine Krümmung bemerklich macht, welche rasch zunimmt und unmittelbar ihre kreisförmige Bewegung anfängt. Diese Krümmung entsteht bei den genannten Pflanzen nicht über 2—4 Cent. weit von der Endknospe; die Erscheinung bleibt ganz dieselbe auch in dem Falle, wenn die freie Stengelspitze im Ganzen nicht mehr als etwa 3—4 Cent. lang ist. — Die erst gebildete Krümmung stellt gewöhnlich einen kurzen und scharfen (bei 90° umfassenden) Kreisbogen dar; später wird aber in der Regel (wenn die freie Spitze lang genug ist) der angrenzende Stengeltheil von ungefähr nochmals derselben Länge nach und nach ebenfalls gekrümmt, wodurch die ganze Krümmung weniger scharf und der Krümmungsradius grösser wird. Man möchte vielleicht glauben, dass diese nachträglich im älteren Stengeltheil sich bildende Krümmung durch die Wirkung des Eigengewichtes der Spitze bestimmt wird. Das kann aber nur theilweise richtig sein. So wurde bei einer in verticale Stellung gebrachten Stengel-

spitze von *Pharbitis hispida* ein Endstück von 3 Cent. Länge (mit der schon gebildeten Krümmung) weggeschnitten. Der zurückgebliebene, vollkommen gerade und steife Stengelstumpf krümmte sich dennoch in $^1/_2$ Stunde $2^1/_2$ Cent. von seinem Ende und die gebildete (ziemlich schwache) Krümmung nutirte regelmässig. Bei den Stengeln, an denen die im energischen Wachsthum begriffene Strecke eine bedeutende Länge besitzt, kann die neue Krümmung nochmals entfernt werden und es wird darauf günstigenfalls ebenso, — wenn auch noch langsamer, — eine dritte nutationsfähige Krümmung gebildet. Wenn aber eine im jüngsten Stengeltheile sich bildende Krümmung jedesmal etwa 90° stark ist, so werden die im älteren Theile auftretenden Krümmungen immer schwächer und das freie Ende des Stengels wird dabei immer weniger geneigt. — Die angeführten Thatsachen zeigen, dass alle noch mehr oder weniger energisch wachsende Stengelregionen fähig sind, spontane Nutationskrümmungen zu bilden, dass aber diese Fähigkeit ihnen im ungleichen Grade und zwar unzweifelhaft nach Maassgabe der Wachsthumsfähigkeit zukommt. Die Selbstständigkeit der Krümmungen werde ich später noch am anderen Wege beweisen, indem ich zeigen werde, dass bei gewissen Bedingungen, wo die regelmässige kreisförmige Nutation nicht möglich und die Wirkung des Eigengewichtes eliminirt ist, die Krümmungen immer noch gebildet werden. — Die selbstständige Neigung nutationsfähige Krümmungen zu bilden, erlischt aber im Stengel bedeutend früher, als die Fähigkeit auf Licht- und Schwerkraftwirkungen zu reagiren und Stengeltheile, welche schon keine Nutation mehr zeigen, sind noch im Stande unter Umständen starke geotropische und heliotropische Krümmungen zu machen.

Ist somit die Bildung der nutationsfähigen Krümmungen eine den betreffenden Stengeln selbstständig zukommende Eigenschaft, so ist es doch andererseits nicht zweifelhaft, dass die Stärke solcher Krümmungen durch das Gewicht der Spitze beeinflusst wird. Das ist schon daraus zu schliessen, dass die im älteren Stengeltheile spontan entstehenden Krümmungen immer nur sehr schwach im Verhältniss zu denjenigen sind, welche an den unverletzten, unter dem Gewichte ihrer Spitze nutirenden Stengeln zu beobachten sind. Die Möglichkeit der Einwirkung der Schwere auf die Form einer nutirenden Krümmung, kann aber direct durch Versuche bewiesen werden, welche zeigen, dass selbst ganz künstlich, innerhalb der wachsthumsfähigen Stengelregion hervorgebrachte Krümmungen in derselben Weise wie die natürlichen, regelmässig nutiren können. In Fig. 1 sind verschiedene Stadien eines solchen Versuches abgebildet. Eine 10 Cent. lange und vollständig gerade Spitze von *Pharbitis hispida* wurde in vertical aufrechter Stellung befestigt; 3 Stunden später war die Spitze so gekrümmt, wie in I zu sehen ist und nutirte regelmässig. Jetzt wurde durch Aufhängen der Gewichte die Spitze in eine Lage wie in II gebracht, wo die Krümmung schon im untersten, bis jetzt ganz geraden Theile begann. Fast unmittelbar darauf fing in der ganzen Krümmung die kreisförmige Nutation an und nachdem in 1 Stunde $^1/_4$-Umgang beschrieben wurde, wurde der Krümmungsbogen der Spitze sehr flach geworden, — das jüngste Internodium allein war stark in etwas schiefer Ebene gekrümmt; die Spitze hatte jetzt eine Form, welche in III wiedergegeben ist. Als nun die Gewichte entfernt wurden, hat sich die

Fig. 1.



Spitze im Laufe von $^1/_4$ Stunde wieder aufgerichtet und eine Form wie in IV angenommen, welche der ursprünglichen sehr ähnlich ist. — Werden an einer langen, nutationsfähigen Stengelspitze künstliche Krümmungen successive an verschiedenen Stellen hervorgebracht, so zeigt sich, dass in jeder solchen Krümmung die kreisförmige Nutation sich desto schneller einstellt, je jünger die betreffende Stengelregion. So. z. B. wurde eine circa 15 Cent. lange, in verticale Stellung gebrachte Stengelspitze von *Ipomaea chrysantha*[1]) zuerst 4 Cent. unterhalb der Endknospe scharf gebogen und die Krümmung fing unmittelbar an zu nutiren. Darauf wurde der Stengel ca. 9—10 Cent. weit von seinem Ende gebogen: die Nutation wurde erst nach Ablauf von $^1/_2$ Stunde bemerklich. Schliesslich wurde derselbe Stengel an einer 12 Cent. von seinem Ende entfernten Stelle gekrümmt und diesmal selbst nach $^1/_2$ Stunde, war noch keine Nutation zu bemerken. —

Das plötzliche Verlegen der Nutationskrümmung am Stengel erfolgt manchmal spontan, wobei die neue Krümmung über der schon vorhandenen oder unterhalb derselben entsteht. In diesen Fällen wird in der Regel die neue Krümmung angelegt noch bevor die frühere verschwunden ist und in demselben Maasse als die erstere stärker wird gleicht sich die letztere allmählich aus. In demselben Maasse erlischt die kreisförmige Nutation in der alten Krümmung um inzwischen in der neuen zu beginnen. Spontan ist diese Erscheinung nur an den jungen aber schon regelmässig nutirenden Pflanzen zu beobachten. Die Angabe von Hugo de Vries (l. c. S. 338) es soll der Gipfel dabei sich gerade strecken (aufrichten) um sodann nach der entgegengesetzten Seite sich zu krümmen, mag für sehr junge Keimpflanzen zutreffen, bei denen eine regelmässige Nutation noch nicht im Gange ist. — Es ist bemerkenswerth, dass das Auftreten neuer Krümmungen in der Regel dem Gesetze der undulirender Nutation (Wiesner) folgt, d. h. eine neue Krümmung wird in derselben Ebene wie die alte aber nach der entgegengesetzten Richtung gebildet, — eine Erscheinung, welche, wie wir später sehen werden, bei gewissen Bedingungen besonders deutlich hervortritt.

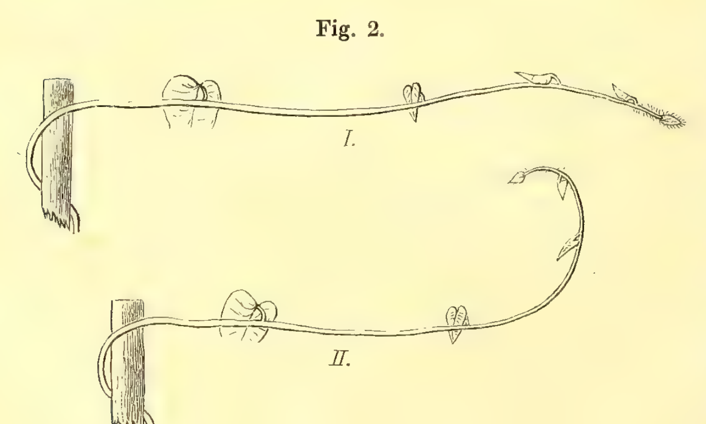
Nutation freier Spitze eines in horizontaler Lage befindlichen Stengels, — asymmetrische Nutation.

---

1) Unter diesem Namen wurden aus der Samenhandlung von Haage und Schmidt in Erfurt fast nussgrosse Samen der Pflanze bezogen.

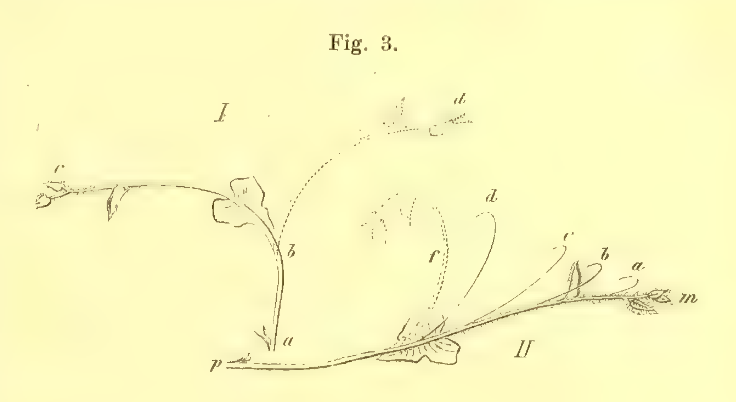
Für das Verständniss des Windens ist es unmittelbar wichtig Bewegungen genau kennen zu lernen, welche die nutirende Spitze eines in horizontaler oder stark geneigter Lage starr gewordenen Stengels darbietet, weil die freie Spitze einer windenden Pflanze wohl immer gezwungen ist eben bei diesen Verhältnissen zu nutiren. — Es wurde schon oben bemerkt, dass eine in der jungen Stengelspitze einmal entstandene Nutationskrümmung gewöhnlich nicht mehr ausgeglichen wird. Das ist ohne Zweifel der Wirkung des immer zunehmenden Gewichtes der rasch anwachsenden horizontalen Spitze zuzuschreiben, welches das geotropische Aufrichten des unmittelbar gekrümmten (schwachen und biegsamen, wie es bei Schlingpflanzen wohl immer ist) Stengeltheiles verhindert. So lange die Krümmung noch innerhalb der nutationsfähigen Region sich befindet, ist der ganze horizontale Stengeltheil beweglich, und nutirt somit symmetrisch um die verticale Axe. Wird aber mit dem Alter der Theil des Stengels, wo die Krümmung liegt, starr so stellt der obere Schenkel der Krümmung eine unbewegliche horizontale Axe dar, welche eine nutirende Spitze trägt. Die weitere Verlängerung des Stengels erfolgt nun weiterhin immer in derselben horizontalen Lage und es ist leicht bei steiferen Stengeln, wie diejenigen von Hopfen, *Pharbitis hispida* etc. fast meterlange, in horizontaler Lage schwebende Sprosse zu finden, welche nicht etwa nachträglich umgefallen sind, sondern sich in dieser Lage verlängert haben. Ist ein solcher Spross zu lang geworden, so senkt er sich mit seinem Ende zum Boden um darauf die Spitze geotropisch aufwärts zu richten. Die typische, symmetrische Nutation ist daher eigentlich nur an den jungen Sprossen oder Keimstengeln, also verhältnissmässig selten zu beobachten. Bei etwas älteren Stengeln, welche inzwischen mit keiner Stütze in Berührung gekommen sind, hat der starre, eine nutirende Spitze tragende Stengeltheil gewöhnlich schon eine horizontale Lage. In diesem letzteren Falle sind aber die Bewegungen der Spitze wesentlich anders als bei der Nutation um eine verticale Axe. Zu einer Zeit findet man hier die nutirende Spitze in der Verlängerung der unbeweglichen Stengelaxe, also horizontal gestreckt (wie in Fig. 2, I oder Fig. 3, II, *p—m*; meistentheils ist die horizontale Spitze vollständig gerade). Jetzt fängt die Spitze an sich in horizontaler Ebene, in der Richtung der Nutation zu krümmen. Diese Krümmung beginnt zunächst im jüngeren Theile; hier wird sie immer stärker und kann schliesslich bis 180° betragen, so dass die Spitze in der Ebene der Krümmung betrachtet eine Form erhält wie die in Fig. 3, II bei *f* abgebildete. Zu der Krümmung in horizontaler Ebene kommt aber bald das Wachsthum der unteren Stengelseite hinzu, wodurch die Spitze gehoben und die ursprünglich hori-

Fig. 2.



zontale Krümmungsebene allmählich in eine schiefe Lage gebracht wird. In Fig. 3, II sind mit *a*, *b*, *c*, *d* successive Stellungen einer sich hebenden Spitze angedeutet. Das Aufwärts krümmen erfolgt hauptsächlich im älteren Stengeltheile, zuerst nur langsam, dann immer schneller und schliesslich, — wenn die Neigung zur Verticale etwa 30—35° nicht übersteigt, — ist die Aufwärtsbewegung so schnell, dass man sie unmittelbar sieht. Die so ungleichmässige Bewegung muss offenbar dadurch bestimmt werden, dass mit der Neigung zum Horizonte auch die Last der überhängenden Spitze sich ändert. Das Aufrichten dauert so lange bis die Krümmungsebene der Spitze in senkrechte Lage gekommen, wie es in Fig. 2, II; Fig. 3, II bei *f* zu sehen ist. In diese Stellung gekommen hat nun die Spitze einen halben Umgang gemacht, den man als die aufsteigende Phase der Nutation bezeichnen kann: der ältere Theil der Spitze steht jetzt annähernd vertical aufrecht, ihr Ende, welches eine scharfe, ursprünglich in horizontaler Ebene gebildete Krümmung darstellt — ist rückwärts zurückgeschlagen. Wurde längs der Oberseite der noch geraden, horizontalen Spitze ein Strich mit Tusche aufgetragen so findet man ihn jetzt überall auf der Innenseite der aufrechten Krümmung liegen. Beobachtet man aber die Marke zu der Zeit wo die scharfe Krümmung der Spitze noch in einer sehr geneigten Ebene liegt so findet man oft (bei langen und schweren Spitzen), dass dieselbe schon theilweise nach der Innenseite der Krümmung sich verschoben hat, während die beiden Schenkel der Krümmung noch in beinahe derselben Ebene sich befinden. Das zeigt, dass hier eine antidrome Torsion der Spitze erfolgte, weil die biegsame Spitze, welche den äusseren Schenkel der Krümmung bildet in Folge ihrer Schwere sich nicht entsprechend heben konnte. Die auf diese Weise entstandene Torsion ist aber in der Regel nur unbedeutend und kann nicht die Bedeutung haben, welche ihr von H. de Vries zugemessen wurde, denn bei nicht sehr langen und weniger stark gekrümmten Spitzen ist sie auch kaum zu bemerken und jedenfalls in dem Maasse als die Neigung der gekrümmten Spitze zum Horizonte grösser wird, gleicht sich die erhaltene Torsion wieder vollständig aus. — Aus dem oben Gesagten ist auch zu sehen, dass die Vermuthung von Hugo de Vries es könne das Gewicht einer in horizontaler Ebene gekrümmten Stengelspitze ihre Aufwärtskrümmung verhindern — ganz unbegründet ist.

Fig. 3.



In die Stellung von Fig. 2, II; Fig. 3, II*f* angelangt fängt die Spitze an nach der anderen Seite zu neigen. Ihre Krümmungsebene wird jetzt im umgekehrten Sinne allmählich geneigt und in demselben Maasse beginnt auch die Krümmung sich auszugleichen, bis die Spitze

in der Verlängerung der unbeweglichen, horizontalen Stengelaxe sich wieder gerade gestreckt hat. War die aufsteigende Phase der Bewegung durch das Wachsthum der rechten und darauf der unteren Seite der Stengelspitze bestimmt, so ist die letzte Hälfte des Umganges, — welche man als absteigende Phase zu bezeichnen hätte, — offenbar durch successive beschleunigtes Wachsthum der linken, der oberen und schliesslich nochmals der rechten (Ausgleichen der Krümmung) Seite der Spitze zu Stande gekommen. — Ich will hier sogleich auf die auffallend grosse Amplitude der in horizontaler Ebene stattfindenden Krümmungen aufmerksam machen, welche von dem ungemein ausgiebigen Wachsthum der rechten (eine links nutirende Pflanze vorausgesetzt) Seite allein abhängen. Diese Erscheinung werden wir später genau zu studiren haben.

Bei nicht zu langen und genug steifen Stengelspitzen hat ihre eigene Schwere nur wenig Einfluss auf die Lage der Spitze sowohl in der aufsteigenden als in der absteigenden Nutationsphase, welche letztere ganz regelmässig und allmählich verläuft. Bei sehr langen und biegsamen Spitzen ist es dagegen eine gewöhnliche Erscheinung, dass nachdem eine solche Spitze mühsam ihre höchste Stellung erreicht hat so fällt sie rasch nach der anderen Seite in Folge ihrer eigenen Schwere und kommt manchmal unmittelbar in eine horizontale Lage, worauf ihre Krümmung sich allmählich ausgleicht. Durch solches passive Umfallen der Spitze wird natürlich jedesmal eine homodrome Torsion von ca. 90° verursacht.

Die hier beschriebene Art der Nutation muss von der früher besprochenen, symmetrischen Nutation nothwendig unterschieden werden. Wenn dort die am stärksten wachsende Stengelseite jedesmal zur Oberseite der Nutationskrümmung wird, — was mit dem Umdrehen der horizontalen Spitze um ihre Axe verbunden ist, so geht hier das Wachsthum um den Stengel herum, während die Lage der einzelnen Stengelseiten zum Horizonte nicht mehr symmetrisch geändert wird. Die nutirende Stengelspitze beschreibt hier somit eine Ellipse, deren Axe sowohl zum Horizonte als auch zur Axe des unbeweglichen Stengels um etwa 45° geneigt ist. Diese Art der Nutationsbewegung werde ich im Gegensatz zu der früher besprochenen, symmetrischen, — als die asymmetrische Nutation bezeichnen. —

In dieser letzteren Art der Nutation mit ihrer engen, in der Richtung der Bewegung geöffneten horizontalen Krümmung und dem überwiegenden Vorwärtsstrecken der nutirenden Spitze, ist den Pflanzen unzweifelhaft ein ausserordentlich sicheres Mittel zum Aufsuchen und Ergreifen einer Stütze gegeben. In Fig. 2 ist ein Stengel von *Pharbitis hispida*, welcher seine Stütze überwuchs, in zwei entgegengesetzten Nutationsphasen wiedergegeben. Dieser $\frac{1}{2}$ Meter lange, horizontal gestreckte Stengel mit seiner in so eigenthümlicher Weise nutirenden Spitze, welche gleichsam sucht, womöglich weit vorwärts zu greifen, stellt gewiss einen interessanten Fall der zweckmässigen Einrichtung dar, welche auf das Erreichen einer Stütze berechnet ist. Später werde ich noch zeigen, dass der unbewegliche Stengeltheil selbst dabei immer nach derjenigen Seite gestreckt ist, wo die grösste Wahrscheinlichkeit vorliegt, eine Stütze zu finden. —

Geotropismus der nutirenden Stengelspitzen. Ungeachtet der horizontalen Lage, in welcher

nutirende Stengelspitzen wenigstens die grösste Zeit verbleiben, sind sie doch unzweifelhaft in hohem Grade negativ geotropisch. Das letztere ist zunächst daraus zu schliessen, dass, wenn eine solche Spitze in eine abwärts geneigte Lage gebracht wird, so krümmt sie sich sogleich aufwärts. Das dauert aber in der Regel nur so lange, bis die Spitze in eine horizontale Lage gekommen ist. Wird eine starke, in horizontaler Ebene entstandene Krümmung in eine solche Lage gebracht, dass einzelne, die Krümmung bildende Stengeltheile abwärts gerichtet sind, so streckt sich die Krümmung bald gerade und der Stengel wird horizontal. Die horizontale Lage ist aber nicht etwa als eine der nutationsfähigen Spitze selbstständig eigene zu betrachten. Verschiedene Thatsachen zeigen vielmehr, dass eine wagerechte Spitze immer das Bestreben hat, sich aufzurichten und wird in ihrer Lage nur durch gewisse anderwärtige Umstände behalten. Bei den noch jungen und kurzen, symmetrisch nutirenden Stengelspitzen, bei denen die obere Stengelseite immer die am stärksten wachsende ist, hält dieses Wachsthum unmittelbar dem Geotropismus das Gleichgewicht und desto leichter als in Folge der Umdrehung der Spitze um ihre Axe, die jedesmalige geotropische Wirkung sehr geschwächt sein muss. Daher kommt es, dass noch junge, (in ihrer ganzen Länge stark wachsende) symmetrisch nutirende Spitzen gewöhnlich stark abwärts (bis 180°) gekrümmt sind. Wächst aber eine solche Spitze in die Länge und kommen somit ihre älteren, weniger energisch wachsenden Theile in horizontale Lage, so wird der Krümmungsbogen immer flacher und schliesslich wird die Spitze gerade. Ich werde gleich zeigen, dass selbst symmetrisch nutirende Stengelspitzen, trotz die Lage ihrer Seiten zum Horizonte rasch geändert wird, oft das energische Bestreben zeigen, sich aufwärts zu krümmen. Es muss also ihre eigene Schwere dazu helfen, sie in wagerechter Lage zu behalten, ebenso wie es gewiss eine Einwirkung der Schwere ist, welche das geotropische Geradestrecken einer älter werdenden Nutationskrümmung verhindert. — Was die asymmetrisch nutirenden Stengelspitzen betrifft, so ist es gewiss, dass ihre eigenthümlichen Bewegungen einerseits durch die horizontale Lage des unbeweglichen Stengels und andererseits durch den Einfluss des Geotropismus auf die bewegliche Spitze bestimmt werden. Ich brachte symmetrisch nutirende Pflanzen in horizontale Lage und sie nutirten jetzt asymmetrisch. Ein solcher Versuch ist in Fig. 3 abgebildet: nachdem die symmetrisch nutirende Spitze I aus der Lage *b*—*c* in die Lage *b*—*d* gekommen war, wurde der aufrechte Stengel *a*—*b* in horizontale Stellung gebracht, die concave Seite von *b*—*d* nach unten gekehrt. Die Spitze krümmte sich jetzt aufwärts, bis sie die Lage II *p*—*m* erreichte, um bei fortgesetzter Nutation bald in die Verlängerung des horizontalen Stengels, bald aufrecht, wie bei *f*, sich zu stellen. Wird aber, umgekehrt, der unbewegliche Stengeltheil einer asymmetrisch nutirenden Spitze in aufrechte Stellung gebracht, so geht die Nutation weiterhin in symmetrischer Weise vor sich. Der Umstand, dass eine asymmetrisch nutirende Stengelspitze nie unter die Horizontale heruntersinkt, wird also durch den Geotropismus bestimmt und der ganze Verlauf der Nutation, ist hier offenbar von demselben Factor abhängig. — Bei der asymmetrischen Nutation wird die Lage der verschiedenen Stengelseiten zum Horizonte verhältnissmässig nur wenig geändert, die Einwirkung des

Geotropismus auf die Unterseite muss hier somit in viel stärkerem Grade sich geltend machen. Es ist auch kein Zweifel, dass das energische Aufwärtskrümmen der Spitze in der aufsteigenden Nutationsphase zum grossen Theile wenigstens durch den Geotropismus mitbedingt wird. Das ist schon darin zu erkennen, dass die Aufwärtskrümmung gewöhnlich im älteren Theile der Spitze beginnt, während die Nutationsbewegungen im Gegentheil in den jüngeren Internodien energischer sind. Wenn dennoch die Spitze nicht dauernd in aufrechter oder nur wenig geneigter Lage sich zu erhalten vermag, sondern jedesmal wieder bis zur horizontalen Lage gesenkt wird, so kann dass schwerlich durch das selbstständig aufgetretene, beschleunigte Wachsthum der Oberseite allein erklärt werden. In diesem Falle wäre nämlich nicht zu ersehen, warum durch das Wachsthum der Oberseite die Spitze gerade in einer Lage stehen bleibt, wo sie der Einwirkung des Geotropismus am meisten ausgesetzt ist. Wird in der Reihe der Nutationskrümmungen das Wachsthum der Oberseite aus selbstständigen Ursachen eingeleitet, so muss doch die horizontale Lage der Spitze durch ihr eigenes Gewicht bestimmt werden, welches durch die Dehnung der Oberseite das Wachsthum derselben solange begünstigt, bis in der horizontalen Lage die Wirkung des Gewichtes durch den negativen Geotropismus aufgehoben wird. Dafür spricht die Thatsache, dass bei jeder beliebigen Neigung des unbeweglichen Stengels die nutirende Spitze jedesmal nur bis zur Horizontale heruntersinkt, was in verschiedenen Fällen eine verschiedene Verlängerung der Oberseite erfordert.

Aus einigen Thatsachen kann man sich unmittelbar überzeugen, dass es in der That zum grossen Theile wenigstens die Wirkung des Gewichtes ist welche bei einer, in horizontaler Lage befindlichen Stengelspitze das geotropische Aufwärtskrümmen derselben erschwert. — Wird eine horizontal gestreckte, gerade Stengelspitze aufrecht gestellt, oder noch besser in horizontaler Lage 180° um ihre Axe umgedreht, so entsteht gewöhnlich schon unmittelbar eine bedeutende Krümmung, wo die frühere Unterseite zur convexen Seite wird. — Ganz eigenthümlich ist aber ein gewisser Spannungszustand, welcher in Folge der entgegengesetzten Wirkungen des Gewichtes und des negativen Geotropismus in den Geweben einer horizontalen Stengelspitze sich einstellt und welcher schon bei verhältnissmässig schwachen mechanischen Eingriffen ausgelöst wird. Besonders leicht ist das an *Pharbitis hispida* zu beobachten. Wird eine ruhig gestandene Pflanze mit einer langen, symmetrisch nutirenden Spitze, den wiederholten schwachen Stössen ausgesetzt, so richtet sich der ältere, horizontal gewesene Stengeltheil in 20—30 Minuten aufwärts und nur die ganz junge Spitze bleibt gekrümmt. Dasselbe lässt sich auf verschiedene andere Weise, z. B. durch 15—20 Min. dauerndes Aufhalten der kreisförmigen Bewegung der Spitze durch ein in ihren Weg gestelltes Hinderniss (wenn auch in schwächerem Grade) hervorrufen; manchmal eine einzelne, leise Erschütterung der bisher ruhig gestandenen Pflanze genügt, um eine rasche Hebung der Spitze zu veranlassen, welche in wenigen Minuten bis 20—30° betragen kann. — Lässt man dann die Pflanze ruhig stehen, so senkt sich der aufgerichtete Stengeltheil in kurzer Zeit wieder zu seiner früheren Lage. — Bei den anderen beobachteten

Pflanzen, mit mehr weichen, biegsamen Stengeln rufen stärkere Stösse und Erschütterungen nicht diese Erscheinung hervor. Solche Aufwärtskrümmungen, wenn überhaupt, lassen sich hier im Gegentheil nur bei ganz schwachen Eingriffen beobachten. Bei *Ipomaea sibirica* konnte ich oft bei ganz vorsichtigem Uebertragen des Topfes um wenige Schritte Entfernung, oder nach einem ganz geringen Abwärtsbiegen der horizontalen Spitze, dieselbe unmittelbar sich so energisch aufwärts krümmen sehen, dass die Erscheinung an die stark reizbaren Organe erinnerte: die Bewegung wurde dem blossen Auge sichtbar und in weniger als zwei Minuten konnte die Gipfelknospe um 30—40° gegen den Horizont gehoben werden; in einem solchen Falle hat sich im Laufe der weiteren 20 Min. die horizontale Spitze beinahe vollständig aufgerichtet. Diese Erscheinung, welche bei günstigen Wachsthumsbedingungen und kräftigen, saftigen Pflanzen überhaupt leichter zum Vorschein kommt und bei den Manipulationen mit solchen Pflanzen gerade hinderlich sein kann, — zeigt, dass in der Unterseite einer horizontalen Spitze (in Folge ihres Geotropismus) fast immer die Bedingungen zum stärkeren Wachsthum gegeben sind, welches aber durch das Gewicht der Spitze verhindert wird. Wird aber durch mechanische Eingriffe die Elasticität (Dehnbarkeit) der Zellwände, vielleicht auch der moleculare Zustand des Zellplasmas in einer für das Wachsthum günstigen Weise geändert, so wird jetzt die in der Unterseite vorhandene Anlage sich geltend machen können. — Die betreffende Erscheinung zeigt andererseits, wie die Wachsthumsanlagen hier ausserordentlich rasch sich in wirkliches Wachsthum umsetzen können, — eine Eigenschaft, welche für die nutationsfähigen Stengelspitzen überhaupt charakteristisch ist. —

Heliotropismus der windungsfähigen Stengeln. Von Hugo v. Mohl wurde mit Bestimmtheit ausgesprochen, dass die Schlingpflanzen sich von den anderen auffallend durch ihren schwachen positiven Heliotropismus auszeichnen. Die Beziehung dieser Pflanzen zum Lichte hat H. v. Mohl wesentlich nur an den jungen Stengelspitzen beobachtet und gesehen, dass dieselben bei Umwinden breiter Stützen gern von der Schatten- nach der Lichtseite der Stütze, schwer aber nach der entgegengesetzten Seite sich wanden (l. c. S. 119—122), — also jedenfalls positiv heliotropisch waren. Dutrochet beobachtete deutlich den Einfluss des Lichtes auf den nutirenden Stengel von *Pisum sativum*, einen Einfluss, welcher sich darin zu erkennen gab, dass die Nutationskrümmung jedesmal stärker wurde, wenn sie der Lichtquelle zugekehrt war, was auf den positiven Heliotropismus des Stengels hinweist. — Die betreffenden Angaben von Ch. Darwin beziehen sich auf die relative Schnelligkeit der Nutation bei der Bewegung der Spitze zum Lichte und umgekehrt. Die Resultate von Darwin waren aber in dieser Beziehung auffallend verschieden. Von den vier an verschiedenen Pflanzen angestellten Beobachtungen zeigte sich in drei Fällen (bei *Hopfen*, *Ipomaea jucunda* und *Lonicera brachypoda*) eine schnellere Bewegung zum Lichte als von demselben hinweg. Während aber bei Hopfen die Differenz in der Schnelligkeit zwischen dem Halbkreise nach dem Lichte hin und von demselben weg nur 20 Min. betrug, so war bei *Lonicera brachypoda* diese Differenz nicht kleiner als 2 St. 46 Min. und bei *Ipom. jucunda* in einem Falle

selbst 3 St. 30 Min. (1 St. zum Lichte und 4 St. 30 Min. zurück). Andererseits fand Darwin bei *Ipom. purpurea* ein gerade entgegengesetztes Verhalten, indem die Bewegung nach dem Lichte hin langsamer erfolgte als in umgekehrter Richtung, wenn auch die Differenz hier 13—14 Min. nicht überstieg (l. c. S. 20, 22, 25).

Was den Einfluss des Lichtes auf die Schnelligkeit der Nutation betrifft, so muss hier offenbar die Lichtwirkung mit der heliotropischen Eigenschaft des Stengels überhaupt zusammenhängen und zwar in dem Sinne, dass die beschleunigte Nutation dem positiven Heliotropismus entspricht und umgekehrt. Dass aber die nutirenden Stengelspitzen wirklich heliotropisch sind, ist schon aus der angeführten Beobachtung von Dutrochet zu schliessen, einer Beobachtung, welche ich an *Pharbitis hispida, Ipomaea sibirica* und anderen Pflanzen vollkommen bestätigt fand. Ist nämlich die symmetrisch nutirende Spitze einer jungen Pflanze noch kurz, ihre Krümmung also von ihrem eigenen Gewichte noch wenig abhängig, so findet man allgemein, dass wenn die Concavität der Krümmung dem Lichte zugekehrt ist, so liegt die Krümmung bedeutend tiefer am Stengel als bei der entgegengesetzten Stellung, wo der untere, früher gekrümmte Stengeltheil sich jetzt vollständig aufrichtet. Jedenfalls muss der Heliotropismus einer in Nutation begriffenen Stengelspitze, wie schon H. v. Mohl bemerkte, wesentlich dadurch herabgedrückt werden, dass eine um den aufrechten Stengel symmetrisch nutirende Spitze successive alle ihre Seiten dem Lichte zuwendet. Die den unteren Schenkel der Krümmung bildende Stengelstrecke allein wird dabei nicht um ihre Axe gedreht und, wie schon gesagt, tritt auch der positive Heliotropismus dieses Theiles sehr deutlich hervor. Ueber die relative Geschwindigkeit der Nutationsbewegung zum Lichte und in umgekehrter Richtung habe ich die Beobachtungen an den symmetrisch nutirenden Stengelspitzen von *Polygonum Convolvulus*, *Pharbitis hispida* (= *Ipomaea purpurea*) und *Ipomaea sibirica* angestellt. Wie zu erwarten stand, habe ich in allen Fällen eine schnellere Nutation nach dem Lichte hin gefunden, allein der Unterschied in der Geschwindigkeit war immer nur ein geringer. Bei *Pharbitis* betrug dieser Unterschied 10 Min. (55 Min. und 45 Min.), bei *Ipomaea sibirica* 5 Min. bis 10 Min., bei *Polygonum Convolvulus* wurde er in einzelnen Nutationskreisen von 4 Min. bis 12 Min. gefunden (bei der Geschwindigkeit eines vollständigen Kreises von 1 St. 36 Min. bis 2 St. 6 Min.).

Bedeutend anderes muss in dieser Beziehung bei den asymmetrisch nutirenden Stengeln sich bemerklich machen, weil die nutirende Spitze dabei nicht um ihre Axe gedreht wird und in der aufsteigenden wie in der absteigenden Nutationsphase bleibt fortwährend fast dieselbe Seite dem Lichte zugekehrt. Der Einfluss des Lichtes auf die Geschwindigkeit der Bewegung kann sich hier darum viel schärfer aussprechen und die Angaben von Ch. Darwin über die so grossen Unterschiede in dieser Geschwindigkeit, wie die oben angeführten, sind wahrscheinlich eben auf diese Art der Nutation zu beziehen. Es ist aber weiter einzusehen, dass bei einem und demselben Objecte der Einfluss des Lichtes sich in verschiedener Weise bemerklich machen kann, je nachdem der horizontale Stengel, um welchen die Spitze nutirt dem Lichte zu oder von demselben abgekehrt ist. Die aufsteigende Phase

der Nutationsbewegung nimmt ja ohnedem mehr Zeit in Anspruch, als die absteigende. Wirkt nun das Licht in demselben Sinne wie das eigene Gewicht der Spitze (wenn nämlich der unbewegliche Stengeltheil nach der Lichtquelle hinschaut) so wird der Unterschied in der Schnelligkeit der beiden Halbumgänge dadurch noch vergrössert, im umgekehrten Falle natürlich vermindert. In diesem letzten Falle kann aber leicht geschehen, dass der betreffende Unterschied, — welcher ohne Einwirkung des Lichtes noch bedeutender wäre, — durch diese Einwirkung doch nicht vollständig aufgehoben wird und dann wird man finden, dass die Bewegung der Spitze vom Lichte weg schneller als in umgekehrter Richtung erfolgt. Meine Beobachtungen haben das direct erwiesen: so wurde z. B. bei einer asymmetrisch nutirenden Spitze von *Pharbitis hispida* der Halbumgang nach dem Lichte zu (aufwärts) in 50 Min. der zweite, vom Lichte weg (abwärts) in 35 Min. zurückgelegt. Andererseits wurde eine asymmetrisch nutirende Pflanze von *Ipomaea sibirica* (welche bei symmetrischer Nutation nur die oben angegebenen, ganz unbedeutenden Differenzen ergab) bei den Umständen beobachtet, dass der unbewegliche Stengeltheil nach der Lichtquelle hin gerichtet war. Jetzt ergab sich Folgendes:

1-er Halbumgang, —	vom Lichte weg und aufwärts	wurde in	1	St.	25	Min.	
2-er »	dem Lichte zu, abwärts	»	» —	»	35	»	
3-er »	vom Lichte weg, aufwärts	»	» 1	»	15	»	gemacht.

Der positive Heliotropismus der jüngeren Stengeltheile ist, wie oben angegeben wurde, bei den Schlingpflanzen allgemein leicht zu constatiren. Für die älteren noch wachsenden Stengeltheile ist es aber in der Regel nicht mehr der Fall und es ist darum schon H. v. Mohl an einigen Schlingpflanzen aufgefallen, dass ihre Stengel bei einseitiger Beleuchtung sich nicht dem Lichte zukrümmen (l. c. S. 119). Der entschieden positive Heliotropismus in den nicht mehr nutirenden Stengeltheilen ist in der That bei den Schlingpflanzen nur ausnahmsweise zu finden. Einen solchen Fall scheint nämlich *Ipomaea sibirica* zu bieten, bei welcher Pflanze in der Regel die dauernde Krümmung des Stengels nach dem Lichte hin gerichtet ist. Ich darf aber nicht behaupten, dass auch hier diese Richtung der Krümmung den heliotropischen Eigenschaften des gekrümmten Stengels wirklich entspricht, denn bei dünnen und biegsamen Stengeln dieser Pflanze wird eine im positiv heliotropischen Theile nach dem Lichte hin einmal entstandene Krümmung nur schwer wieder ausgeglichen werden können. — Von den anderen von mir beobachteten Pflanzen konnte an *Menispermum dahuricum* und *Boussingaultia baselloides* kein ausgesprochener Heliotropismus der älteren Stengeltheile constatirt werden; *Dioscorea Batatas* und *D. Decaisneana* zeigten sich schon deutlich negativ heliotropisch. Die meisten Schlingpflanzen sind aber in ihren älteren Stengeltheilen ganz entschieden negativ heliotropisch. Besonders starken negativen Heliotropismus zeigte mir *Pharbitis hispida* (= *Ipomaea discolor*, *purpurea*) und vor allem die unteren, kurzen auf das hypocotyle Glied (welches selbst in demselben Grade positiv heliotropisch ist) folgenden Internodien dieser Pflanze, welche bei einseitiger Beleuchtung in fast

horizontaler Lage nach der Schattenseite hin wachsen. Spätere, lange Internodien, wenn sie älter geworden sind, zeigen fast dasselbe und darum die Stengel, welche längere Zeit ohne Stütze gewachsen sind, findet man sämmtlich in horizontaler Lage (Fig. 2) nach der Schattenseite gerichtet. Fast in demselben Grade ist der negative Heliotropismus an *Polygonum Convolvulus* und zwar ebenso gut am Hauptstengel, wie an den zahlreichen Seitentrieben zu beobachten, welche letztere in Folge der Epinastie (mit dem negativen Geotropismus combinirt) selbstständig in horizontaler Lage[1]) und zwar nach der Schattenseite hin wachsen. Den starken negativen Heliotropismus besitzen ebenfalls die Stengel von *Dioscorea sinuata* und einer anderen, unbestimmten, aber ebenfalls rechts windenden *Dioscorea*. Entschieden negativ heliotropisch ist auch *Ipomaea* (*Operculina*) *tuberosa*, besonders die kräftigen, von den unterirdischen Stengeltheilen treibenden Sprossen dieser Pflanze. Den Hopfen konnte ich nur im Freien beobachten; soweit aber bei diesen wenig günstigen Bedingungen zu entscheiden war, scheinen die Stengel dieser Pflanze ebenfalls den ausgesprochenen negativen Heliotropismus zu besitzen.

Bei der so beschränkten Verbreitung, welche die Erscheinung des negativen Heliotropismus im Pflanzenreiche überhaupt aufweist, muss die Thatsache seines fast allgemeinen Vorkommens eben bei den Pflanzen mit einer eigenthümlichen Lebensweise unmittelbar auf die Vermuthung führen, dass es für sie nicht ohne Bedeutung ist. Unzweifelhaft muss hier diese Bedeutung bei dem Aufsuchen einer Stütze sich geltend machen, denn in Folge seines negativen Heliotropismus richtet sich der horizontale, mit tentakelartig beweglicher Spitze versehene Stengel einer windungsfähigen Pflanze nach derjenigen Seite, welche durch einen vorstehenden (womöglich als Stütze brauchbaren) Gegenstand am meisten beschattet ist.

Verhalten einer der Wirkung der Schwerkraft entzogenen Stengelspitze.

Schwendener hat bereits die Thatsache angegeben, dass wenn man eine um eine Stütze windende Pflanze in horizontaler Lage langsam um ihre eigene Axe rotiren lässt, so hört sie auf weiter zu winden, die jüngsten schon gebildeten Windungen rollen sich wieder ab und der Stengel wächst mehr oder weniger gerade der Stütze entlang (l. c. S. 1088). Schwendener glaubte aber, dass die Stengelspitze dabei in ihrer normalen Weise nutirt und wenn dennoch kein Winden zu Stande kam, so hat er den weiteren Schluss gezogen, dass der Geotropismus des Stengels ein nothwendiger Factor des Windens ist. Die Thatsache selbst wurde mir schon seit langer Zeit bekannt, ihre Bedeutung konnte

1) Bei langsamer Rotation der Pflanze in horizontaler Lage um ihre eigene Axe krümmen sich die Seitentriebe sehr energisch abwärts.

ich mir aber erst klar machen, nachdem ich den Einfluss der Schwerkraft auf die kreisförmige Nutation selbst genau studirt habe. Diese Untersuchungen zeigten mir nun, dass die Pflanzen bei den angegebenen Bedingungen deshalb nicht winden können, weil sie dabei nicht fähig sind ihre kreisförmigen Nutationsbewegungen regelmässig durchzumachen. — Meine Beobachtungen wurden zunächst an den frei nutirenden Stengelspitzen angestellt. Zu diesem Zwecke wurde die Pflanze, sammt ihrem Topfe, in die Verlängerung einer horizontalen Axe befestigt, welche etwa eine Umdrehung in der Minute machte[1]). Der ältere, nicht mehr nutirende Stengeltheil wurde angebunden, die bewegliche Spitze allein frei gelassen. Es wurden zu diesen Versuchen immer solche Pflanzen ausgesucht, deren Stengel möglich stark und die gekrümmte (nutirende) Spitze möglich kurz war, so dass diese letztere, wenn ihre Krümmungsebene auf die Seite gelegt wurde, nur ganz unbedeutend durch ihre eigene Schwere heruntersank[2]). Um den allenfalls möglichen Zweifel zu beseitigen, ob nicht die bei dem Rotiren des Stengels beobachteten Erscheinungen durch Biegungen und Zerrungen der Spitze hervorgerufen werden, habe ich die später anzuführenden Versuche angestellt, welche ergaben, dass selbst viel stärkere Biegungen einer nutirenden Spitze nach allen Richtungen an sich nicht im Stande sind, den regelmässigen Verlauf der Nutation in wesentlicher Weise zu stören. — Lässt man aber einen nutirenden Stengel in horizontaler Lage langsam rotiren, so hört in mehr oder weniger kurzer Zeit die regelmässige kreisförmige Bewegung der Spitze auf; die ursprüngliche Nutationskrümmung wird dabei öfter ausgeglichen, der Stengel bleibt aber nicht gerade, sondern es treten gleichzeitig höher oder tiefer an demselben Krümmungen nach anderen Richtungen auf. Diese Krümmungen können bald unbeweglich bleiben, bald ihre Ebene langsam und zwar ohne Unterschied in der einen oder der anderen Richtung im Kreise bewegen. — Um eine objective Vorstellung von der Art und Weise der Bewegungen einer der Wirkung der Schwerkraft entzogenen Stengelspitze zu geben, will ich hier ein Paar Versuche näher beschreiben:

1) Ein kräftiger Steckling von *Ipomaea tuberosa*, dessen Stengel, etwa 14 Cent. lang, so angebunden wurde, dass nur die ca. 8 Cent. lange, nutirende Spitze frei blieb (nutirt nach links). — Bei den Angaben über die Veränderungen in der Lage der Stengelspitze, werde ich mir jedesmal die Pflanze aufrecht stehend denken und zwar so, dass ihre gesenkte Spitze von dem Beobachter abgewendet ist.

1) Die Axe meines Klinostaten wird nicht, wie üblich, stossweise durch ein Uhrwerk, sondern ganz gleichmässig mittelst eines zu diesem Zwecke angepassten elektromagnetischen Motors von Stöhrer in Bewegung gesetzt.

2) Diese Bedingung kann bei gewissen Pflanzen leichter als bei anderen erfüllt werden: so, die schon erwähnten, unter dem Namen von Ipom. chrysantha bezogenen Samen liefern sehr dicke Keimstengel, deren Spitze sich senkt und zu nutiren anfängt wenn die gesammte Stengellänge etwa 8—10 Cm. nicht übertrifft; sehr geeignet sind auch starke Wurzeltriebe von Ipomaea (Operculina) tuberosa (hort. bot. Kiew.), welche als Stecklinge sich rasch einwurzeln und zu wachsen fortfahren; steif genug für die betreffenden Versuche zeigen sich meistentheils auch kräftige junge Pflanzen von Pharbitis hispida oder Ipomaea sibirica, so lange ihre nutirende Spitzen noch keine bedeutende Länge erreicht haben.

10 **Minuten** nach dem Beginn des Versuches. Die Krümmungsebene hat sich inzwischen um etwa 25° nach links bewegt. Die Krümmung ist bedeutend schwächer geworden.

15 **Minuten später.** Unmittelbar unter der ursprünglichen Nutationskrümmung hat der bis jetzt gerade Stengeltheil eine Krümmung nach links erhalten, wodurch die Ebene der ursprünglichen Krümmung in derselben Richtung verschoben und etwas auf die Seite gelegt wurde.

10 **Minuten später.** Die neue Krümmung hat sich verstärkt, die ursprüngliche dagegen ausgeglichen, so dass jetzt die ganze Krümmung wieder in einer und derselben Ebene liegt.

20 **Minuten später.** Die Krümmungsebene hat sich um ca. 30° nach links bewegt.

15 **Minuten später.** Die Krümmungsebene hat sich um weitere 20—25° nach links verschoben.

15 **Minuten später.** Die Krümmung ist beinahe 90° stark; ihre Ebene hat sich um etwa 15° weiter nach links bewegt.

15 **Minuten später.** Die Krümmungsebene ist unbeweglich geblieben. Der gerade, horizontale (bei der aufrecht gedachten Pflanze) Theil der Spitze hat eine schwache Krümmung nach rechts erhalten.

15 **Minuten später.** Die Ebene der Nutationskrümmung hat sich um ca. 15° nach **rechts** bewegt. Die Krümmung des horizontalen Theiles der Spitze hat sich inzwischen wieder ausgeglichen.

20 **Minuten später.** Die Krümmungsebene hat sich sehr unbedeutend weiter nach rechts bewegt. Im horizontalen Theile der Spitze ist eine der vorigen umgekehrte Krümmung, — nach links, entstanden.

25 **Minuten später.** Die Ebene der Nutationskrümmung hat sich wieder zurück, nach links um etwa 10—15° verschoben.

30 **Minuten später.** Die Krümmung des horizontalen Theiles ist nochmals verschwunden. Die Ebene der Nutationskrümmung hat sich um weitere 25° nach links fortbewegt.

25 **Minuten später.** Die Krümmungsebene hat sich nur um etwa 10° weiter nach links verschoben. Die Krümmung ist beinahe 90° stark und sehr regelmässig.

30 **Minuten später.** Die Krümmungsebene hat inzwischen nur eine ganz geringe Verschiebung, vielleicht um etwa 5° nach links erfahren.

2) Eine junge Pflanze von *Ipomaea sibirica*, welche erst unlängst zu nutiren begann (nutirt nach links). Die gekrümmte Stengelspitze hat etwa 5 Cent. Länge und ist so steif, dass sie beim Umdrehen in horizontaler Lage keine passive Biegungen erkennen lässt.

20 Minuten nach Beginn des Versuches. Die ursprüngliche Krümmung hat ihre Ebene kaum selbstständig verändert; unterhalb dieser Krümmung hat aber der Stengel eine neue Krümmung nach links erhalten, wodurch auch die Spitze in derselben Richtung fortgeführt wurde.

25 Minuten später. Die neue Krümmung ist stärker geworden, die ursprüngliche dagegen schwächer.

15 Minuten später. Die Ebene der neuen Krümmung hat sich um ca. 15° nach links bewegt.

15 Minuten später. Die alte Krümmung ist ganz verschwunden, die jetzt bestehende ist 90° stark und hat ihre Ebene um weitere 15° nach links vorgeschoben.

15 Minuten später. Die Krümmungsebene ist ganz unbeweglich geblieben.

15 Minuten später. Die Krümmungsebene ist ganz unbeweglich geblieben.

15 Minuten später. Die Krümmungsebene bleibt immer noch ganz unbeweglich, die Krümmung selbst ist aber schwächer geworden.

15 Minuten später. Die Krümmungsebene hat sich um etwa 15° nach rechts bewegt.

15 Minuten später. Die Krümmungsebene ist unbeweglich geblieben; oberhalb der jetzt bestehenden, etwa an der Stelle wo die ursprüngliche Nutationskrümmung sich befand, ist jetzt eine bedeutende Krümmung nach rechts entstanden.

15 Minuten später. Die Krümmungen haben ihre Ebenen nicht verändert, die obere Krümmung ist aber stärker geworden.

15 Minuten später. Die obere Krümmung ist scheinbar ganz unverändert geblieben, die untere hat ihre Ebene unbedeutend nach links verschoben.

15 Minuten später. Alles unverändert.

30 Minuten später. Die obere Krümmung ist wieder verschwunden, die untere bleibt ganz unbeweglich.

In den beiden angeführten Versuchen ist also das Verhalten der Stengelspitze fast das nämliche gewesen: 1—1½ Stunden nach dem Beginn des Versuches ist die normale Nutation noch deutlich, wenn auch immer langsamer vor sich gegangen; dann ist ein (im 2ten Versuche 1 Stunde lang dauernder) Stillstand eingetreten, worauf eine unbedeutende Bewegung in umgekehrter Richtung erfolgte und schliesslich nochmals eine sehr langsame, normale Nutation sich zu erkennen gab, welche letztere aber bald wieder aufhörte. Das Verhalten der einzelnen, sich scheinbar sehr ähnlichen Pflanzenindividuen war aber bei verschiedenen Versuchen im einzelnen sehr ungleichmässig. In einigen Fällen hörte die regelmässige Nutation fast unmittelbar oder in kurzer Zeit (½ bis 1 Stunde) nach Beginn des Versuches auf, während sie in den anderen bei 3-stündiger Versuchsdauer immer noch ziemlich rasch vor sich ging. Das Aufhören der kreisförmigen Nutation erfolgte bald ziem-

lich plötzlich, öfter aber ganz allmählich, bis der Stillstand eingetreten war. Behielt dabei, — wie in den angeführten Versuchen, die Spitze eine mehr oder weniger starke Krümmung, so trat sehr oft in derselben nach dem Aufhören der Nutation in der normalen Richtung eine Bewegung der Spitze in der entgegengesetzten Richtung ein. Diese umgekehrte Bewegung war aber in der Regel nur langsam und kurzdauernd und nur in einem Falle, — bei einer jungen Pflanze von *Pharbitis hispida*, wurde während $1\frac{1}{2}$ Stunden eine ununterbrochene Bewegung der Spitze nach rechts beobachtet, wodurch aber die Spitze nur um etwa 50° in der bezeichneten Richtung fortgeführt wurde. Starke (bis 90° betragende) Krümmungen der Spitze blieben in einigen beobachteten Fällen bis 2 Stunden lang ganz unbeweglich, doch auch bei länger fortgesetzten Versuchen konnte ich in keinem Falle das vollständige Aufhören jeder kreisförmigen Bewegung constatiren. Wenigstens bei 24stündiger Versuchsdauer kamen nur immer dieselben Erscheinungen zum Vorschein, d. h. soweit eine stärkere Krümmung der Spitze längere Zeit bestehen blieb, lag ihre Ebene bald unbeweglich, bald wurde sie langsam und eine kurze Strecke weit nach der einen oder anderen Richtung verschoben. —

In den oben beschriebenen Versuchen blieb wesentlich eine und dieselbe Krümmung während der ganzen Versuchsdauer bestehen; nur der Theil der Spitze oberhalb der Hauptkrümmung machte in beiden angeführten Fällen schwächere Krümmungen nach links oder rechts, welche in kurzen Zeiträumen ihre Richtung in derselben Ebene änderten. Solches Verhalten ist aber keineswegs eine allgemeine Regel. Es ist vielmehr, wie schon oben gesagt, eine sehr häufige Erscheinung, dass die Nutationskrümmung nach einer mehr oder weniger kurzer Dauer allmählich ausgeglichen wird und es entsteht höher oder tiefer am Stengel eine neue Krümmung, welche nach einiger Zeit ebenso verschwinden und durch noch andere ersetzt werden kann. Die Richtung, nach welcher successive Krümmungen gebildet werden, ist keine bestimmte, doch muss ich hervorheben, dass meistentheils die sich unmittelbar nachfolgenden Krümmungen in derselben Ebene aber nach gerade entgegengesetzten Seiten und in verschiedenen Höhen des Stengels entstehen. Gewöhnlich bleibt dabei die einmal gebildete Krümmung noch bestehen, während oberhalb oder unterhalb derselben eine andere, nach entgegengesetzter Richtung gebildet wird, in Folge dessen der Stengel eine *S*-förmige Krümmung erhält. Diese Erscheinung ist offenbar von derselben Natur wie diejenige, welche von Wiesner an den Keimstengeln verschiedener Dicotyledonen bemerkt und mit dem Namen der undulirenden Nutation bezeichnet wurde[1]). In Folge dieser undulirenden Nutation, welche bei den betreffenden Bedingungen die kreisförmige Nutation der windungsfähigen Stengel zum grössten Theile ersetzt, kommt es oft vor, dass nach dem längere Zeit fortgesetzten Rotiren der Stengel nach verschiedenen Seiten unregelmässig verbogen erscheint. —

Die Unbeständigkeit im Verhalten verschiedener Pflanzenindividuen, welche sie an den

---

1) Sitzungsber. der Wiener Akademie der Wiss. Bd. 77, p. 15.

Klinostaten gebracht im einzelnen erkennen lassen, in Verbindung mit dem Umstande, dass die kreisförmige Nutation wenn auch wesentlich gestört doch nicht (wenigstens bei der Dauer meiner Versuche) vollständig aufgehoben wird, würden vielleicht im Stande sein, einiges Bedenken in Betreff der Deutung der beschriebenen Erscheinungen zu erwecken. Könnte es aber im voraus als möglich erscheinen, das dabei oft zu beobachtende Ausgleichen und Wechseln der Krümmungen den rein mechanischen Einflüssen zuzuschreiben, so wären doch dadurch kaum die Fälle zu erklären, wo starke Krümmungen stundenlang unverändert bleiben, ohne eine merkliche kreisförmige Nutation erkennen zu lassen. — Durch besondere Versuche konnte ich mich aber unmittelbar überzeugen, dass die mechanischen Biegungen der nutirenden Stengelspitze nach allen Richtungen keineswegs dieselben Effecte hervorbringen, wie wir sie oben kennen gelernt haben. Bei diesen Versuchen wurden die Pflanzen in normaler Lage den Stössen ausgesetzt, welche ihnen durch den Pendel eines starken Uhrwerks bei jedem Hin- und Hergang des Pendels ertheilt wurden. An der Stange des Pendels wurde ein loser Büschel Schweinborsten befestigt, welcher den aufrechten Stengel unterhalb der Nutationskrümmung anschlug. Die überhängende Stengelspitze gerieth auf diese Weise in unaufhörliche und meistens ziemlich heftige Schwingungen, desto mehr als zu diesen Versuchen absichtlich die Pflanzen mit langen und schweren Spitzen gewählt wurden. Die Pflanze wurde gewöhnlich so gestellt, dass die Stösse auf die Krümmungsebene der Spitze seitlich gerichtet wurden, wodurch die Biegungen der Spitze hauptsächlich dieselbe Richtung erhielten, als wenn die Pflanze in horizontaler Lage umgedreht wäre. Das Resultat dieser Versuche war immer nur ein negatives. Bei stundenlang fortgesetzten Stössen konnte keine wesentliche Störung in der kreisförmigen Nutation beobachtet werden. Nur in der ersten Zeit war oft eine mehr oder weniger bedeutende Verlangsamung der Nutation zu constatiren, so dass der erste Nutationskreis etwa $1/2$—$3/4$ Stunde mehr Zeit erforderte, als die folgenden, welche mit normaler Geschwindigkeit zurückgelegt wurden (*Ipomaea sibirica*, *Pharb. hispida*, *Polygon. Convolvulus*). Bei einigen Versuchen, welche 4—5 Stunden gedauert haben, hat die Spitze beinahe 3 Nutationskreise beschrieben; ein Stillstand oder eine Umkehrung der Bewegung ward dabei ebenso wenig wie eine undulirende Nutation des Stengels zu beobachten. — *Pharbitis hispida* zeigte dabei nur dasjenige Aufrichten des älteren Theiles der nutirenden Spitze, von dem schon oben (S. 20) gesprochen wurde. —

Lässt man eine Pflanze, welche eine Stütze schon umwunden hat, am Klinostaten in horizontaler Lage langsam rotiren, so werden allmählich, wie schon Schwendener angegeben hat, die letzten 1 bis $1\frac{1}{2}$ Windungen abgerollt und das weitere Winden kommt nicht zu Stande. Es wird dabei nur diejenige Stengelstrecke zurückgerollt, welche nutationsfähig war und thatsächlich nutirte; etwas ältere Theile, welche bei normalen Bedingungen ihre Lage an der Stütze nicht mehr änderten, — bleiben auch jetzt unverändert. Das Abrollen selbst geschieht auf die Weise, dass die Krümmungen des gewundenen Stengels allmählich schwächer und zugleich steiler werden, d. h. sich der Stütze entlang zu stellen suchen. Mit dem Strecken der Windungen ist oft gleichzeitig, bevor noch die Spitze frei geworden ist,

eine homodrome Torsion des sich streckenden Theiles zu beobachten; nachdem aber die Spitze sich von der Stütze vollständig befreit hat, kann diese Torsion im Laufe von wenigen Minuten manchmal bis 180° gesteigert werden. — Das Geradestrecken der Windungen kommt hier offenbar in Folge der Ausgleichung der Nutationskrümmungen zu Stande, wie wir eine solche Erscheinung schon oben an den frei nutirenden Stengelspitzen kennen gelernt haben. Der andere Umstand, welcher bei den betreffenden Bedingungen wahrscheinlich das Freiwerden der Spitze erleichtert, ist die Ausgleichung der in derselben schon vorhandenen antidromen Torsion. Wie schon Schwendener erkannte, erhalten die Stengel bei ihrem Winden immer eine antidrome Torsion, welche hier durch rein mechanische Ursachen bedingt wird und darum immer die Neigung hat, bei Aufhören dieser Ursachen sich wieder auszugleichen. Später werden wir sehen, dass diese Torsion wesentlich in Folge der Nutationsbewegungen der windenden Stengelspitze entsteht; da nun aber die kreisförmige Nutation einer der Schwerkraftwirkung entzogenen Stengelspitze beinahe aufhört, so wird die erhaltene Torsion suchen, sich jetzt auszugleichen, — was das Herabziehen der Spitze von ihrer Stütze beschleunigen kann. Dass die Verlangsamung (oder Stillstand) der kreisförmigen Nutation und die damit verbundene Streckung der Krümmungen eine theilweise Ausgleichung der antidromen Torsion wirklich ermöglicht, ist aus der oben angegebenen Thatsache zu schliessen, wo an den sich streckenden Windungen eine (scheinbare, durch Ausgleichung der antidromen entstehende) homodrome Torsion noch vor dem vollständigen Befreien der Spitze zu constatiren ist, während Schwendener gezeigt hat (siehe unten), dass mit dem Steilerwerden der Windungen die antidrome Torsion einer Spirale sich im Gegentheil vergrössern muss. —

Die Versuche mit gewundenen Stengeln sind besonders beweisend. Gewöhnlich bleibt hier die Spitze während des Versuches mit ihrer Endknospe fest an die Stütze angedrückt, bis sie schliesslich beim Strecken der Windungen passiv von derselben herabgezogen wird. In diesem Falle kann also von den mechanischen Zerrungen in den Geweben der Spitze in Folge ihrer eigenen Schwere nicht die Rede sein, wodurch aber die Erscheinungen keineswegs geändert werden. Fast dieselbe Ueberzeugung kann man gewinnen, wenn der Versuch mit einer freien aber ganz nahe, etwa 3—4 Cent. von ihrem Ende unbeweglich befestigten Spitze angestellt wird. Später werden wir sehen, dass bei den normalen Bedingungen eine in dieser Weise befestigte Spitze etwas eigenthümliche Krümmungen bildet, welche aber wesentlich Nutationskrümmungen sind. Diese Krümmungen bleiben nun ebenfalls ganz aus, wenn man die so vorgerichtete Pflanze am Klinostaten hat rotiren lassen. —

Durch die oben angeführten Thatsachen glaube ich gezeigt zu haben, dass die kreisförmige Nutation der windungsfähigen Stengel in einer gewissen Beziehung zum Geotropismus dieser Stengel steht und dass eine regelmässige kreisförmige Nutation nur bei der Einwirkung der Schwerkraft auf die gesenkte Spitze zu Stande kommt. Ohne solche Einwirkung und als eine Grundform der Nutation kommt nur eine Art undulirender Nutation zum Vorschein.

Dieser Satz kann noch nicht durch die Thatsache umgestossen werden, dass nach 48-stündiger ununterbrochener Rotation (länger dauerten einzelne meiner Versuche nicht) immer noch zeitweise eine (wenn auch nur sehr langsame und wenig regelmässige) kreisförmige Nutation sich zu erkennen giebt. Diese Nutation kann hier als eine «Gewohnheit» erklärt werden, denn wir kennen schon mehrere derartige Erscheinungen des Pflanzenlebens, welche nach dem Aufhören der sie unmittelbar bedingenden Factoren noch eine Zeit lang selbstständig dauern, ja sogar während längerer Zeit sich periodisch wiederholen können. Es wäre darum zu erwarten, dass nach längere Zeit (vielleicht wochenlang) dauerndem Wachsen ausserhalb der Einwirkung der Schwerkraft die Stengel schliesslich ihre Gewohnheit verlieren und die kreisförmige Nutation vollständig einstellen würden. Leider waren meine Apparate zu solchen langdauernden Versuchen nicht geeignet. — Sehr bezeichnend ist hier die Thatsache, dass man oft verschiedene Uebergänge zwischen der kreisförmigen und der undulirenden Nutation beobachten kann. Diese Uebergänge werden durch die Bildung neuer Krümmungen vermittelt, welche in bestimmter Reihenfolge um den Stengel herum entstehen, so dass die Spitze dadurch wenn auch sprungweise doch einen im Ganzen kreisförmigen Weg beschreibt. Je grösser ist der seitliche Abstand zwischen den successiven Krümmungen, desto mehr die Bewegungen der Spitze an die undulirende Nutation nahe kommen und wenn dieser Abstand 180° beträgt, so wird die Spitze nur hin und her in derselben (durch die Stengelaxe gelegten) Ebene sich bewegen. —

Die Rotationsversuche mit den frei nutirenden Pflanzen gestatten auch eine gewisse Einsicht in die Frage über den möglichen physiologischen Zusammenhang zwischen der normalen (mit der Richtung der Nutation gleichläufigen) Torsion des Stengels und seiner kreisförmigen Nutation. Gegen einen solchen Zuzammenhang scheint zwar der Umstand zu sprechen, dass bei vielen Rankenpflanzen, welche regelmässig nutiren, doch keine Torsion am Stengel entsteht. Andererseits aber die Thatsache, dass alle windungsfähigen, frei nutirenden Stengel in ihren älteren Theilen jedesmal eine Torsion erhalten, deren Richtung mit derjenigen der Nutation immer gleichsinnig ist[1]) lässt die Möglichkeit einer nahen Beziehung zwischen diesen Erscheinungen als wahrscheinlich betrachten. An den der Wirkung der Schwerkraft entzogenen Pflanzen ist nun aber zu beobachten, dass die normale Torsion ihrer Stengel ebenso gut vor sich geht, als bei gewöhnlichen Bedingungen. Die eintretende Torsion hängt in keiner Weise mit mehr oder weniger regelmässigen kreisförmigen Bewegungen der Spitze zusammen. Bei solchen Stengelspitzen, welche wesentlich nur un-

---

1) Die von Ch. Darwin (l. c. p. 6) angeführte (und von Hugo de Vries wiederholte) vermeintliche Angabe von L. Léon, welcher bei einer Varietät von Phaseolus multiflorus eine der Nutationsrichtung constant gegenläufige Torsion beobachtet haben soll, beruht insofern auf Missverständniss als die Angaben von Léon in seinem unklaren Aufsatze offenbar sowohl auf die windenden als die frei nutirenden Stengel sich ohne Unterschied beziehen. So sagt der genannte Autor (Bull. de la Soc. botan. de France T. V, 1858, p. 629): «La torsion des axes . . . . est très variable et, le plus souvent, en sens inverse de la volubilité». Es ist aber nirgends gesagt ob zwischen windenden und frei nutirenden Stengel ein Unterschied in dieser Beziehung zu bemerken sei.

regelmässige Hin- und Herkrümmungen, die kreisförmige Nutation aber meistentheils in umgekehrter Richtung zeigten, traten dennoch energische Torsionen ein, deren Richtung jedesmal die für die Pflanze normale war. Selbst nach 48-stündiger Versuchsdauer, bei fast vollständigem Fehlen der kreisförmigen Nutation können in derselben Weise Torsionen in immer jüngeren Internodien beobachtet werden. Es scheint mir sogar, — soweit es ohne genaue vergleichende Beobachtungen zu urtheilen ist, — dass an den der Rotation unterworfenen Stengeln die normale Torsion energischer und auch schon früher (in jüngeren Internodien) eintritt als es sonst zu geschehen pflegt.

Krümmungen eines innerhalb seiner nutationsfähigen Region festgehaltenen Stengels.

Hugo de Vries hat schon die Beobachtung gemacht, dass wenn eine nutirende Stengelspitze in ihrem horizontalen Theile auf irgend eine Weise festgehalten wird so krümmt sich ihr äusseres, freigebliebenes Ende derartig, dass es die Form einer aufsteigenden Spirale erhält. In einzelnen Fällen ist es Hugo de Vries dabei gelungen $\frac{1}{2}$ bis $1\frac{1}{2}$ Windungen einer frei entstandenen Spirale zu erhalten (l. c. S. 324). Der genannte Autor hat aber nicht versucht die betreffende Erscheinung näher zu studiren und seine Mechanik womöglich zu beleuchten und begnügte sich mit der schon oben besprochenen Hypothese wonach die Bildung der freien Spirale durch die Nutation der Spitze in senkrechter Ebene und die eigene Schwere dieser Spitze gleichzeitig bestimmt wird. So ist es auch geschehen, dass eine sehr wichtige aber von Hugo de Vries nicht näher beleuchtete Thatsache bei späteren Forschern (Schwendener) keine gehörige Beachtung gefunden hat.

Es handelt sich darum die Erscheinungen kennen zu lernen, welche eine innerhalb seiner nutationsfähigen Strecke festgehaltene Stengelspitze darbietet. Dabei ist zu beachten, dass bei den symmetrisch nutirenden Stengeln der sämmtliche in horizontaler Lage befindliche Theil nutationsfähig ist. Bei der asymmetrischen Nutation liegt hingegen auch der ältere, schon unbewegliche Stengeltheil ebenfalls horizontal und das Festhalten an diesem Theile wird natürlich die Bewegungen der nutirenden Spitze in keiner Weise beeinflussen können. Andererseits sind die Krümmungen, welche das frei gebliebene Ende einer in seiner nutationsfähigen Region festgehaltenen Stengelspitze bildet, etwas verschieden je nachdem diese Spitze in horizontaler oder verticaler Stellung fixirt wird. Auch ist die Schärfe der zu beobachtenden Erscheinungen gradweise verschieden je nachdem die nutirende Spitze nur wenige Centimeter rückwärts von der Endknospe oder in ihrem älteren Theile festgehalten wird, dessen Nutationsfähigkeit schon geringer ist. — Bei meinen Versuchen wurde der Stengel meistentheils in einen kleinen (ca. 6 Mil. breiten), mit Kork ausgefutterten Halter eingeklemmt. Der (übrigens ganz unbedeutende) auf den Stengel ausge-

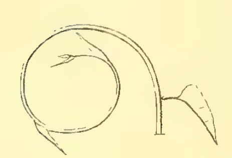
übte Druck hat dabei gewiss keinen Einfluss auf die Natur und den Verlauf der zu besprechenden Erscheinungen, denn diese Erscheinungen wiederholen sich in ganz derselben Weise wenn statt eingeklemmt zu werden, der Stengel mittelst eines an seiner Seite angebrachten Tropfen dicken, rasch trocknenden Leim (aus Gummi und Gelatine bestehend) unbeweglich fixirt wird. — Im folgenden ist die Richtung der Krümmungen nach den Himmelsgegenden bezeichnet wobei jedesmal vorausgesetzt wird, dass der Beobachter nach N hinschaut und den zu beobachtenden Object vor sich hat. Den Figuren ist jedesmal eine Windrose beigegeben, welche die Stellung des Beobachters angiebt. Wo ich bei einem mehr weniger horizontalen Stengel von rechts und links spreche denke ich mir immer die Spitze von dem Beobachter abgewendet.

Krümmungsfähigkeit in horizontaler Ebene. Wir müssen vor allem die Eigenschaft der nutationsfähigen Spitze kennen lernen in horizontaler Ebene sich in der Richtung der Nutation zu krümmen, — eine ganz specielle Eigenschaft, welche für das Umwinden der Stütze maassgebend ist.

Wird eine gerade, horizontale Stengelspitze an einer Stelle ca. 5—6 Cent. weit von der Endknospe unbeweglich festgehalten so beginnt der freigebliebene Theil sofort in horizontaler Ebene und in der Richtung der Nutation (also bei einer linkswindenden Pflanze — nach links; diese Richtung der Krümmung werde ich der Kürze halber als eine homodrome bezeichnen) sich zu krümmen. Diese Krümmung, welche in der Regel in einem jüngeren Theile der Spitze beginnt geht von hier allmälig auf immer ältere Theile der freien Spitze über. In Fig. 8, I sind z. B. zwei successive Stadien solcher Krümmung bei einer festgeklebten Spitze von *Ipom. sibirica* abgebildet. Die Erscheinung ist überhaupt dieselbe wie man jedesmal bei der asymmetrischen Nutation einer Spitze vor sich gehen sieht. Auch wie dort kommt bald zu der Krümmung in horizontaler Ebene eine Aufwärtskrümmung der Spitze hinzu wodurch die Krümmungsebene allmälig in eine schiefe Stellung gebracht wird während die horizontale Krümmung inzwischen sich immer enger zusammenzieht. Wird nun der fixirte Stengel von Zeit zu Zeit so um seine Axe umgedreht, dass die schief aufsteigende Krümmungsebene wieder horizontal gestellt wird, so wird die Krümmung in dieser Ebene allmählich so stark, dass die Stengelspitze in eine enge (in einer Ebene liegende) Spirale zusammengerollt erscheint. Der Krümmungsradius wird dabei desto kürzer je näher zur Endknospe: so z. B. bei einer nur 3 Cent. lang gelassenen Spitze von *Pharbitis hispida*, welche im Laufe von 4 Stunden eine Krümmung von mehr als 360° gebildet hat, war der Krümmungsradius des jüngsten Theiles nicht mehr als 5 Millim. In Fig. 4 ist eine sehr regelmässig und niedlich gekrümmte Spitze von *Ipom. sibirica* in natürlicher Grösse von oben gesehen dargestellt. Die Krümmungsebene ist hier etwa 25° gegen den Horizont gehoben; die Krümmung selbst bildet, wie man sieht, $1\frac{1}{2}$ Kreisumgänge und wird desto enger je näher zur Endknospe, so dass der Krümmungsradius des äussersten Theiles nicht über 4 — 5 Milim. beträgt. Eine so

enge Krümmung ist hier dadurch entstanden, dass die horizontale Spitze während $3\frac{1}{2}$ Stunden beinahe in derselben Richtung sich immer weiter krümmte. Es ergiebt sich nun als ein allgemeines Gesetz, dass wenn eine nutationsfähige Stengelspitze in horizontaler Lage sich befindet so krümmt sie sich hauptsächlich in horizontaler Ebene und zwar wird diese Krümmung so lange verstärkt als die Krümmungsebene mehr oder weniger horizontal bleibt.

Fig. 4.

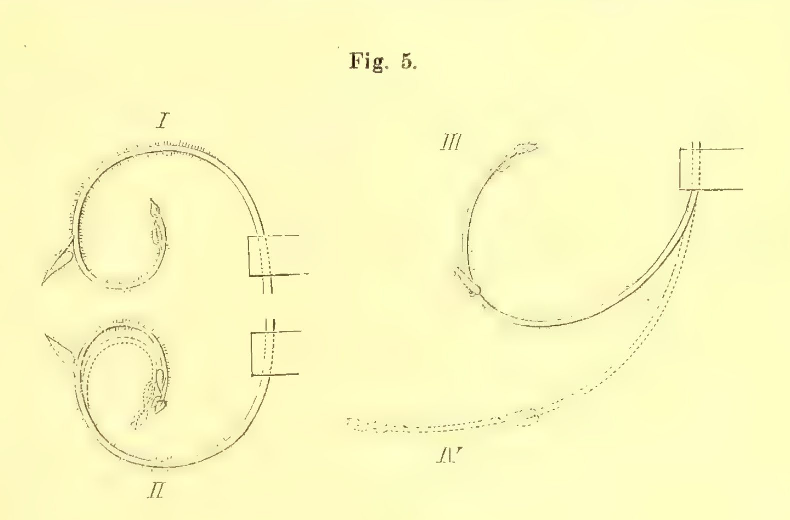


Von diesem letzteren Umstande hängt es eben ab, dass bei den asymmetrisch nutirenden Stengelspitzen die homodrome Krümmung in horizontaler Ebene gewöhnlich so enge zu sein pflegt weil die aufsteigende Nutationsphase immer nur langsam verläuft und die Spitze hat so zu sagen Zeit genug ihre Krümmung zusammenzuziehen. Darum findet man in der Regel diese Krümmung desto stärker je länger und schwächer die nutirende Stengelspitze, je langsamer somit ihr Aufwärtskrümmen vor sich gegangen ist.

Die Richtung der an einer in horizontaler Lage arretirten Spitze zunächst entstehenden (homodromen) Krümmung ist so zu sagen selbstverständlich denn bei einer kreisförmig nutirenden Stengelspitze ist die hintere (in Bezug auf die Richtung der Nutation) Längskante diejenige, welche jederzeit das Bestreben hat sich am meisten zu verlängern. Das erkennt man schon darin, dass — wie schon früher gesagt wurde, — die erste Krümmung immer auf der nämlichen Seite entsteht auch wenn die Spitze vertical auf- oder abwärts gestellt wird. Wird darum eine Spitze in horizontaler Lage festgeklemmt und darauf die Klemme 180° um ihre Axe umgedreht, so dass die Spitze ebenfalls horizontal aber mit der früheren Unterseite nach oben zu liegen kommt, — wobei natürlich die rechte und linke Flanke derselben vertauscht erscheinen, so entsteht doch zuerst die Krümmung immer noch auf derjenigen Seite, welche früher die Hinterseite des Stengels bildete, welche aber jetzt zur Vorderseite desselben geworden ist. Diese Krümmung kommt ebenfalls zunächst in Folge einer Ausgleichung der im Stengel schon vorhandenen Wachsthumsanlagen zu Stande; bei der neuen Lage des Stengels erscheint sie aber antidrom, d. h. z. B. bei einer links nutirenden Pflanze — nach rechts gerichtet. Denkt man an eine asymmetrisch nutirende Spitze, welche ihre Bewegungen sowohl nach rechts als nach links ausführt, so wird man finden, dass die bei einer umgekehrten Spitze zuerst entstehende antidrome Krümmung keine abnorme Erscheinung, sondern vielmehr eine aus der Reihe der normalen Nutationskrümmungen darstellt. Nachdem wir aber oben kennen gelernt haben wie eine in horizontaler Ebene bleibende, homodrome Nutationskrümmung nur immer weiter, ja bis zur Bildung einer engen Spirale sich zu verstärken vermag so wäre im Voraus auch bei der nun entstehenden antidromen Krümmung dasselbe zu erwarten. Das geschieht aber keinesfalls. Die Bewegung der horizontalen Spitze in der antidromen Richtung dauert immer nur wenige Minuten und ihre Krümmung nach dieser Richtung geht in der Regel nicht über 5—10° hinaus. Gleich darauf erfolgt die umgekehrte Krümmung, wodurch die vorher entstandene ausgeglichen

und in homodrome übergeführt wird, welche letztere nun in gewohnter Weise fortschreitet. Beobachtet man dabei genau alle Bewegungen der Spitze so wird man sich überzeugen, dass der Uebergang der antidromen Krümmung in die umgekehrte nicht plötzlich geschieht; der antidromen Krümmung folgt vielmehr (theilweise dieselbe begleitet) gewöhnlich eine Abwärtskrümmung worauf erst die homodrome Krümmung beginnt. Die Abwärtskrümmung ist zwar dabei immer nur schwach, bleibt auch manchmal ganz aus, — was durch die Gegenwirkung des negativen Geotropismus der Spitze leicht zu erklären ist. Es ist jedenfalls daraus zu sehen, dass die antidrome Krümmung wirklich ebensogut eine normale Nutationskrümmung ist wie die daraufkommende homodrome, in welche letztere sie auch in normaler Reihenfolge, durch Vermittlung einer Abwärtskrümmung übergeht. Bei alle dem sind die physiologischen Eigenschaften dieser beiden Krümmungen bei horizontaler Lage ihrer Ebene wesentlich verschieden. Die Spitze kann mehrmals umgedreht werden und jedesmal wiederholt sich dasselbe, d. h. zuerst entsteht eine vergängliche antidrome Krümmung, welche bald in eine dauernde homodrome Krümmung übergeht. Die Erscheinung wird gerade auffallend wenn man zuerst die Spitze so lange in horizontaler Ebene sich krümmen lässt, bis die Krümmung sehr stark geworden ist und sodann dieselbe umkehrt. Die Krümmung, welche zunächst sich noch etwas verstärkt, beginnt bald sich wieder abzurollen, — zuerst im jüngeren, am stärksten gekrümmten Theile, und das dauert so lange bis die Spitze ganz gerade geworden ist um jetzt nach entgegengesetzter Richtung sich zu krümmen. In Fig. 5 sind verschiedene Stadien eines solchen Versuches mit einer 8 Cent. langen Spitze von *Pharbitis hispida* abgebildet. In horizontaler Lage festgeklemmt hat sich die Spitze im Laufe von 2¼ Stunden so gekrümmt, dass sie von oben gesehen wie in I erschien. Nun wurde die Spitze um 180° umgedreht (II) und in den ersten 20 Min. hat sie sich in ihrem jüngsten Theile noch enger in der früheren Richtung zusammengerollt (in II punctirt). Dann begann sie aber sich zurückzukrümmen und ¾ Stunde später war die Krümmung wie in III und betrug kaum mehr als 180°; noch 1 Stunde später war nur eine Krümmung von weniger als 90° zurückgeblieben und die Spitze hat jetzt die Form IV dargestellt. — Das Ausgleichen der schon bestandenen wie die Bildung einer neuen, umgekehrten Krümmung wird nur von einem mehr

Fig. 5.



oder weniger langsam fortschreitenden Aufwärtskrümmen der horizontalen Spitze begleitet.

Nach den hier angeführten Thatsachen muss somit der oben aufgestellte Satz durch einen weiteren vervollständigt werden: in horizontaler (oder sehr geneigter) Ebene kann nur eine der Nutations- (Windungs-) richtung gleichsinnig gerichtete Krümmung bestehen oder neugebildet werden.

Die Eigenschaft der Spitze in horizontaler Ebene sich nur in der Richtung der Nutation zu krümmen erklärt vollständig die von J. Sachs in seinen «Vorlesungen über Pflanzenphysiologie», S. 820 angegebene Thatsache, dass wenn eine windende Pflanze sammt ihrer Stütze in eine umgekehrte Lage (mit der Spitze nach unten) gebracht wird, so rollen sich die jüngsten Windungen zurück und die befreite Spitze richtet sich auf.

Wird die Pflanze, nachdem ihre Spitze arretirt wurde, in diesem Zustande an den Klinostaten gebracht und dem langsamen Rotiren unterworfen[1]) so tritt jetzt, wie schon früher bemerkt wurde, keineswegs diejenige characteristische Krümmung ein wie bei einer in horizontaler Lage bleibenden Spitze. Diese letztere bleibt zwar auch jetzt nicht in Ruhe, sie krümmt sich aber nach verschiedenen Richtungen in einer ähnlichen Weise wie das für freie Spitzen schon beschrieben wurde. Eine wenn auch kurzdauernde kreisförmige Nutation wurde bei wiederholten Versuchen hier nicht beobachtet. Wird eine arretirte Spitze zuerst in horizontaler Lage gelassen bis eine starke Krümmung entstanden ist und lässt man sie dann langsam rotiren so streckt sich die schon gebildete Krümmung wieder gerade und die Spitze macht nun fortan diejenige unregelmässige Bewegungen, welche am Klinostaten jedesmal auftreten. Das ist nun offenbar der Grund der Erscheinung, dass die jüngsten Windungen eines der Schwerkraftwirkung entzogenen, windenden Stengels sich wieder abrollen, — ebenso wie das auch durch die Umkehrung der Pflanze hervorgerufen werden kann.

Um die mechanische Seite der betrachteten, homodromen Krümmung in der Horizontalebene, welche ich der Kürze wegen als eine transversale Krümmung bezeichnen werde, näher kennen zu lernen wird es wichtig zu constatiren, dass dieselbe ohne Unterschied ebenso gut durch das fortgesetzte Wachsthum einer und derselben Stengelkante als in Folge der kreisförmigen Nutation, d. h. durch das Wachsthum der successiven Kanten zu Stande kommen kann. Es wurde schon oben bemerkt, dass zu der Krümmung in horizontaler Ebene bald das Wachsthum der Unterseite der Spitze hinzukommt. Hat man vorher auf der Oberseite der noch geraden Spitze einen Längsstrich aufgetragen so bemerkt man, dass während die Krümmung in horizontaler (bzw. schiefer) Ebene immer stärker wird, die Marke allmählich auf die Innenseite der Krümmung übergeht. Es erfolgt also dabei eine antidrome Drehung der sich krümmenden Spitze (später mehr davon die Rede) und

---

1) Zu diesem Zwecke steckte ich in den Topf, wo die Pflanze sich befand einen Stock, welcher mit einem seitlichen Arme versehen war, an dessen Ende nun die Stengelspitze mit einem Tropfen Leim befestigt wurde.

folglich ist es nicht fortwährend eine und dieselbe Stengelkante, welche die Convexität der Krümmung einnimmt, sondern diese Kante wird immer mehr seitwärts und zwar nach derselben Richtung verlegt wie es bei der kreisförmigen Nutation der Fall ist. Das zeigt, dass die Krümmung der Spitze hier nur zum Theil auf dem Wachsthum einer und derselben Stengelkante zum Theil aber auf der kreisförmigen Nutation der Spitze beruht. Man findet aber weiter, dass der Radius der transversalen Krümmung (d. h. die relative Verlängerung der convexen Seite derselben) in keiner constanten Beziehung mit der eingetretenen Drehung der Spitze sich befindet. Manchmal kann die Krümmung beinahe 180° stark werden bevor eine merkbare Drehung der Spitze begonnen hat. Hat die Krümmung einen vollen Kreisumfang erreicht, so findet man die Spitze in einzelnen Fällen um 90° bis etwa 180°, selten mehr tordirt. Später werden wir auch sehen, dass der Radius der transversalen Krümmung sich verkürzen kann, ohne dass eine weitere Torsion der Spitze stattfindet. Aus dem Gesagten ist zu sehen, dass die relative Verlängerung der convexen Seite der transversalen Krümmung in gleichem Maasse fortschreitet ob diese Seite wesentlich von einer und derselben, oder von successive verschiedenen Stengelkanten eingenommen wird. Im ersteren Falle muss das fortwährende Engerwerden der Krümmung einfach durch die Fähigkeit der entsprechenden Stengelseite erklärt werden immer mehr in die Länge zu wachsen. Im letzteren Falle kann aber eine immer weiter gehende Verstärkung der Krümmung nur dadurch zu Stande kommen, dass jede Stengelkante in Bezug auf die vorhergehende sich relativ immer stärker verlängert, — was eine ganz eigenthümliche Erscheinung ist. Diese Erscheinung lässt sich, glaube ich, dadurch erklären, dass bei der langsamen Drehung der Spitze um ihre Axe die convexe Seite der Krümmung jedesmal von einer Kante eingenommen wird, welche unmittelbar vorher die Unterseite bildete und darum schon in Folge des Geotropismus ein grosses Wachsthumsstreben erlangt hat. — Bei so engen Krümmungen wie die in horizontaler Ebene entstehenden kann die Frage berechtigt erscheinen ob die concave Seite einer solchen Krümmung nicht dabei comprimirt wird. Aus den wenigen Messungen, welche ich bei 40-maliger Vergrösserung ausgeführt habe, hat sich aber ergeben, dass bei der Bildung einer engen transversalen Krümmung die Stengelkante, welche von der flachen (oberen) auf die concave Seite der Krümmung herüberwanderte inzwischen keineswegs comprimirt wird, sondern im Gegentheil factisch (auch nicht unbedeutend) ausgewachsen erscheint.

Welche Kante einer geraden Stengelspitze am stärksten zu wachsen hat, wird nur durch die jedesmalige Lage dieser Spitze zum Horizonte bestimmt und wir haben gesehen, wie man durch die Umdrehung der Spitze diese oder jene Seite derselben nach Belieben in beschleunigtes Wachsthum versetzen kann. Es muss demnach die Einwirkung der Schwerkraft sein, welche das stärkere Wachsthum einer bestimmten Seitenkante des horizontalen Stengels hervorruft. Damit stimmt die Thatsache, dass die betreffende charakteristische Krümmung nach einer bestimmten Richtung, welche nur bei der horizontalen Lage des Stengels erfolgt, vollständig ausbleibt, wenn die Pflanze der Wirkung der Schwerkraft entzogen wird. So

werden wir zu dem Schlusse genöthigt, dass bei der horizontalen Lage einer nutationsfähigen Stengelspitze unter der Einwirkung der Gravitation die Verhältnisse in den Geweben geschaffen werden, in deren Folge das bevorzugte Wachsthum nothwendig in eine Seitenkante der Spitze versetzt wird. Es zeigt sich weiter, dass bei verschiedenen Pflanzen diese im Wachsthum bevorzugte Seite eines horizontalen Stengels immer dieselbe ist, welche bei der symmetrischen Nutation die Hinterseite (in Bezug auf die Richtung der Nutation) des Stengels bildet.

Wir kommen hier also auf einem anderen Wege zu den Schlüssen, welche mit den früher beschriebenen, am Klinostaten gemachten Beobachtungen im vollen Einklang sich befinden. In dem nämlichen Sinne sprechen auch andere, ebenfalls schon früher angegebene Thatsachen. So wurde gezeigt, dass die Stelle, wo eine Nutationskrümmung am Stengel sich befindet, innerhalb der wachsthumsfähigen Region keine bestimmte ist: an einem Stengel wird diese Stelle wesentlich durch das Gewicht der Spitze bestimmt und kann auch künstlich verlegt werden. Die Nutationsfähigkeit, d. h. die Eigenschaft das stärkste Wachsthum von einer Stengelkante auf die benachbarte in bestimmter Richtung zu verschieben, ist also nicht eine organische, einer bestimmten Stengelstrecke zukommende Eigenschaft. Vielmehr jede innerhalb der wachsthumsfähigen Region gebildete Krümmung, in deren Folge die Spitze in horizontale Lage gebracht wird, fängt sofort an kreisförmig zu nutiren. Dass aber andererseits nicht die im gekrümmten Theile entstandene Spannung die Ursache der kreisförmigen Nutation ist, beweisen die Fälle wo am Klinostaten starke Krümmungen der Spitze manchmal stundenlang bestehen bleiben, ohne ihre Ebene im geringsten zu verändern. — Durch Zusammenstellen aller dieser Thatsachen wird das Bestehen einer causalen Beziehung zwischen der kreisförmigen Nutation und der Schwerkraftwirkung sicher constatirt. Eine befriedigende Vorstellung über die Natur und die Mechanik dieser Beziehung, ist aber zur Zeit noch nicht zu gewinnen. Für den Fall der symmetrischen Nutation wäre es zwar leicht, sich eine solche Vorstellung zu bilden: wenn nämlich unter der Einwirkung der Schwerkraft das beschleunigte Wachsthum eines horizontalen Stengels auf dessen Seitenkante sich einstellt, so ist leicht einzusehen, dass bei einem in verticaler Ebene gekrümmten Stengel dadurch eine ununterbrochene kreisförmige Bewegung entstehen muss. Eine solche Erklärung lässt sich aber nicht mehr ohne Weiteres auf die asymmetrische Nutation übertragen, wo alle Stengelseiten successive stärker wachsen, ohne dass die Lage dieser Seiten zum Horizonte sich symmetrisch änderte. Wahrscheinlich sind aber bei dieser Art der Nutation noch gewisse andere Factoren wirksam, deren Bedeutung noch genau zu studiren ist. So ist es z. B. kein Zweifel, dass die Aufwärtsbewegung der Stengelspitze bei der asymmetrischen Nutation zum grossen Theile wenigstens durch den negativen Geotropismus des älteren Theiles mitbedingt wird. —

Für die künftige Theorie der kreisförmigen Nutation wird es vielleicht eine Thatsache von Bedeutung sein, dass in einer symmetrisch nutirenden Krümmung die Richtung dieser Nutation in Bezug auf die Form der Krümmung nach Belieben geändert werden kann.

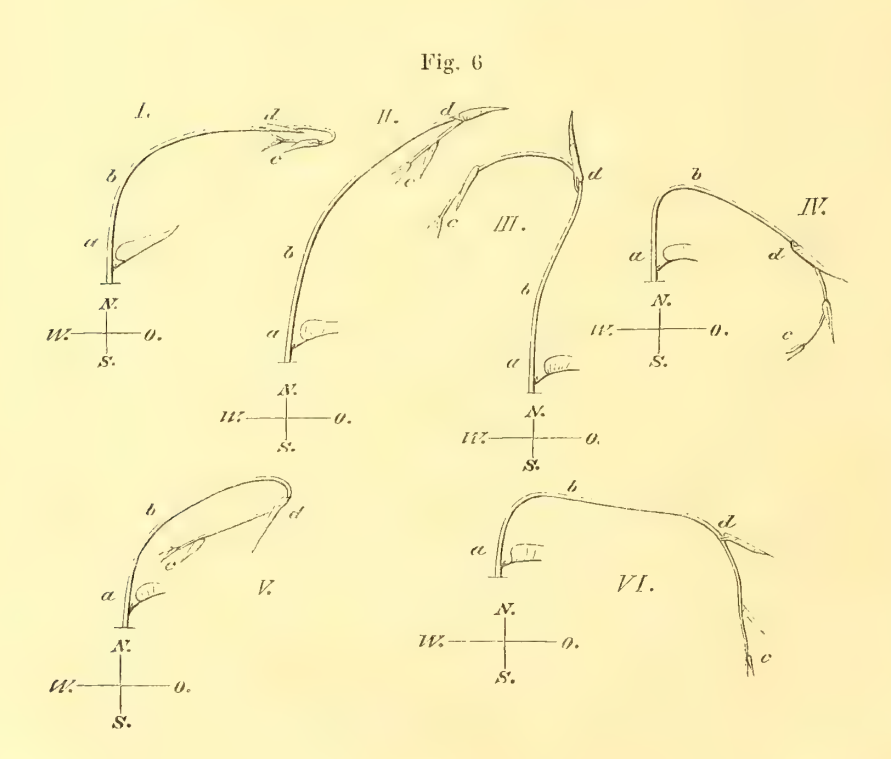
Bringt man eine gerade Stengelspitze in aufrechte Stellung, so bildet sich, wie schon früher besprochen wurde, im jüngsten Theile der Spitze sogleich eine Krümmung, welche auch unmittelbar zu nutiren beginnt. Kehrt man jetzt die Spitze so um, dass der gerade Theil vertical abwärts gerichtet und die Nutationskrümmung statt nach unten — nach oben geöffnet wäre, so dauert in den ersten Minuten die Bewegung in der früheren (in Bezug auf die neue Lage der Spitze zum Horizonte — umgekehrten) Richtung fort. Bald aber steht sie eine Weile still, worauf eine ebenso regelmässige kreisförmige Nutation nach der entgegengesetzten Seite beginnt. Längere Zeit kann man allerdings eine Spitze in dieser umgekehrten Stellung nicht nutiren lassen, weil die beginnende Aufwärtskrümmung stört; jedenfalls konnte ich bei einzelnen Versuchen mit *Pharbitis hispida* die Spitze in dieser Stellung mehr als 90° nach links beschreiben sehen. Wird darauf der Stengel wieder in die ursprüngliche, aufrechte Stellung gebracht, so wird natürlich die nutirende Spitze als zurückgegangen erscheinen. Durch wiederholtes Umkehren kann man auf diese Weise die Spitze in derselben Nutationskrümmung immer hin und zurück im Kreise sich bewegen lassen; hat man auf der Spitze eine Marke aufgetragen, so wird diese dem entsprechend, jedesmal bald nach der einen, bald nach der anderen Richtung um den Stengel herum, verschoben. Hier finden wir also wieder, dass die Richtung der Bewegung lediglich durch die Lage der Spitze zum Horizonte bestimmt wird. Es ist aber sehr interessant die aus diesen Versuchen sich ergebende Thatsache, dass die Richtung, in welcher das beschleunigte Wachsthum um den nutirenden Stengel herumschreitet, von der Natur der Pflanze nicht abhängig ist. Wenn man sich so in die Axe einer nutirenden Spitze gesetzt denkt, dass man die Convexität der Nutationskrümmung hinter seinem Rücken hat, so schreitet bei den normalen Bedingungen das beschleunigte Wachsthum bei einer links nutirenden Pflanze jedesmal von dem Scheitel auf die rechte Seite der Nutationskrümmung über. Wird aber die Convexität dieser Krümmung nach unten gekehrt, so bewegt sich jetzt die Krümmungsebene (für den im Stengel selbst sich denkenden Beobachter) nach rechts und das beschleunigte Wachsthum geht jedesmal auf die linke Seite der Krümmung über, — schreitet also um den Stengel herum in umgekehrter Richtung als im ersteren Falle. — In dieser Thatsache liegt auch ein neuerer und sicherer Beweis dazu, was schon früher aus anderweitigen Beobachtungen gefolgert wurde, dass nämlich die Richtung der Nutation und die normale Torsion des Stengels (vorausgesetzt, dass die Richtung dieser Torsion durch das Abwärtsstellen des Stengels, sich nicht ändern lässt) zwei von einander unabhängige Phänomene sind. —

Ungleichmässige Nutation des freien Theiles einer aufgehaltenen Spitze. Bevor zur Betrachtung der Entstehung einer freien Spirale zu schreiten, müssen wir noch eine Eigenschaft der Spitze näher kennen lernen, welche wir schon an den frei nutirenden Spitzen beobachten konnten und welche an den festgehaltenen ganz regelmässig und viel schärfer hervortritt. An einer aufgehaltenen Stengelspitze gestalten sich die Erscheinungen überhaupt etwas verschieden, je nachdem eine solche Spitze ganz unbeweglich festgehalten oder nur lose und zwar in

aufrechter Stellung befestigt wird. In diesem letzteren Falle kommt es gewöhnlich zur Bildung einer dauernden Spirale nicht und einen solchen Fall will ich hier zunächst betrachten.

Ich werde dazu einen der gemachten Versuche näher beschreiben. Für einen solchen diente eine sehr kräftige Pflanze von *Ipom. sibirica*, deren horizontal gestreckte Stengelspitze 9—10 Cent. lang war. Der unbewegliche Stengel wurde so umgebogen, dass die Spitze aufwärts gestellt und in dieser Lage in eine enge Oeffnung (Canal) eines $1\frac{1}{2}$ Cent. dicken, halbirten Korkstückes eingeführt wurde; die Oeffnung war nur wenig breiter als der Durchmesser der Spitze; der über den Kork frei hinaufragende Theil derselben war $6\frac{1}{2}$ Cent. lang. Die freie, beinahe gerade Spitze krümmte sich bald fast der ganzen Länge nach in der Richtung nach *NW*. Die Krümmung lag sämmtlich in senkrechter Ebene, welche auch sogleich regelmässig zu nutiren begann. Während aber die Nutation vor sich ging, krümmte sich der jüngste Theil der Spitze immer mehr in horizontaler Ebene nach vorwärts (mit der Nutationsrichtung homodrom). Der untere Theil der Nutationskrümmung blieb dabei noch immer in verticaler Ebene, welche aber nur langsam ihre Richtung änderte (rotirte). Nach $1\frac{1}{4}$ Stunde hat die Spitze eine Form wie in Fig. 6, I angenommen, wo der untere Theil (*a*—*b*) in verticaler Ebene nach *S* geneigt ist; weiter geht die Krümmung allmählig in horizontale Ebene über und der horizontale Krümmungsbogen, welcher jetzt mehr als 120° umfasst, ist nach NNW geöffnet. Nach 2 Stunden hat die verticale Krümmungsebene des unteren Theiles immer noch fast die frühere Stellung (nach S), während die horizontale Krümmung sich bis 180° verstärkt hat und ihre Oeffnung ist nach W gekehrt. —

Fig. 6



Die eigenthümliche Form, welche nun die gesammte Krümmung angenommen hat, ist offenbar dadurch bedingt, dass der jüngere Theil der Spitze in seiner Nutation vorausgegangen ist. — Bis jetzt ist aber der horizontal gekrümmte Stengeltheil mit fast derselben

Seite nach unten gekehrt geblieben, wodurch der negative Geotropismus dieser Seite stärker werden musste. Andererseits wenn das beschleunigte Wachsthum bis jetzt auf der convexen Seite des horizontalen Bogens stattfand, so musste es in der Folge auf die Unterseite derselben übergehen. Wahrscheinlich infolge dieser beiden Umstände, ist nun plötzlich ein sehr energisches Aufrichten des horizontalen Krümmungsbogens eingetreten, wobei das Wachsthum der Unterseite sogar theilweise auf den noch in verticaler Ebene gekrümmten Theil *b* (mit Ueberspringen der Seitenkante desselben) sich verbreitert hat und nach $2^1/_4$ Stunden (von dem Beginne des Versuches an gerechnet) ist die Spitze in eine Lage wie in II gekommen. Das Aufrichten dauerte so lange fort, bis in einer weiteren $^1/_4$ Stunde die früher horizontale Krümmung in verticale Ebene gebracht wurde und die Spitze die Form III angenommen hat, wo die Krümmungsebene *c—d* zugleich um etwa 90° im Kreise nach links verschoben erscheint; das letztere wird aber verständlich, wenn man beachtet, dass die in I und II untere (zuletzt stärker gewachsene) Seite in III zur rechten Seite der Krümmung (*c—d*) geworden ist. — Es war also, als ob unter der Einwirkung des Geotropismus die ursprünglich verspätete Nutation des Theiles *b* wieder beschleunigt und dadurch die schon spiralförmig gewordene Krümmung der Spitze wieder in eine Ebene gebracht wurde. Die Krümmung III, *c—d* bewegte sich jetzt weiter nach links; in dem Theile *b* ist aber das beschleunigte Wachsthum der Nordseite eingetreten, welches so energisch war, dass das Stengelstück *b—d* rasch in vollkommen horizontale Lage gebracht wurde. Die Krümmungsebene von *c—d* war zu der Zeit in die Stellung NS gekommen und das so energische Krümmen des Theiles *b* musste wahrscheinlich theilweise durch das Gewicht der nach *S* überhängenden Spitze bestimmt werden. Jedenfalls wurde die Krümmung *c—d* dadurch in eine ganz unnatürliche Lage zum Horizonte gebracht und, — wie es in solchen Fällen immer geschieht, — durch die Einwirkung des Geotropismus allmählich beinahe ausgeglichen. Nach $3^1/_2$ Stunden war die Form der Spitze wie die in IV abgebildete, wo in dem Theile *b—d* schon wieder eine bedeutende horizontale Krümmung nach links entstanden ist, während die über *c* noch zurückgebliebene Krümmung im Strecken begriffen war. Jetzt krümmte sich der ganze horizontale Theil wieder so lange nach links, bis die Krümmung etwa 180° erreicht hat (in V zu sehen), worauf abermals ein so energisches Wachsthum der Unterseite der Krümmung erfolgte, dass dieselbe von neuem in verticale Lage gebracht wurde. Die Erscheinungen wiederholten sich nun auch weiter in der früheren Weise: durch das Wachsthum der Nordseite wurde der Stengel in seinem unteren Theile nochmals in horizontale Lage, VI, gebracht, wo aber diesmal die Krümmung *a—b* in noch älterem Theile als in IV sich gebildet hat, — was auf die Einwirkung des Gewichtes deutlich hinweist.

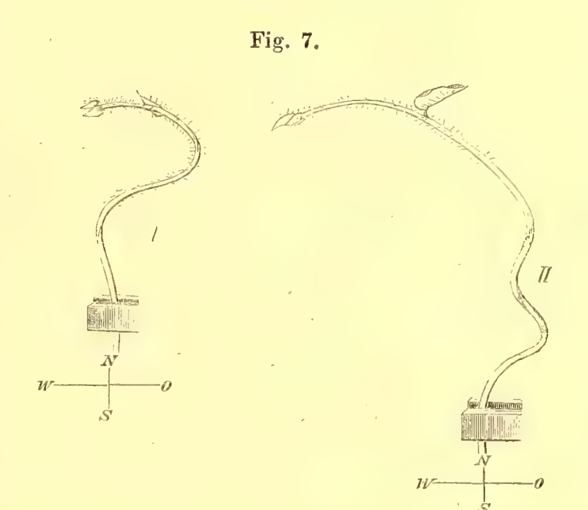
In dem beschriebenen Versuche ist es eben auffallend, dass trotz der freie Theil der Spitze seiner ganzen Länge nach vollständig nutationsfähig war, so ging doch die Nutation in der ursprünglich gebildeten Krümmung nur in der ersten Zeit symmetrisch vor sich, später aber auf eine eigenthümliche Weise, welche an die asymmetrische Nutation am meisten erinnerte. Ich habe schon oben darauf hingewiesen, dass die betreffenden Bewegungen der

Spitze wesentlich durch die ungleiche Nutationsfähigkeit ihrer verschiedenen Theile bestimmt wurden. Es zeigt sich nun als eine allgemeine Erscheinung, dass wenn eine innerhalb der nutirenden Region befindliche Stelle des Stengels in ihren Krümmungen auf mechanische Weise verhindert wird, so wird die Nutation in der freigebliebenen Stengelspitze desto mehr verlangsamt, je näher auf die verhinderte (festgehaltene) Stelle. Dass es dabei nicht eine etwaige Verletzung der Spitze, sondern nur die Verhinderung der activen Krümmungen als die Ursache der Erscheinung anzusehen ist, beweist eben der beschriebene Versuch, wo die Spitze nur ganz lose eingeklemmt wurde. Andererseits treten die besagten Erscheinungen nur dann scharf genug hervor, wenn die Spitze in ihrem jungen, noch ganz energisch nutirenden Theile aufgehalten wird; der ältere, schon weniger krümmungsfähige (wenn auch factisch nutirende) Theil der Spitze kann dagegen in horizontaler oder verticaler Lage festgehalten werden, ohne dass die Nutation einen anderen als den, den genannten Lagen normal entsprechenden Verlauf annimmt. Auch sind die Erscheinungen gradweise verschieden, je nachdem die Krümmungen des nutationsfähigen Theiles vollständig oder nur unvollständig, — wie in dem beschriebenen Versuche — verhindert wurden. In diesem Versuche wurde die horizontale Krümmungsebene jedesmal wieder senkrecht gestellt. Das kann nur so gedeutet werden, dass die Nutationsfähigkeit des Stengels in der anfänglich gebildeten Krümmung verhältnissmässig nur wenig geschwächt war und darum unter Mitwirkung des Geotropismus leicht soweit gesteigert werden konnte, dass der jüngere Theil wieder nachgeholt wurde. Bei den ganz unbeweglich fixirten Pflanzenspitzen geschieht das Letztere nicht mehr und somit ist eine der Bedingungen zur Bildung einer dauernden Spirale gegeben. —

Bildung einer freien Spirale. Wird eine Stengelspitze nicht mehr als etwa 6—7 Cent. weit von der Endknospe und zwar ganz unbeweglich festgehalten, so wird der freie Theil jedesmal in Form einer dauernden, ausgezogenen Spirale zusammengewunden. Dasselbe geschieht nicht nur wenn die Spitze in horizontaler, sondern fast ebenso gut wenn dieselbe in aufrechter Lage fixirt wird. In diesem letzteren Falle sind aber die Vorgänge denen im vorhergehenden Abschnitte beschriebenen ähnlich und wir werden darum diesen Fall zuerst betrachten. Dazu werde ich wieder einen Versuch mit einer in vertical aufrechter Stellung festgeklemmten Spitze von *Pharbitis hispida* anführen, deren zwei Stadien in Fig. 7 wiedergeben sind. Die Erscheinungen wiederholten sich zum Theil in einer ähnlichen Weise wie in dem vorigen Versuche: der freie Theil der Spitze, welcher 6 Cent. lang war, bildete zuerst fast der ganzen Länge nach, eine in verticaler Ebene liegende Krümmung (nach *W*), welche auch normal, wenn auch nur langsam, zu nutiren begann. Dann krümmte sich der äusserste Theil der Spitze in horizontaler Ebene nach links, während der übrige Theil derselben noch in verticaler Ebene gekrümmt blieb. Sämmtliche Krümmung der Spitze stellte jetzt offenbar schon eine Spirale von etwa $1/4$ Umgang dar. Die horizontale Krümmung wurde nun aber immer stärker, hauptsächlich aber wurden immer ältere Theile der Spitze in diese Krümmung hineingezogen, während die verticale Krümmung des unteren Theiles der Spitze

nur sehr langsam nutirte. Die Erscheinung beruht wieder offenbar auf der ungleichmässigen Nutation verschiedener Theile der freien Spitze und es war deutlich zu verfolgen, wie im unteren Theile dieser Spitze die Nutation nur äusserst langsam und von hier ab aufwärts immer rascher vor sich ging. So lag nach etwa $^3/_4$ Stunde die ganze (noch verticale) Krümmungsebene in der Richtung nach SW; nach $1^1/_2$ Stunden behielt der unterste Theil der Krümmung noch beinahe dieselbe Richtung, höher war die (noch beinahe verticale) Krümmungsebene nach *S* gerichtet und der horizontale Krümmungsbogen des äussersten Theiles der Spitze — nach O geöffnet. Nach $2^1/_2$ Stunden war die Krümmung im untersten Theile scheinbar noch unverändert, weiter aufwärts kehrte die Krümmungsebene, — indem sie sich zugleich auf die Seite legte, — successive nach S, SO und zum Theil nach O, während die horizontale Krümmung des Endtheiles, welche schon einen Bogen von ca. 120° bildete, nach NW geöffnet war: gesammte Krümmung stellte jetzt ein Theil der Schraubenlinie von mehr als $^3/_4$ Umgang dar. Schliesslich nach etwa $4^1/_2$ Stunden (von Anfang des Versuches an) hat die Spitze eine Form wie in Fig. 7, I angenommen, wo die Krümmungsebene des untersten Theiles immer nur unbedeutend gegen ihre frühere Stellung in der Richtung nach S verschoben erscheint; weiter ändert sich die Lage dieser Ebene successive in der Weise, dass die Spitze einen vollen Umgang einer Spirale darstellt. Jetzt liegt auch die Krümmungsebene des äussersten Theiles der Spitze nicht mehr horizontal, sondern ist sie etwa 35° gegen den Horizont geneigt. —

Fig. 7.



Die mechanischen Verhältnisse bei der Bildung einer ziemlich flachen und breiten Spirale können wir schon jetzt etwas näher betrachten. Denken wir uns eine Spitze, welche in ihrem unteren Theile in verticaler, weiter — in horizontaler Ebene gekrümmt ist. So lange die horizontale Krümmung sich in dieser Lage befindet, wird sie nur immer stärker. Geht aber das beschleunigte Wachsthum auf die untere Seite des Stengels über, so wird die Krümmungsebene in verticale Lage gebracht und die Bildung einer Spirale wird somit aufhören müssen. Das kann aber durch verschiedene Umstände verhindert werden. So lange der untere Theil der Krümmung sich noch in senkrechter Ebene befindet, so muss seine Nutation dem Aufwärtskrümmen entgegenwirken: bei dieser Nutation wird der Stengel um seine Axe umgedreht, somit in dem Maasse als die Krümmung des äusseren Theiles der Spitze sich zu heben versucht, sie immer wieder gesenkt und in horizontaler Ebene behalten wird. Ein weiterer Umstand liegt, — wie wir aber erst später näher werden kennen lernen, — eben

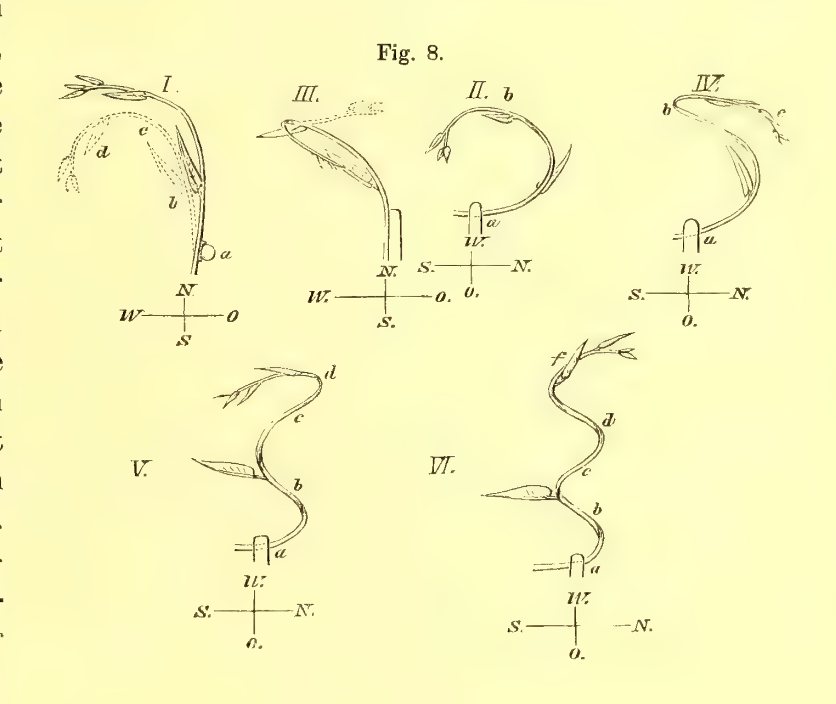
in der Eigenschaft der Spitze in horizontaler (bzw. sehr geneigter) Ebene, sich immer stärker einwärts zu krümmen. In dem angeführten Versuche ist auch in der That der horizontale Theil der Krümmung während $1^1/_2$ Stunden in dieser Lage geblieben, ohne dass eine Hebung der Kümmungsebene zu bemerken war. Nach und nach wird aber unter der Einwirkung des Geotropismus die Krümmungsebene doch allmählich schief gestellt und da inzwischen die Spitze nicht aufhört sich weiter einwärts zu krümmen, so muss dadurch im Ganzen eine spiralförmige Krümmung zu Stande kommen. — Inwiefern eine kreisförmige Nutation während der Bildung einer Spirale stattfindet, werden wir später genauer betrachten. Dass wenigstens im untersten Theile der schon gebildeten Spirale ein analoger Vorgang stattfinden muss, können wir schon aus der Vergleichung der Zustände I und II der Fig. 7 schliessen, wo in II ein weiteres Stadium abgebildet ist, welches die Spitze 19 Stunden später darstellte. Man sieht daraus, dass die Krümmung des untersten Theiles, welche in I nach SSW geöffnet war, nachträglich ihre Ebene um mehr als 90° nach links verschoben hat, denn in II findet man diese Ebene nach S gerichtet. Ausserdem zeigt die Vergleichung von I und II, dass die schon gebildete Spirale sich nachträglich noch viel enger zusammengezogen hat und in demselben Theile der Spitze wo bei I nur ein, bei II — zwei volle Umläufe der Spirale bestehen. — Eingehendere Betrachtungen über die Mechanik der Spiralenbildung können erst später vorgenommen werden.

Der eigenthümliche Verlauf der Nutation als Folge der ungleichen Nutationsfähigkeit der verschiedenen Theilen der Spitze war in diesem Versuche derselbe, wie in dem vorherbeschriebenen. Zur Bildung einer dauernden Spirale ist es aber dort nicht gekommen, weil die horizontale Krümmungsebene jedesmal wieder in verticale Lage gebracht wurde, — was nur durch eine energische Mitwirkung des Geotropismus zu erklären ist. Im letzten Falle ist das nicht geschehen: das Aufwärtskrümmen des Stengels erfolgte hier nur sehr langsam, was eben die Bildung einer ziemlich flachen Spirale ermöglichte. Dieses ungleiche Verhalten muss dadurch erklärt werden, dass mit der im Ganzen verminderten Wachsthumsfähigkeit (was aus der verlangsamten Nutation zu schliessen ist), auch eine verminderte Reactionsfähigkeit der festgehaltenen Spitze gegen die Wirkung der Schwerkraft zusammenfällt. Dass eine zur Bildung der Spirale geneigte Stengelspitze wirklich viel weniger geotropisch sein muss, muss daraus geschlossen werden, dass eine schon gebildete freie Spirale nur äusserst langsam und (wenn die festgehaltene Spitze nicht bald wieder frei gelassen wird) auch nie mehr vollständig sich gerade zu strecken vermag. So ist die Spirale Fig. 7, II im Laufe von 19 Stunden in ihrem unteren Theile nicht im mindesten steiler geworden erst weiter aufwärts, in dem Maasse als die Spitze sich von der Störung erholte, wird die Spirale immer steiler, bis sie in den geraden (inzwischen neu gewachsenen) Theil der Spitze allmählich übergeht. —

Noch sicherer wird eine Stengelspitze ihrer ganzen Länge nach in eine regelmässige Spirale verwandelt, wenn sie innerhalb ihrer nutirenden Region in horizontaler Lage festgehalten wird. Dabei tritt zunächst im jüngeren Theile der Spitze die uns schon bekannte

Krümmung in horizontaler Ebene auf; hat diese Krümmung etwa 120—180° erreicht, so macht sich ein langsames Aufwärtskrümmen der Spitze bemerklich. Die ungleichmässige Nutation verschiedener Theile der freien Spitze kann bei horizontaler Lage derselben in Folge einiger mechanischen Umstände nicht mehr so deutlich wie bei einer aufrechten Spitze verfolgt werden. Es ist aber kein Grund zu glauben, dass eine in horizontaler Lage festgehaltene Spitze sich in dieser Beziehung anders verhalten sollte. Es ist somit zu erwarten, dass auf die horizontale Krümmung eine Aufwärtskrümmung zuerst im jüngsten Theile der Spitze folgen wird. Das geschieht auch gewöhnlich bei nur kurz gelassenen Spitzen, wobei eine solche bis zu ihrer Endknospe eine gleichmässige Neigung zum Horizonte erhält, — wie das in Fig. 8, III mit Punctir angedeutet ist. Bei längeren Spitzen kommt es öfter vor, dass das Aufwärtskrümmen im älteren Theile beginnt, während die jüngste Spitze entweder eine horizontale Lage behält oder selbst (wie in Fig. 8, III) mit der Endknospe abwärts gesenkt wird. Eine solche Lage der äussersten Spitze kann zum Theil durch ihre eigene Schwere, zum Theil durch den Umstand bestimmt werden, dass wenn in dem älteren Schenkel einer ca. 180° umfassenden Krümmung das Aufwärtskrümmen erfolgt, während der freie Schenkel der Krümmung ihm nicht (in Folge seines Gewichtes) den gleichen Schritt halten kann, so wird er selbst passiv abwärts geneigt. — Hat der jüngste Theil der Spitze anfänglich eine aufwärts geneigte Lage erhalten, so verbleibt er doch in derselben nicht, sondern er senkt sich bald wieder, bis er in eine ungefähr horizontale Stellung gekommen ist. Wurde dagegen die Spitze abwärts geneigt, so erfolgt umgekehrt ihre Hebung, so dass die definitive Lage der äussersten Spitze immer eine ungefähr horizontale ist und diese Lage behält sie dann fortwährend, wie das in den Stadien IV, V, VI der Fig. 8 zu sehen ist. In dieser Figur sind verschiedene Phasen einer in Bildung begriffenen Spirale wiedergegeben; wir werden danach zuerst die Reihenfolge der Krümmungen verfolgen, um später auf die Natur selbst dieser Krümmungen näher einzugehen. — Eine kräftige, gerade Stengelspitze von *Ipomaea sibirica*

Fig. 8.



wurde in horizontaler Lage, ca. $5\frac{1}{2}$ Cent. weit von der Endknospe, an ein Stäbchen (in *a*) festgeklebt. In I sind zwei successive Stadien der ersten, horizontalen Krümmung von oben gesehen, abgebildet. In der punctirten Phase (1 Stunde nach dem Ankleben) liegt die ganze Krümmungsebene noch beinahe vollständig horizontal; die auf die Oberseite der Spitze aufgetragene Marke lässt nur im jüngsten Theile der Spitze (etwa von dem Blättchen *d* an) eine ganz geringe antidrome Torsion erkennen. Jetzt begann aber eine Aufwärtskrümmung im älteren Theile der Spitze (in I, punctirt etwa in *b*—*c*) und im Laufe der weiteren $\frac{3}{4}$ Stunde hat dieser Theil eine Neigung von ca. 40° zum Horizonte erhalten, während der jüngste Theil der Spitze in derselben Ebene abwärts gerichtet war. Die Krümmung in dieser Ebene hat sich inzwischen bis etwa 270° verstärkt und die Spitze von der Seite gesehen wie in II, von vorne — wie in III erscheint. Die antidrome Torsion erreicht jetzt beinahe 180°. Eine $\frac{1}{2}$ Stunde später hat die Spitze die Form IV dargestellt: das gesenkte Ende der Spitze hat sich soweit gehoben, dass seine Krümmungsebene horizontal liegt; die Neigung des älteren Theiles zum Horizonte ist nicht viel grösser geworden und beträgt jetzt etwa 50°, die Krümmung nach links bildet aber mehr als einen vollständigen Umgang der Spirale. Vergleicht man damit den Zustand V, welchen die Spitze nach weiterer $\frac{1}{2}$ Stunde darstellte, so wird man finden, dass er durch immer weiter vor sich gehendes Krümmen der Spitze in geneigter Ebene nach links zu Stande kommen musste. Dasselbe lässt sich auch in Bezug auf das Stadium VI sagen, welches die Spitze $1\frac{1}{2}$ Stunde später erlangt hat und wo sie eine regelmässige Spirale von mehr als 2 Windungen darstellt. Der ganze Vorgang bei der Bildung einer Spirale muss hier somit auf das Krümmen nach links und das dasselbe begleitende, langsame Aufwärtskrümmen der Spitze zurückgeführt werden. Der basale Theil der freien Spitze wurde in diese Krümmungen nur langsam eingezogen; allmählich wurde aber auch dieser Theil und zwar hart bis auf die festgehaltene Stelle zusammengewunden (vergleiche IV, V und VI). Das zeigt, dass hier ebenso wie bei einer aufrechten Spitze die Krümmungsfähigkeit der an die festgehaltene Stelle benachbarten Region der Spitze bedeutend vermindert und auch ihr Geotropismus geschwächt wird. — Die Betrachtung der Phasen IV, V und VI zeigt die bemerkenswerthe Thatsache, auf welche wir schon bei einer früheren Gelegenheit (S. 44) aufmerksam wurden, dass nämlich die Windungen der sich bildenden Spirale nicht nur nicht steiler, sondern im Gegentheil, allmählich flacher werden. In der That war in II die Neigung des Theiles *a*—*b* zum Horizonte ca. 40° und hat sie sich in IV bis auf etwa 50° vergrössert, so findet man in der Spirale V die Neigung der Windungen wieder nicht über 40° und in VI ist diese Neigung nicht grösser als etwa 30° geworden. Es müssen also mechanische Bedingungen bestehen, welche stetig dahin arbeiten, nicht nur die Wirkung des Geotropismus zu paralysiren, sondern auch die entstandenen Windungen factisch zu erniedrigen. Es ist offenbar in diesem Umstande eine der wesentlichen Bedingungen für die Bildung der verhältnissmässig so breiten und flachen Spiralen zu suchen, wie sie dabei wirklich entstehen. Auf die Gründe dieser Erscheinung werden wir später eingehen. — In den Stadien II und IV war schon eine bedeutende antidrome Torsion der ge-

krümmten Spitze zu constatiren, welche etwa 180° erreicht hat. Später hat aber diese Torsion nur sehr langsam zugenommen: in IV ging der Strich zwischen *a*—*b* allmählich von der Oberseite auf die concave Seite der Spitze über und lag in *b*—*c* auf der Unterseite derselben; in V liegt er bei *a* und *b* auf der Oberseite, bei *c* auf der Unterseite und geht bei *d* auf die concave Seite der Krümmung über, — sämmtliche Torsion beträgt also im letzteren Falle höchstens 270°, hat folglich um etwa 90° zugenommen. In VI befindet sich die Marke bei *a* und *b* ebenfalls auf der Oberseite, bei *c* — auf der Unterseite, bei *d* und zum Theil bei *f* — auf der convexen Seite der Krümmung; die Torsion hat somit gegen das vorhergehende Stadium so gut wie nicht mehr zugenommen. In einigen anderen Versuchen war der geringe Werth der antidromen Torsion noch auffallender, ja, in einer Spirale deren Windungen ausserordentlich niedrig waren (die Neigung der Windungen ca. 10°) ging die Marke durch beinahe 2 Windungen überall auf der convexen Seite derselben, es war also dabei fast keine Torsion zu bemerken. — Es ist wichtig diesen letzteren Umstand zu constatiren, denn die Mechanik der Spiralenbildung wird bei dieser Bedingung ausserordentlich einfach und leicht verständlich. Entsteht in der That eine spiralförmige Krümmung bei der Bedingung, dass keine Torsion des gewundenen Stengels zu bemerken ist, so wachsen offenbar nur immer dieselben Stengelseiten, — eine wirkliche kreisförmige Nutation des Stengels kommt dabei nicht zum Spiele. Eine ausgezogene Spirale entsteht hier also wesentlich dadurch, dass eine horizontale Stengelspitze fortwährend nur auf seiner Aussenseite (in Bezug auf die Richtung der transversalen Krümmung) und seiner Unterseite sich verlängert. Es ist nun offenbar kein wesentlicher Umstand, ob bei der Bildung der Spirale eine kreisförmige Nutation erfolgt oder nicht, d. h. ob dabei verschiedene Stengelseiten successive stärker wachsen, oder ob fortwährend nur dieselbe Stengelseiten sich verlängern, denn der Vorgang der Spiralenbildung verläuft in ganz derselben Weise, ob er von einer Torsion der Spitze begleitet wird oder nicht. Das wäre aber im voraus zu erwarten, nachdem wir schon wissen, dass die Krümmung der Spitze in horizontaler (bzw. schiefer) Ebene nur durch die Lage dieser Spitze zum Horizonte bestimmt wird und kann desswegen ebensowohl durch die Verlängerung einer und derselben als der successiven Stengelseiten zu Stande gebracht werden. Der Vorgang bei der Bildung einer freien Spirale muss somit im Wesentlichen auf die uns schon bekannten Eigenschaften der transversalen Krümmung zurückgeführt werden.

Das eben Gesagte gilt vollständig für die Spiralenbildung einer in aufrechter Lage festgehaltenen Spitze mit dem alleinigen Unterschiede, dass im letzteren Falle die Spiralbildung zunächst nur in demjenigen Theile beginnt, welcher in horizontale Lage gekommen ist. Ist der untere Theil der Spitze zunächst noch aufrecht und gerade geblieben so kann er allmälich ebenfalls in die spiralige Krümmung hineingezogen werden. Es kann auch umgekehrt vorkommen, dass eine in horizontaler Lage festgehaltene Spitze zeitweise in aufrechte Stellung geräth. Wurde nämlich die Spitze in ihrem schon älteren Theile festgehalten, so kann unter Mitwirkung des Geotropismus die Krümmungsebene allmälich in verticale Stellung gebracht werden, — in ganz derselben Weise wie es bei asymmetrisch nuti-

renden Spitzen immer erfolgt. War die festgehaltene Stelle nur wenig nutationsfähig, so bleibt oft der aufgerichtete Stengeltheil auch weiterhin in derselben Lage während die gekrümmte Spitze um ihn symmetrisch zu nutiren anfängt (zum Beweise, dass die Aufwärtskrümmung einer in horizontale Lage gekommenen Spitze zum Theil wenigstens wirklich eine geotropische Krümmung ist). Im weniger günstigen Falle beginnt aber, nachdem der ältere Theil der Spitze sich aufgerichtet hat derselbe Vorgang wie bei einer von Anfang an in aufrechter Stellung festgehaltenen, jungen Spitze: die Krümmung legt sich in horizontale Ebene und es entsteht schliesslich eine Spirale, in deren Bildung allmälich auch der übrige Theil der Spitze hineingezogen wird.

Inwiefern die antidrome Torsion, welche bei der Krümmung der Spitze in horizontaler Ebene eintritt durch die eigene Schwere dieser Spitze verursacht wird, — kann nur durch Versuche entschieden werden. Hugo de Vries hat in seiner Vorstellung über die Mechanik des Windens der Schwere der Spitze eine grosse Bedeutung zugemessen (l. c. p. 334 und 336), ohne aber die Wirksamkeit dieses Factors und seine Tragweite experimentell zu prüfen. Meine Versuche haben mir vielmehr gezeigt, dass das Gewicht einer in horizontaler Ebene gekrümmten Stengelspitze in vielen Fällen wenigstens kaum im Stande ist irgend eine beträchtliche Torsion der Spitze zu verursachen. Es wurden im weiten Bogen gekrümmte, schwere und zugleich plastische Stengelspitzen von *Humulus Lupulus* und *Menispermum dahuricum* von den im Freien wachsenden Pflanzen abgeschnitten und im feuchten Raume, unter Glasglocken (der Querschnitt mit Wasser bedeckt) so befestigt, dass die Krümmungsebene der frei schwebenden Spitze horizontal lag. Abgeschnittene Stengelspitzen bleiben nicht selten 1—2 Stunden lang ohne irgend welche weitere Krümmungen zu machen; während dieser Zeit war aber gewöhnlich kaum ein Sinken der Endknospe oder eine nennenswerthe Torsion der Spitze zu constatiren. Eine Hopfenspitze, welche vor dem Versuche 24 St. lang in einer feuchten Blechbüchse zugebracht hat, behielt dann unter der Glocke während 48 Stunden ihre ursprüngliche Krümmung unverändert (die Hebellänge war bei der horizontalen Lage der Krümmung grösser als 6 Cent.), ohne dass dabei die Spitze gesunken war oder eine Torsion erlitten hat. — Aus solchen Versuchen wird im Ganzen nur die Ueberzeugung gewonnen, dass die Drehungsfestigkeit einer nutationsfähigen Stengelspitze eine sehr bedeutende und jedenfalls viel grösser ist als es im voraus zu denken wäre. Dass die Torsion einer in horizontaler Lage sich krümmenden Spitze zum grossen Theile wenigstens nicht durch das Gewicht der Endknospe verursacht wird zeigten mir unmittelbar die Versuche (mit *Pharbitis hispida* und *Ipom. sibirica*) wo die Wirkung dieses Gewichtes aufgehoben wurde. In den einen Fällen wurde auf die Spitze, neben der Endknospe eine Schlinge aufgelegt, deren Faden über eine kleine Rolle ging und am anderen Ende mit einem Gegengewichte versehen war, welches eben hinreichte die Endknospe um etwa 3—5 Millim. zu heben und in dieser so zu sagen aufgehängten Lage dauernd zu erhalten. In anderen Versuchen ruhte die Endknospe auf dem freien Ende einer steifen und elastischen, 3—4 Cent. langen Schweinsborste, durch welche sie ebenfalls dauernd in etwas

gehobener Lage aufgehalten wurde. Derartige Versuche haben überhaupt ergeben, dass nicht nur die Spiralenbildung sondern auch die antidrome Torsion der Spitze (die letztere wenigstens theilweise) von dem Gewichte dieser Spitze unabhängig sind. Die Spirale wurde zwar dabei gewöhnlich (aber nicht nothwendig) steiler als sonst, weil die Aufwärtskrümmung der Spitze erleichtert wurde, die Torsion trat aber in ähnlicher Weise, — wenn auch vielleicht in schwächerem Grade, wie ohne das ein. Schwendener hat in seiner citirten Abhandlung gezeigt, dass jede spiralförmige Krümmung eines cylindrischen Stabes nothwendig von einer antidromen (scheinbaren) Torsion begleitet wird und es muss somit die zu beobachtende Torsion einer sich krümmenden Stengelspitze zum grössten Theile eben diesem Umstande zugeschrieben werden. Nach der Theorie muss aber diese scheinbare Torsion mit der Steilheit der Spirale sich vergrössern. Beachtet man nur die erste entstehende Windung, — bei deren Bildung die Torsion doch am stärksten hervortritt, — so findet man nicht selten bei einer sehr flachen Spirale so bedeutende Drehung wie eine solche auch bei steileren Spiralen nicht jedesmal zu constatiren ist. — Auf die Ursache dieser Erscheinung werde ich unten zurückkommen.

Was die oben besagte horizontale oder nur schwach abwärts geneigte Lage der äussersten Spitze einer in Bildung begriffenen Spirale betrifft, so lassen die Versuche mit equilibrirten Endknospen erkennen, dass diese Lage mit der Schwere der Spitze ebenfalls nichts zu thun hat. Die auf beschriebene Weise aufgehängten oder unterstützten Spitzen behalten in der Regel dieselbe Lage wie die frei schwebenden, ungeachtet dass das Nachlassen des Gegengewichtes sie jedesmal noch mehr sinken lässt. Die betreffende Lage einer ausgesprochen negativ geotropischen Spitze, welche nicht durch die eigene Schwere der Spitze bestimmt wird, muss somit mit gewissen anderen, bei der Bildung der Spirale gegebenen mechanischen Bedingungen zusammenhängen. — Ebenso wie diese Lage der äussersten Spitze und offenbar als eine analoge Erscheinung blieb uns oben die Thatsache unklar, dass trotz der Einwirkung des Geotropismus die Windungen einer sich bildenden, freien Spirale nicht etwa allmälich steiler sondern im Gegentheil oft flacher werden. Diese Erscheinungen können nun aus folgenden mechanischen Umständen erklärt werden. Es ist eine geometrische Eigenschaft der Spirale, dass wenn dieselbe sich enger zusammenzieht so müssen bei gewissen Bedingungen die Windungen erniedrigt werden. Diese Erniedrigung muss nämlich jedesmal dann erfolgen, wenn die krümmende Kraft entweder in einer zur Axe der Spirale rechtwinkligen Ebene oder in der Ebene der Windungen selbst einwirkt. Wird diese Kraft in einer Ebene einwirken, welche steiler als die Ebene der Windungen ansteigt, so können dabei je nach der Neigung dieser Ebene die Windungen der Spirale ebenfalls erniedrigt oder auch erhöht werden. An einer leicht biegsamen Spirale, z. B. einer solchen aus einem Bleiröhrchen dargestellten können diese Eigenschaften der Spirale anschaulich gemacht werden. An einer solchen Spirale wird man sich überzeugen, dass das Einwärtsbiegen einer Stelle der Windung in der Ebene der Windung selbst wesentlich nur das Sinken des um etwa 90° Horizontalabstand höher liegenden Theiles der Windung zur

Folge hat. Bei einer bedeutenden Verkürzung des Krümmungsradius kann dieser Theil aus einer aufwärtsgeneigten in eine abwärtsgeneigte Lage gerathen. Das wird auch ohne Weiteres verständlich wenn man denkt, dass die Windungen einer ausgezogenen Spirale in schiefer Ebene liegen und dass ein in solcher Ebene umschriebener Krümmungsbogen an einer Seite auf- an der anderen Seite absteigt. Aus dieser Eigenschaft der Spirale wird nun ersichtlich, dass bei dem fortwährenden Einwärtskrümmen des letzten etwa $^1/_4$-Umgangs einer Spirale das freie Ende derselben nothwendig in einer mehr horizontalen Lage gehalten wird. Wird aber eine Spirale in allen ihren Theilen gleichzeitig in der Ebene der Windungen einwärts gekrümmt, so müssen sämmtliche Windungen erniedrigt werden. Das letztere konnte ich auch wirklich an einer Spirale bestätigen, welche so zusammengesetzt war, dass die äussere Seite der Windungen aus einem Gummischlauch die innere aus einem leicht biegsamen, an den Schlauch festgeklebten Drathe bestand. Wurde unter einem bedeutenden Druck die Luft in den Schlauch hineingepresst, — wobei die äussere Seite der Spirale sich verlängern musste, so konnte dabei jedesmal eine sehr beträchtliche Annäherung der Windungen beobachtet werden. Bei einer in Bildung begriffenen Stengelspirale, wo die äussere Seite der Windungen in Folge der uns bekannten Eigenschaften der transversalen Krümmung sich stetig verlängert, muss offenbar dasselbe eintreten. In dem Maasse also als die Spirale sich enger zusammenzieht wird aus rein mechanischen Ursachen eine stetige Erniedrigung der Windungen erfolgen, welche Erniedrigung nicht nur die Wirkung des Geotropismus vermindern sondern dieselbe selbst überwiegen und das absolute Flacherwerden der Spirale herbeiführen kann. — Hat man mit einer in horizontaler Lage festgehaltenen Stengelspitze zu thun, bei welcher wie oben besprochen allmälich immer neue horizontale Theile aufwärts gekrümmt werden, so kann in diesem Umstande eine weitere Ursache für die Erniedrigung der Windungen liegen. Wird nämlich das horizontale Stengelstück, welches eine spiralförmige Krümmung trägt aufwärts gekrümmt, so wird der Stengel im unteren Theile der Spirale bezüglich seiner Lage zum Horizonte etwas um seine Axe umgedreht und zwar in dem Sinne, dass seine frühere Seitenkante mehr nach oben zu stehen kommt. Da das Wachsthum der früheren Seitenkante dabei nicht sogleich aufhören kann, so wird jetzt dieses Wachsthum theilweise ein Abwärtskrümmen des entsprechenden Stengeltheiles verursachen. Dieser Umstand muss in der ersten Phase der Spiralenbildung sich besonders geltend machen und dadurch wären die oben besprochenen Fälle zu erklären, in denen die Krümmungsebene einer transversalen Krümmung nur langsam gehoben wird während inzwischen die antidrome Torsion der Spitze ganz unabhängig von ihrem eigenen Gewichte sich immer mehr vergrössert.

Hat die Spitze ihrer ganzen Länge nach eine spiralförmige Krümmung erhalten so werden nicht allein sämmtliche Windungen noch eine Zeit lang enger zusammengezogen sondern auch die Richtung im Raume des untersten Theiles der Spirale fortwährend geändert wird. Einen solchen Fall konnten wir schon bei der Vergleichung der Zuständen I und II Fig. 7 constatiren wo die Basis der Spirale einen kreisförmigen Weg in horizontaler

Ebene beschrieb. Man wird jetzt leicht ersehen können, dass diese Erscheinung ebenfalls nur eine Folge derselben Vorgänge ist, welche die Spiralenbildung überhaupt bedingen, denn sie wird durch die Krümmung auf der äusseren und der unteren Seite des Stengels bestimmt. Die Aufwärtskrümmung kommt eben erst in dem untersten Theile der Spirale zur vollen Wirkung weil tiefer keine Windungen mehr liegen und somit derjenige Umstand, welcher, wie oben erläutert, eine stetige Erniedrigung der Spiralwindungen herbeiführt, hier ausgeschlossen bleibt. In Folge dessen kann der unterste Theil der Spirale allmählich so steil (zum grössten Theile wahrscheinlich geotropisch) aufgerichtet werden, dass seine Krümmung in senkrechte Ebene gebracht wird. Ist das aber erfolgt, so wird der obere Schenkel der Krümmung sich jetzt in horizontaler Ebene weiter krümmen müssen (transversale Krümmung) und wird auf diese Weise wieder in die Spirale hineingezogen. Wenn derselbe Vorgang sich immer wiederholt so muss die Basis der Spirale ihre Richtung im Raume fortwährend im Kreise verändern ohne in eine dauernd aufrechte Lage kommen zu können.

Aus dem in diesem Paragraphen Gesagten folgt, dass die Bildung einer freien Spirale wesentlich von den Eigenschaften der transversalen Krümmung der Spitze abhängt; die Neigung der Windungen einer solchen Spirale wird durch den Geotropismus (zum Theil vielleicht das selbständige Nutationswachsthum der Unterseite) und gewisse geometrische Eigenschaften der Spirale bestimmt.

Antidrome Torsion in Folge der symmetrischen Nutation der Stengelspitze. Das Winden der Stengel wird, wie schon aus früheren Untersuchungen bekannt ist, fast immer von einer gegenläufigen Drehung dieser Stengel begleitet. Es ist darum von Interesse verschiedene mögliche Ursachen einer solchen Drehung kennen zu lernen und ich will hier an einen Fall erinnern, wo die antidrome Torsion bei der symmetrischen Nutation der Spitze entstehen kann. Das muss nämlich jedesmal geschehen wenn eine symmetrisch nutirende Stengelspitze durch eine in ihrem Wege befindliches Hinderniss in ihrer fortschreitenden Bewegung aufgehalten wird. Die Mechanik der Erscheinung ist leicht sich klar zu machen. Bei der symmetrischen Nutation wird ja die Convexität der Nutationskrümmung jedesmal von einer anderen Stengelkante eingenommen, was bei den normalen Bedingungen die kreisförmige Bewegung der horizontalen Spitze zur Folge hat. Wird aber diese Bewegung verhindert, so wird doch die Nutation selbst nicht aufgehalten: auf die convexe Seite der Krümmung kommen ebenso immer neue Stengelkanten, d. h. der Stengel wird um seine Axe und zwar in der gegenläufigen Richtung gedreht. Vor den symmetrisch nutirenden Stengelspitzen von *Dioscorea Batatas*, *Pharbitis hispida* stellte ich einen Stock, welcher die Spitze etwa 2—3 Cent. rückwärts von der Endknospe berührte. In einigen Fällen blieb dabei die Krümmungsebene bis 2 Stunden lang unverändert, während inzwischen die horizontale Spitze eine antidrome Torsion bis 180° erhalten hat. Wurde jetzt der Stock entfernt, so schnellte die Spitze vorwärts bis die erhaltene Torsion vollständig (*Pharbitis*) oder wenigstens zum grössten Theile (*Dioscorea*) ausgeglichen wurde. Hat die im Stengel ent-

standene Torsion eine gewisse Grösse erreicht so hört die weitere Torsion auf und die Spitze krümmt sich in horizontaler Ebene indem sie sich so zu sagen von dem Hindernisse abstösst. Bei einigen, mehr plastischen Stengeln (wie *Dioscorea*) wird schon nach kurzer Zeit ein Theil der Torsion dauernd, während bei den anderen es nicht in demselben Grade der Fall ist. — Noch stärkere Torsionen können hervorgebracht werden, wenn man die Endknospe einer nutirenden Spitze ganz unbeweglich befestigt. Bei einer Spitze von *Ipom. sibirica*, deren horizontale Theil ca. 11 Cent. lang war, habe ich auf diese Weise im Laufe von $3\frac{1}{2}$ Stunden eine Torsion von mehr als $\frac{3}{4}$ Umgang entstehen sehen; da aber im unteren (aufrechten) Stengeltheile schon eine bedeutende homodrome Torsion vorhanden war, so erfolgte darauf plötzlich eine Drehung in umgekehrter Richtung, wobei beide Torsionen sich theilweise ausgeglichen haben. Wird eine in verticaler Ebene gekrümmte, an ihrem freien Ende festgehaltene Stengelspitze längere Zeit bei diesen Bedingungen belassen damit sie sich inzwischen bedeutend verlängern kann, so wird die immer zunehmende Torsion schliesslich in spiralige Krümmung des Stengels umgesetzt. So hat eine Spitze von (links windenden) *Dioscorea Batatas* im Laufe von 20 Stunden mehr als einen Umgang einer rechts gewundenen Spirale gebildet. Dass das Bestreben einer Stengelspitze, ihre kreisförmige Bewegungen fortzusetzen, bei gewissen Bedingungen im Stande ist noch viel stärkere Spannungen zu verursachen, muss aus folgendem, interessanten Versuche von Palm geschlossen werden: «Ich befestigte bei Hopfen, der um eine Stütze sich windete, das oberste Internodium so, dass zwar die Pflanze um die Stütze, aber nicht um sich selbst die Bewegung machen konnte, und bei günstiger Witterung brach die Pflanze an dem Befestigungspunkt nach 6 bis 8 Tagen entzwei». (l. c. S. 19).

Bevor wir zum Winden der Stengel um die Stützen übergehen wird es zweckmässig sein die uns aus dem Vorigen bekannt gewordenen Eigenschaften der windungsfähigen Stengelspitzen nochmals in kurzen Sätzen zu wiederholen.

1) Die ursprüngliche Nutationskrümmung eines aufrechten Stengels entsteht aus inneren Ursachen; die spätere Lage dieser Krümmung am Stengel wird wesentlich durch das Gewicht der Spitze bestimmt.

2) So lange die Krümmung nutationsfähig ist, wird die Spitze in horizontaler Ebene um den aufrechten Stengel als Axe im Kreise bewegt, — symmetrische Nutation.

3) Hat der Stengeltheil, wo die Krümmung liegt, zu nutiren aufgehört, so kann die Krümmung selbst in der Regel nicht mehr ausgeglichen werden und der obere Stengeltheil bleibt für die Dauer in horizontaler Lage.

4) Bei der horizontalen Lage des unbeweglichen Stengels beschreibt die nutirende Spitze eine Kegelfläche, deren Axe etwa 45° gegen die Horizontale geneigt ist, — asymmetrische Nutation.

5) Die Lage der Nutationsaxe wird bei der asymmetrischen Nutation durch den negativen Geotropismus bestimmt, welcher die nutirende Spitze nicht unter die Horizontale sinken lässt.

6) Eine kreisförmige Nutation kommt nur bei der Einwirkung der Schwerkraft auf die nutationsfähige Stengelspitze zu Stande.

7) Ohne Einwirkung der Schwerkraft geht wesentlich nur eine undulirende Nutation der Spitze vor sich.

8) Der Einfluss der Schwerkraft auf die kreisförmige Nutation muss mit der horizontalen Lage einer nutirenden Stengelspitze im Zusammenhang stehen, denn

9) In der horizontalen Lage erfolgt immer und nothwendig nur die homodrome (der Nutationsrichtung gleichsinnige) Krümmung der Spitze in horizontaler Ebene (transversale Krümmung) und zwar wird diese Krümmung so lange verstärkt als die Krümmungsebene horizontal (bzw. sehr geneigt) bleibt.

10) Die mechanische Verhinderung der Krümmungen an einer nutationsfähigen Stelle der Spitze hat eine starke Verlangsamung der Bewegungen in dem benachbarten Theile derselben zur Folge.

11) Eine innerhalb ihrer nutationsfähigen Region festgehaltene Stengelspitze wird in eine freie, dauernde Spirale verwandelt. Die Entstehung der Spirale wird wesentlich durch die Eigenschaften der transversalen Krümmung, bei der geschwächten Nutationsfähigkeit und dem schwachen Geotropismus einer arretirten Spitze bestimmt.

12) Das Gewicht der Spitze spielt bei der Bildung der freien Spirale keine wesentliche Rolle und ist auch nicht im Stande eine irgend wie bedeutende antidrome Torsion der Spitze zu verursachen.

13) Eine antidrome Torsion entsteht aber jedesmal wenn die kreisförmige Bewegung einer symmetrisch nutirenden Spitze verhindert wird. Ein Theil dieser Torsion kann bei einigen Pflanzen schon in kurzer Zeit sich in eine dauernde verwandeln.

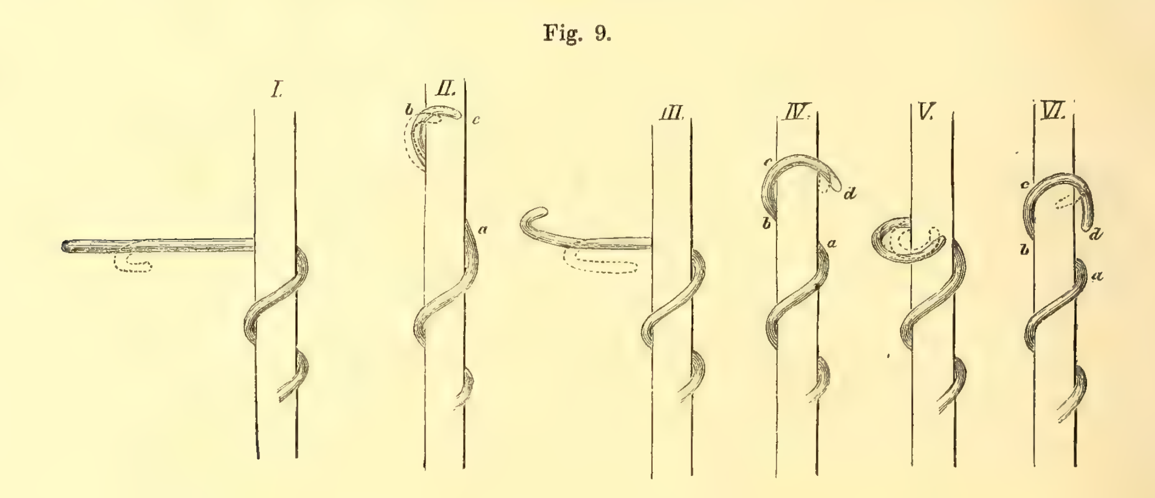
14) Die spontane, homodrome Torsion der windungsfähigen Stengeln scheint mit der Erscheinung der kreisförmigen Nutation ebensowenig in einer mechanischen wie in einer physiologischen Beziehung zu stehen.

15) Junge Internodien der windungsfähigen Stengeln scheinen immer nur positiv heliotropisch zu sein; ältere Internodien dagegen, zeigen bisweilen keinen, gewöhnlich aber einem entschiedenen negativen Heliotropismus.

Das Winden.

Umwinden der Stütze. Aus den uns nun bekannten Thatsachen und den Eigenschaften einer windungsfähigen Stengelspitze kann die Mechanik des Windens ohne Schwierigkeit klar gemacht werden. Es ist einzusehen, dass die fortgesetzte asymmetrische Nutation der Spitze eines windenden Stengels schon genügt um ein regelmässiges Umwinden der Stütze zu ermöglichen. Die Nutation kann aber bei einer windenden Spitze wesentlich auch nicht anders als nach Art der asymmetrischen Nutation erfolgen, weil der unbewegliche, schon gewundene Stengeltheil sich stets in einer gegen den Horizont geneigten Lage befindet. In Fig. 9 ist ein Schema construirt, welches zeigt was vorgehen soll wenn die freie Spitze eines

Fig. 9.



windenden Stengels ihre kreisförmigen Bewegungen in asymmetrischer Weise fortsetzt. Denken wir uns in I einen um die Stütze gewundenen Stengel, dessen Spitze sich in horizontaler Lage gerade gestreckt hat (was in der Natur auch oft zu beobachten ist). Da wir eine linkswindende Pflanze vor uns haben so wird jetzt die horizontale Spitze sich nach links krümmen und zwar zunächst in ihrem jüngsten Theile, so dass sie bald die mit Punctir bezeichnete Form annimmt. Stärker wird sich zunächst die Spitze voraussichtlich nicht krümmen können weil durch das nun eintretende Wachsthum der Unterseite sie rasch (weil sie verhältnissmässig nur kurz und leicht ist) gehoben wird. Ohne die Stütze würde die Spitze jetzt in verticale, ja rückwärts geneigte Lage gebracht, was aber nicht geschehen kann, weil das hakenförmig gekrümmte Ende sich an die Stütze (an der Südseite derselben) anlegt und die weitere Bewegung verhindert. Die Spitze wird in die Lage kommen, welche in II angegeben ist. Wurde auf der Oberseite der noch geraden Spitze eine Marke aufgetragen, so findet man sie jetzt in II, *a* ebenfalls auf der Oberseite liegen um von hier ab allmählich auf die concave Seite der Krümmung *b* überzugehen: es ist also in dem ent-

sprechenden Theile eine scheinbare antidrome Torsion von etwa 90° eingetreten. Das stärkste Wachsthum muss jetzt in dem Theile *b—c* auf der von der Stütze abgewendeten (äusseren) in dem Theile *b—a* — auf der inneren (der Stütze zugekehrten) Stengeltheile erfolgen. Bei der Lage aber, in welcher die Spitze sich befindet, können die Krümmungen in dem bezeichneten Sinne nicht zu Stande kommen; es wird nur eine Spannung eintreten, in deren Folge das hakenförmige Ende der Spitze, *b*, mehr oder weniger von der Stütze zurückgezogen werden und eine Lage annehmen kann wie die in II mit Punctir angegebene. Erfolgt darauf das Wachsthum auf der Oberseite von *a—b* so wird die Spitze ungehindert abwärts sinken, bis sie wieder in ungefähr horizontale Lage gekommen ist, — III. Die scharfe Krümmung der jüngsten Spitze (II, *b*) kann dabei nicht wieder ausgeglichen werden weil bei der schiefen Lage ihrer Ebene das Wachsthum auf ihrer concaven Seite sich nicht geltend machen kann. Durch das Wachsthum der Oberseite von *a* wird diese Krümmung wieder in horizontale (vielleicht etwas schief aufwärts geneigte) Lage gebracht; in horizontaler Ebene geht aber das Wachsthum sogleich auf die rechte Seite der Spitze über, wodurch die frühere Krümmung sich auf rückwärts liegende Theile der Spitze verbreitert. Die Spitze wird die in III mit Punctir angedeute Form annehmen. Kommt jetzt das Wachsthum der Unterseite zu Stande so wird die Spitze sich nicht mehr so steil wie früher aufrichten können und sie wird durch die Stütze in einer Lage aufgehalten, welche in IV zu sehen ist. Bei dem nun eintretenden Wachsthum der Aussenseite in *c—d* und der Innenseite in *b—a* (welches letztere aber, in Folge der Lage der Krümmung zum Horizonte, eigentlich ausbleiben wird) wird die Spitze ihre Lage an der Stütze nicht ändern können; nur das frei hervorstehende Ende der Spitze bei *d*, wird sich vorwärts krümmen und die Stütze an ihrer rechten Seite umbiegen, — wie in IV mit Punctir gezeigt ist. Als Folge dieses letzteren Umstandes wird sein, dass wenn das Wachsthum darauf auf der Oberseite des Theiles *a—b* erfolgt, so kann dadurch die Spitze nicht mehr wie früher von der Stütze entfernt werden. Jetzt kann dies nur geschehen, wenn das Wachsthum auf die folgende Stengelseite, d. h. auf die Oberseite des Theiles *b—c* übergeht. Dabei wird aber nur der Theil *b—c—d* der Spitze gesenkt und seine Krümmung in horizontale Ebene gebracht, — der Theil *a—b* ist zur dauernden Windung geworden. Die Krümmung *b—c—d* wird sich in horizontaler Lage noch enger zusammenziehen, — in V, punctirt, — und wenn darauf das Aufrichten erfolgt, so wird die Spitze in eine Lage kommen wie in VI zu sehen ist. Wenn schliesslich in diesem letzten Stadium das freie Ende der Spitze (in Folge des Wachsthums auf der Aussenseite) ihre Stütze so umgebogen hat, wie es der Punctir in VI andeutet, so ist auch der Theil *b—c* seinerseits unbeweglich und zur dauernden Windung geworden.

Aus diesem Schema ist zu sehen, dass die gewöhnliche asymmetrische Nutation der Spitze (mit den uns bekannten Eigenschaften transversaler Krümmung) das regelmässige Umwinden der Stütze herbeiführen muss, ohne dass man die Mitwirkung irgend welcher anderer Factoren anzunehmen braucht. Ist die nutirende Spitze verhältnissmässig kurz, die Stütze aber dick, so können mehrere Nutationsumgänge durchgemacht werden, bevor die

Spitze so lang oder ihre transversale Krümmung so stark geworden ist, dass sie die Stütze umbiegen und sich so zu sagen an dieselbe anhaken kann. Es war in dem gegebenen Schema zu verfolgen, wie bei jedem Nutationsumgang die transversale Krümmung immer ältere Theile ergreifen und wie in Folge dessen die Spitze sich immer fester an ihre Stütze anlegen muss. Es ist auch daraus leicht einzusehen, dass die Steilheit der Windungen dabei wesentlich von der Dicke der Stütze und der Krümmungsfähigkeit des Stengels abhängen muss, dass folglich bei gleichbleibenden genannten Bedingungen alle Windungen nothwendig auch eine gleiche Neigung erhalten werden. — Man hat dabei nicht ausser Acht zu lassen, dass jedesmal als eine Krümmung in ungefähr verticaler Ebene sich befindet (wie z. B. die Krümmung *b* in II, oder die Krümmung *c* in IV) so wird sie streben symmetrisch zu nutiren, d. h. ihre Ebene im Kreise (um die Stütze herum) zu bewegen. Das Letztere wird aber nur so lange geschehen können, bis die Spannung im Stengel eine gewisse Grösse erreicht hat, worauf das Wachsthum von der convexen auf die äussere Seite der Krümmung übergehen wird.

Verfolgt man nun Schritt für Schritt die Bewegungen, welche die Spitze einer um eine runde und glatte Stütze[1]) windenden Pflanze wirklich durchmacht, so findet man, dass hier im Wesentlichen eben dasselbe vorgeht, was im obigen Schema dargestellt wurde. Der Vorgang erscheint hier aber oft etwas complicirter dadurch, dass man nicht die asymmetrische Nutation der freien Spitze allein vor sich hat, sondern es können zeitweise noch andere, uns bekannte Eigenschaften der Spitze zur Wirkung kommen und sich in verschiedenem Grade an dem Vorgange betheiligen. Ist die Stütze im Verhältniss zur Länge der nutirenden Spitze ziemlich dick und somit der Spielraum für die Bewegungen der Spitze nicht bedeutend, so ist es oft auch kaum möglich, die Reihenfolge der auftretenden Krümmungen sicher zu verfolgen, deren einzelne ausserdem durch den Widerstand der Stütze vollständig verhindert werden. Das macht wohl erklärlich, warum der Vorgang des Windens, ohne vorherige genaue Kenntniss der einzelnen Eigenschaften einer windungsfähigen Spitze von den früheren Beobachtern nicht klar verstanden werden konnte. — Um eine nähere Einsicht in die Natur der Bewegungen zu gewinnen, welche eine windende Stengelspitze in einzelnen Fällen durchmachen kann, wird es hier nothwendig sein, einige solche Fälle genauer zu verfolgen.

1) Unter den von mir beobachteten Schlingpflanzen sind die *Dioscorea*-Arten dadurch eigenthümlich, dass wenn sie auf nicht zu dicke Stützen winden, so bleibt die freie Spitze fast fortwährend in einem scharfen, an die Stütze angedrückten Bogen abwärts gekrümmt. In dieser Lage und in dem Maasse als der Stengel die Stütze umwindet, kreist die gekrümmte Spitze um die letztere herum. In Fig. 10 ist eine windende Spitze von *Dioscorea Batatas* in zwei Stadien dargestellt; der Krümmungsbogen der Spitze pflegt aber schärfer als in diesem Beispiele zu sein. Das Umwinden der Stütze muss somit bei diesen Pflanzen wesent-

1) Bei meinen Beobachtungen wurden nur Glasröhren oder extra dazu angefertigte ganz runde und vollkommen glatte, polirte Holzstöcke gebraucht.

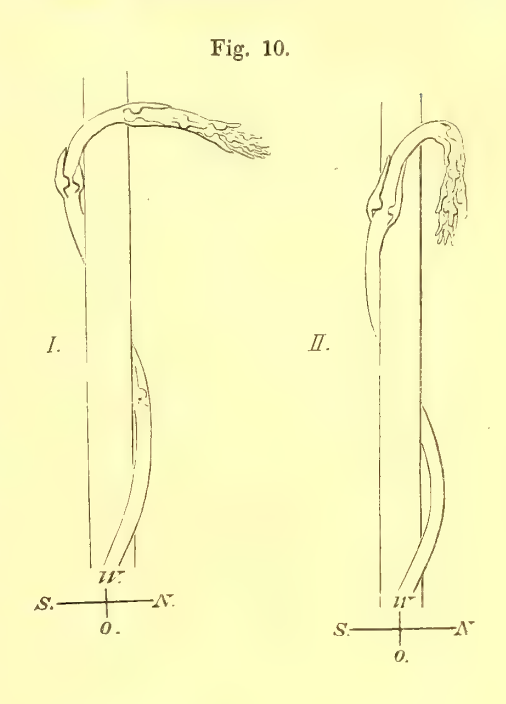


Fig. 10.

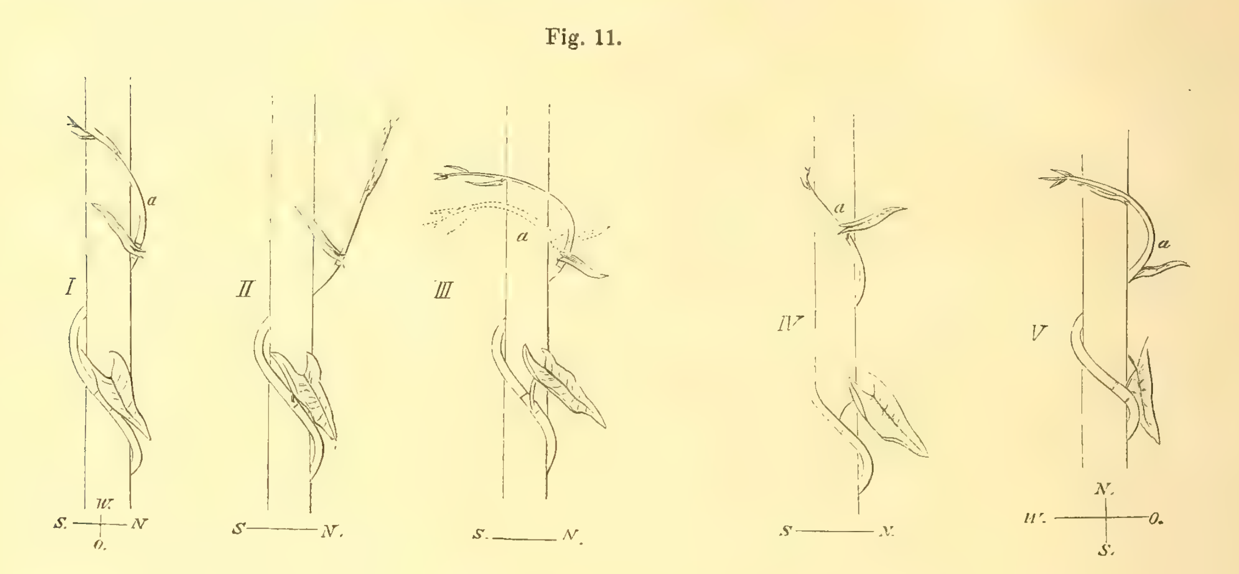
lich in Folge der fortgesetzten symmetrischen Nutation der gekrümmten Spitze zu Stande kommen. Eine solche Nutation lässt die Krümmungsebene der Spitze im Kreise um die Stütze herumwandern, während der Stengel dabei so zu sagen nachgeschleppt wird. Das wird bei diesen Pflanzen dadurch ermöglicht, dass ihre Stengel ausserordentlich rasch in die Länge wachsen und bei dünnen Stützen ist diese Verlängerung meistens ausreichend, damit der Stengel seiner um die Stütze nutirenden Spitze nachfolgen kann. Andererseits muss hier aber die kreisförmige Bewegung der Spitze selbst durch einen Umstand bedeutend verlangsamt werden. Es ist der Umstand, den ich schon oben betont habe, dass nämlich die symmetrische Nutation bei diesen Bedingungen eine antidrome Torsion des Stengels herbeiführen muss. Geht also bei einer links nutirenden Pflanze das beschleunigte Wachsthum jedesmal auf eine mehr rechts gelegene Stengelkante über, so wird inzwischen diese Kante selbst in Folge der antidromen Torsion nach links verschoben. Ist der Stengel plastisch genug (wie es in den jungen Internodien der *Dioscoreen* auch wirklich der Fall ist) und setzt er der Torsion keinen bedeutenden Widerstand entgegen, so wird, theoretisch genommen, eine wirkliche fortschreitende Bewegung der Spitze nur in dem Maasse zu Stande kommen, als durch den nachwachsenden Stengel der Spielraum dazu geschaffen wird. Die Spitze Fig. 10 ist im Laufe von etwa 3 Stunden aus der Lage I in die Lage II gekommen, d. h. nur einen $^1/_4$-Umgang um die Stütze gemacht; inzwischen hat sich aber der Stengel um etwa 2 Centim. verlängert und zugleich eine gegenläufige Drehung von 90° erhalten. Hat aber die Spannung im Stengel eine gewisse Grösse erreicht und ist dadurch die weitere Torsion unmöglich geworden, so beginnt die gekrümmte Spitze auf ihrer äusseren Seite zu wachsen und es stellt sich zeitweise die asymmetrische Nutation ein, was auch wirklich bei diesen Stengeln von Zeit zu Zeit zu beobachten ist. Hat sich die Spitze bei der asymmetrischen Nutation von der Stütze befreit, so wird die erhaltene Torsion theilweise ausgeglichen und der Vorgang kann wieder beginnen. —

Die Mechanik des Windens ist also bei diesen Pflanzen sehr einfach und entspricht wirklich der Vorstellung, welche schon Palm und nachher Ch. Darwin sich von diesem Vorgang gebildet haben. In den meisten Fällen kommt aber die symmetrische Nutation bei dem Umwinden der Stütze nur gelegentlich zu Stande; das Umwinden wird wesentlich durch die asymmetrische Nutation der Spitze bestimmt. Inwieweit dieser oder jener Vorgang sich dabei betheiligen wird, muss in erster Reihe von den specifischen Eigenschaften der Pflanze,

wie der Schnelligkeit des Längenwachsthums, der Drehungsfestigkeit der Spitze, andererseits aber von der Dicke der Stütze abhängen.

2) Als ein Beispiel dazu, wo die symmetrische Nutation neben der asymmetrischen eine bedeutende Rolle bei dem Umwinden der Stütze zu spielen scheint, werde ich einen Fall mit dem rechts windenden *Polygonum Convolvulus* anführen, welcher in Fig. 11 abge-

Fig. 11.



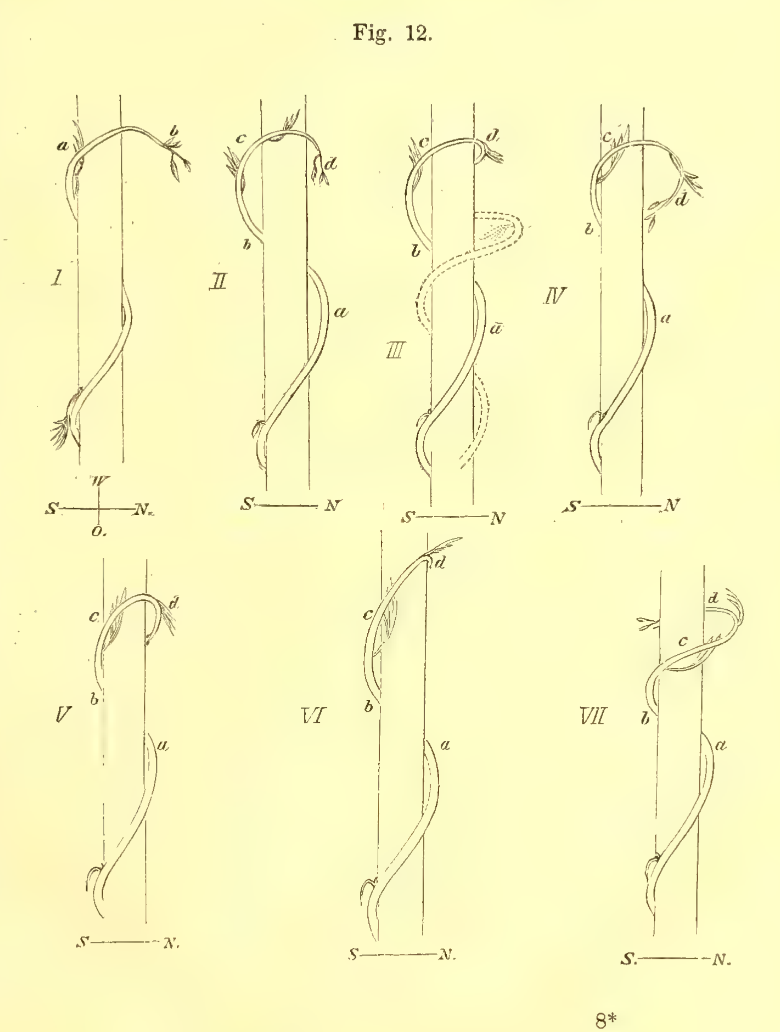
bildet ist. In I wuchs zunächst die Aussenseite von *a*, weil die Spitze fest an die Stütze angedrückt war; dann ging das Wachsthum auf die Unterseite der Spitze über, die letztere richtete sich darum immer mehr in die Höhe, bis sie schliesslich von der Stütze ausgeglitten war. In demselben Augenblick drehte sich die befreite Spitze um beinahe 90° nach rechts, so dass die noch zurückgebliebene Krümmung nach oben geöffnet war (II). Diese Drehung wurde offenbar durch die beim Winden erhaltene antidrome Torsion verursacht, welche sich jetzt theilweise ausgleichen konnte. Das Wachsthum ging darauf auf der concaven, jetzt oberen Seite der Spitze vor sich, welche dadurch in horizontaler Lage sich gerade gestreckt hat. Jetzt krümmte sich die Spitze, wie gewöhnlich, nach der Stütze hin und fast gleichzeitig wurde die Krümmungsebene gehoben, so dass die Spitze allmählich in die Lage III und dann III punctirt (weil mit dem Heben der Spitze ihre Einwärtskrümmung noch immer fortdauerte) gekommen war. Diese letztere Form behielt nun aber die Krümmung der Spitze während $1\frac{1}{4}$ Stunden unverändert. Die Spitze blieb dabei immer fest an die Stütze angedrückt und nur die Krümmungsebene drehte sich um die letztere herum. War in III diese Ebene von N. nach S. gerichtet, so hat sie im Laufe von $1\frac{1}{4}$ Stunden beinahe die Stellung von O. nach W. erlangt, wie in IV zu sehen ist. Es ging also während dieser Zeit eine symmetrische Nutation der Spitze vor sich und, wie zu erwarten war, ist auch inzwischen eine antidrome Torsion von beinahe 90° entstanden. Die Verschiebung der Krümmungsebene der Spitze

musste aber eine Spannung verursachen, deren Folge war es offenbar, dass während in III der Theil *a* der Stütze anlag, so ist er in IV von derselben bedeutend zurückgegangen, wie in V von der Seite zu sehen ist. — Bei den entstandenen Spannungen war offenbar die weitere symmetrische Nutation unmöglich geworden, denn jetzt begann die freie Spitze, ganz wie im Anfang sich wieder aufzurichten, — wahrscheinlich um die Bewegungen in früherer Weise zu wiederholen.

Ist die Stütze im Verhältniss zur Länge der nutationsfähigen Spitze dick genug, so wird es nur schwer dazu kommen, dass die nutirende Spitze ihrer ganzen Länge nach sich von der Stütze befreien kann. Sie sucht dennoch ihre üblichen Bewegungen durchzumachen, wenn auch die Amplituden dieser Bewegungen jetzt in der Regel nur unbedeutend sind. Als Beispiel des Windens einer verhältnissmässig kurzen Stengelspitze mag der folgende Fall angeführt werden.

3) *Ipomaea* (*Operculina*) *tuberosa*, eine 7 Millim. dicke Glasröhre umschlingend, Fig. 12. In I liegt die Krümmung *a—b* in beinahe verticaler Ebene und nutirt offenbar symmetrisch weil die Krümmungsebene, ohne ihre Lage zum Horizonte zu ändern, sich nach links bewegt. In II (nach $^3/_4$ Stunde), findet man diese Ebene um etwa 40—45° nach links verschoben. In Folge der dadurch entstandenen Spannung ist nicht nur der Theil *b—c*, sondern auch der Theil *a* weit von der Stütze zurückgegangen und so mit ist die Neigung des Stengels in *a—b* zur Axe der Stütze bedeutend grösser geworden. Durch den letzteren Umstand ist es zu erklären, dass inzwischen keine antidrome Torsion in der nutirenden Spitze entstanden ist, denn sowie die Erhöhung der Windungen einer Spirale die antidrome Torsion vergrössert, so muss, umgekehrt, bei der Erniedrigung der

Fig. 12.



Windungen dieselbe vermindert werden. — Nun ist aber im Theile *b—c* (II) das Wachsthum der oberen (nach W gekehrten) Stengelseite eingetreten, wodurch die Krümmung *c—d* allmählich in beinahe horizontale Lage gebracht wurde, wie in III und III, punctirt (von der Ost- und der Südseite) zu sehen ist. Sobald der Theil *c—d*, welcher bis jetzt fest an die Stütze gestemmt war, von derselben abgeführt wurde, so legte sich der Theil *a* augenblicklich wieder an die Stütze an und auch *b—c* näherte sich an dieselbe, — zum Beweise, dass die frühere Lage dieser Theile wirklich nur durch die Spannung des Stengels bestimmt wurde. Warum der Stengel in *b—c* auf seiner Westseite und nicht, — wie es sein müsste, — auf der Ostseite zu wachsen anfing, muss wahrscheinlich durch die in II bestandene Spannung erklärt werden, welche bestrebt war, den Stengel in *b—c* eben nach O zu biegen. Wir konnten aber schon früher, nämlich aus dem Einfluss, welcher das Gewicht der Spitze auf die Lage der Nutationskrümmung am Stengel ausübt, uns davon überzeugen, dass bei der nutationsfähigen Stengelspitze eine mechanische Spannung sehr leicht in effectives Wachsthum umgesetzt wird. Verfolgt man genau die Bewegungen, welche windende Stengelspitzen ausführen, so ist es gar nicht selten zu finden, dass das Wachsthum plötzlich auf einer Stengelseite auftritt, wo man es nach den Gesetzen der kreisförmigen Nutation nicht zu erwarten hätte. Solche Unregelmässigkeiten, welche bei gewissen Pflanzen, wie z. B. bei *Ipomaea sibirica* häufiger als bei den anderen und zwar nur bei dem Umwinden einer Stütze auftreten, müssen wahrscheinlich eben durch mechanische Spannungen verursacht werden, welche durch Dazwischenkommen der Stütze in verschiedenen Theilen der nutirenden Spitze leicht erzeugt werden können.

Von der Westseite ist nun das Wachsthum unserer Spitze in regelmässiger Weise auf die Südseite derselben übergegangen und zwar nicht allein in *b—c*, sondern auch im älteren Theile *b—a*, in Folge dessen die Krümmung *b—c* sich an die Stütze anlegte und der Theil *b—a* sich steiler aufgerichtet hat; der Stengel ist somit in die Lage IV gekommen. Bei dem Steilerwerden der Spirale wurde der Stengel etwas um seine Axe (in der antidromen Richtung) umgedreht, wodurch die beinahe horizontale freie Spitze *d*, sich entsprechend gesenkt hat. Jetzt erfolgte das Wachsthum der Ost- (Unter-) Seite: der Theil *b—c* richtete sich steiler auf, die freie Spitze krümmte sich wieder um die Stütze herum, — wodurch eine Lage des Stengels wie in V zu Stande gekommen ist. Hier ist nun zu beachten, dass bei einer spiralförmig gekrümmten Spitze eine der Axe derselben parallele Stengelkante in verschiedenen Theilen einer Windung verschiedene relative Lage in Bezug auf die Stütze einnehmen wird. So z. B. auf der Verlängerung der Innenseite von *a—b* (in V) liegt die Unterseite von *b—c* und die Aussenseite von *c—d* (von jeder Torsion natürlich abgesehen). War darum in der letzten Zeit das Wachsthum der Unterseite von *b—c* zu constatiren, so konnte der Theil *c—d* dabei nur die Stütze enger umwachsen; das Wachsthum von *a—b* auf seiner Innenseite könnte aber schon in Folge der Eigenschaften der transversalen Krümmung nicht zu Stande kommen, würde übrigens durch die fixe Lage dieses Theiles verhindert werden. Ist desswegen in der darauffolgenden Zeit das Wachsthum einen Schritt weiter

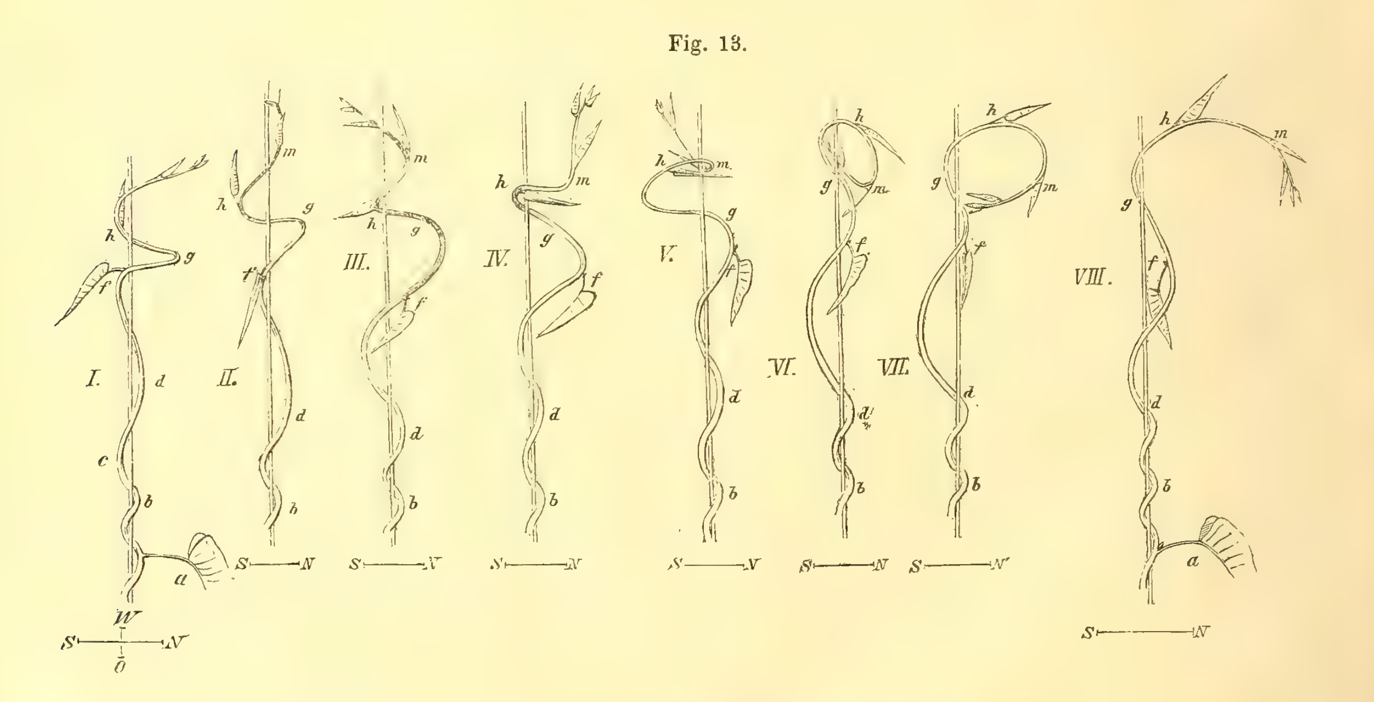
um den Stengel fortgeschritten, so wuchs jetzt der Theil *c—d* auf seiner Unterseite und hat sich seinerseits steil aufgerichtet. Diesem Aufrichten von *c—d* sollte das Wachsthum der Innenseite von *b—c* entsprechen, welches aber und zwar aus den oben genannten Gründen sich nicht zu erkennen gab. — Auf der Verlängerung der Innenseite von *b—c* liegt die Oberseite von *b—a*: diese letztere wuchs auch wirklich, die Neigung dieses Theiles zur Axe der Stütze ist grösser geworden und der Stengel ist in eine Lage wie in VI gekommen, wo in Folge der Erniedrigung von *a—b* und weil die Krümmung *d* fest an die Stütze (an ihrer Nordseite) anlag, der Stengel bei *a* und *c* von der Stütze bedeutend zurückgegangen ist. Das Wachsthum auf der Oberseite von *a—b* dauerte noch fort und inzwischen ist auch das Wachsthum der Oberseite von *b—c* (als eine weitere Nutationsphase) zu Stande gekommen, in Folge dessen die Krümmung *c—d* wieder von der Stütze abgeführt und in horizontale Lage gebracht wurde (als dies geschehen, legte sich der Stengel bei *a* sogleich an die Stütze wieder an) und die Spitze hat somit eine Form wie in VII angenommen. In diesem letzteren Stadium bildet die Spitze ungefähr $^1/_2$-Windung mehr um die Stütze; dazu brauchte sie aber mehr als einen ganzen Nutationsumgang durchgemacht zu haben, was beinahe 4 Stunden Zeit erforderte. Bis die Phasen III—VII durchgelaufen waren, ist in der Spitze eine antidrome Torsion (etwa von *b* aufwärts) von ungefähr 90° entstanden. Diese Torsion, welche hier bei dem wiederholten Aufrichten des schon gewundenen Stengeltheiles aufgetreten ist, ist schon dauernd geworden, denn nachdem die Spitze in VII grösstentheils frei geworden war, hat sich doch die Torsion nicht mehr ausgeglichen.

In den angeführten Beispielen war nicht zu bemerken, dass die Verhinderung der freien Bewegungen einer windenden Spitze eine ungleichmässige Nutation verschiedener Theile derselben herbeiführte. Ist die Stütze nicht zu dünn, so ist eine ungleichmässige Nutation überhaupt nur selten zu beobachten. Das muss wahrscheinlich aus dem Umstande erklärt werden, dass bei einer Pflanze, welche die Stütze umwindet, der nutationsfähige Theil des Stengels immer viel kürzer ist, als er im freien Zustande gewesen wäre. Davon kann man sich leicht überzeugen, nachdem man die Stütze entfernt hat: die freie Spitze, welche jetzt ihre Bewegungen fortsetzt, entspricht etwa der letzten $^1/_2$—1 Windung (eine mittlere Dicke der Stütze, also bei *Pharbitis hispida*, *Ipomaea sibirica* etwa 7—10 Millim. vorausgesetzt), d. h. derjenigen Strecke, welche auch an der Stütze noch beweglich war. Der etwas mehr rückwärts liegende Theil dagegen, welcher in Folge seiner Lage an der Stütze keine Bewegungen mehr ausführen konnte, behält auch jetzt zum grössten Theil seine Krümmung dauernd und bleibt unbeweglich. Daraus ist zu schliessen, dass wenn ein Stengeltheil in eine solche Lage an der Stütze gekommen ist, wo seine Bewegungen factisch unmöglich werden, so geht auch seine Nutationsfähigkeit damit wirklich verloren. Bei einer um die Stütze windenden Pflanze vollständig nutationsfähig bleibt also nur die Spitze von einer solchen Länge, dass ihre Bewegungen mehr oder weniger frei ausgeführt werden können. Mehr rückwärts liegende Theile der Spitze werden aber in ihren Bewegungen nur allmählich beschränkt. Aus den S. 40—42 beschriebenen Erscheinungen haben wir aber gesehen, dass wenn

die Bewegungen einer in Nutation begriffenen Stelle der Spitze nur unvollständig verhindert werden, so wird dadurch die Nutation der freien Spitze nur in der ersten Zeit gestört, später nimmt sie ihren regelmässigen Verlauf wieder an, während die Nutationsfähigkeit der aufgehaltenen Stelle allmählich erlischt. Andererseits hat das Festhalten eines schon wenig beweglichen Theiles der Spitze auf die Nutation der übrigen Theile dieser Spitze überhaupt keinen Einfluss. —

4) Unter den von mir beobachteten Pflanzen ist das Winden von *Ipomaea sibirica* etwas eigenthümlich. Die nutationsfähigen Stengeltheile dieser Pflanze sind ausserordentlich krümmungsfähig und beweglich und wahrscheinlich in Folge dessen scheint eine windende Spitze der genannten *Ipomaea* sich nie an die Gegenwart der Stütze so zu sagen, gewöhnen zu können. Bei sehr dünnen Stützen ist das Verhalten der Spitze und die Reihenfolge der Krümmungen hier deutlich zu verfolgen. Um eine objective Vorstellung von dem Verlauf der Erscheinungen zu geben, will ich darum einen Fall vorführen, wo der Stengel von *Ipom. sibirica* auf einen dünnen, gespannten Faden wand. Einige nacheinander folgende Stadien des Windens sind in Fig. 13 wiedergegeben. In I ist *b* die letzte regelmässig und

Fig. 13.



definitiv angelegte Windung; von hier aufwärts bis *f* bildet der Stengel eine weitere aber ausserordentlich steile Windung, während der übrige Stengeltheil in einer sehr flachen und breiten, die Stütze meistentheils nicht berührenden, freien Spirale zusammengewunden ist. Vergleicht man nun die Lage der einzelnen Stengeltheile in den darauffolgenden Stadien, so findet man, dass in dem Theile zwischen *c* und *g* fortwährend eine kreisförmige Nutation vor

sich ging, wobei aber die gleichzeitig wachsende Stengelkante eine Spirale um die Stengelaxe bildete. Der jüngste Theil der Spitze, etwa von *g* aufwärts, welcher in beinahe horizontaler Ebene gekrümmt war, krümmte sich inzwischen in derselben Ebene nur weiter fort; die Aenderungen in seiner Lage zum Horizonte, welche in I bis VI eingetreten sind, wurden wesentlich durch die Krümmungen der rückwärts liegenden Stengeltheile bestimmt. In IV z. B. lag die Krümmung *h* beinahe horizontal, die Krümmung *m* war schief aufwärts geöffnet; durch die Aufwärtskrümmung von *f* wurde aber die Krümmung *h* (welche sich inzwischen mehr rückwärts verschoben hat) in eine schiefe, die *m* dagegen in eine horizontale Lage gebracht (V). Wurde darauf der Theil *g* (in V) aufwärts gekrümmt, so kamen die Krümmungen *h* und *m* in eine beinahe verticale Lage, welche in VI zu sehen ist. In diese letztere Lage gekommen, war aber die Krümmung *h* genöthigt, sich gerade zu strecken und auf diese Weise ist die ursprünglich spiralförmig gekrümmte Spitze allmählich wieder eine ganz regelmässige Form, — wie in VIII, angenommen. — Bei *Ipom. sibirica* ist auch bei dickeren Stützen nicht selten zu beobachten, dass die Spitze sich in einer flachen und lockeren Spirale um die Stütze herum krümmt, um darauf auf eben dieselbe Weise, d. h. durch ein energisches Aufwärtskrümmen ihres älteren Theiles wieder in die normale Lage gebracht zu werden.

In dem angeführten Falle von *Ipom. sibirica* musste offenbar entweder die geotropische Eigenschaft oder die Nutationsfähigkeit der Spitze in ihren einzelnen Theilen sehr ungleichmässig und auch veränderlich gewesen sein. Aus der Form der Krümmungen in I kann geschlossen werden, dass während der Theil *c—f* in Folge seines starken Geotropismus sich so steil aufrichtete, so war die übrige Spitze kaum geotropisch, denn erst in VI (nach etwa 3 Stunden von I an) erfolgte plötzlich so energisches Aufwärtskrümmen des Theiles *g*, dass die höher liegende Krümmung in verticale Ebene gebracht wurde. Es wäre aber möglich, dass der Theil *c—f* sich gerade strecken konnte, eben weil seine Nutationsfähigkeit zeitweise schwächer wurde; nachdem er später wieder energisch zu nutiren begann, legte er sich in einer neuen und engen Windung (in VIII zu sehen) an seine Stütze an. Das Letztere ist wahrscheinlicher, denn in einem anderen analogen Falle, wo der ältere Theil der Spitze womöglich noch steiler aufgerichtet war, sah ich ihn im Laufe von mehr als 3 Stunden beinahe unbeweglich bleiben; 20 Stunden später fand ich aber diesen Theil seiner ganzen Länge nach in regelmässigen Windungen um den dünnen Drath geschlungen. — *Ipom. sibirica* windet auf sehr dünne Stützen immer in ganz ähnlicher Weise wie in dem hier angeführten Beispiele und die zeitweise auftretende Bildung in dem jüngsten Theile der Spitze einer freien, flachen Spirale ist eine regelmässig sich wiederholende Erscheinung. Ebenso regelmässig kommt das steile Aufrichten des rückwärts liegenden Theiles, — als eine Folge der geschwächten Nutationsfähigkeit zum Vorschein. Dies Letztere muss unzweifelhaft durch die plötzliche (wenn auch nur theilweise) Verhinderung der Bewegungen verursacht werden, welche der untere Theil einer langen Spitze erfahren muss, nachdem ihr freies Ende durch eine rasche Bewegung sich um die Stütze geschlungen hat. — Diese Erscheinungen, welche

bei dickern Stützen hier nicht mehr so deutlich zu beobachten sind, können natürlich auch bei andern Pflanzen sich gelegentlich in verschiedenem Maasse zu erkennen geben, ohne dass sie aber bei irgend einer anderen der von mir beobachteten Pflanzen für den Vorgang des Windens etwa charakteristisch wären.

Das in diesem Abschnitte Gesagte und die angeführten Beispiele werden genügen, um zu zeigen, dass bei dem Umwinden der Stützen keine anderen Factoren, als die uns schon aus dem Vorigen bekannten Eigenschaften der windungsfähigen Stengelspitzen maassgebend sind und dass sie auch dazu vollständig ausreichen. In den gewöhnlichen Fällen ist somit das Winden nichts anderes, als die fortgesetzte asymmetrische Nutation der freien Spitze, welche letztere aber in der Regel mehrere Nutationskreise beschreiben muss, bevor es ihr gelingt, eine neue Windung um die Stütze zu bilden. Die Anzahl der Nutationskreise, welche zum Vollziehen einer Windung nothwendig sind, wird natürlich von der Dicke der Stütze und von der Schnelligkeit des Längenwachsthums und der Nutation der Pflanze abhängen müssen. Die symmetrische Nutation spielt in den meisten Fällen bei dem Umwinden der Stütze keine bedeutende Rolle; sie wird zwar jedesmal auftreten, wenn die Krümmungsebene der Spitze in annähernd verticale Ebene gekommen ist, kann aber nur so lange andauern, als die kreisförmige Bewegung der Krümmungsebene oder die gegenläufige Torsion der Spitze überhaupt noch möglich ist. Je dünner also die Stütze und je ausgiebiger das Längenwachsthum des Stengels ist, desto länger wird jedesmal die symmetrische Nutation der Spitze fortdauern können und wir haben auch gesehen, dass bei gewissen Pflanzen mit besonders rasch wachsenden Stengeln, — wie die *Dioscoreen*, das Umwinden einer verhältnissmässig dünnen Stütze zum grössten Theile durch die symmetrische Nutation der Spitze zu Stande gebracht wird. — Die Bildung einer freien Spirale kommt in der Regel bei dem Umwinden der Stütze nicht zu Stande, — die Bewegungen einer windenden Stengelspitze sind wesentlich nur wenig von denjenigen einer frei nutirenden verschieden. Das muss durch den schon oben besprochenen Umstand bestimmt werden, dass nämlich bei einer windenden Pflanze nur ein verhältnissmässig kurzer Theil der Spitze vollständig nutationsfähig bleibt. Aus dem schon oben (S. 61) darüber Gesagten folgt aber, dass die Länge dieses Theiles jedesmal an die Dicke der Stütze so zu sagen angepasst wird, weil jedesmal nur derjenige Theil der Spitze nutationsfähig bleibt, welcher in seinen Bewegungen nicht durch die Stütze verhindert werden kann. Ein weiterer Grund der geringen Empfindlichkeit der windenden Stengelspitze gegen die mechanischen Hindernisse mag in dem Umstande liegen, dass die Krümmungsfähigkeit (Nutationsfähigkeit) einer solchen Spitze überhaupt bedeutend geschwächt zu sein scheint. Aus dem Vergleichen der Zeitdauer, welche eine windende Spitze für einen Nutationsumgang braucht, mit derjenigen einer frei nutirenden (von derselben Pflanzenart) finde ich, dass die erstere durchschnittlich um etwa 25—30% langsamer als die letztere nutirt.

Eine grosse Bedeutung für den Vorgang des Windens hat die Eigenschaft der Spitze in horizontaler Ebene rasch (und zunächst in ihrem jüngsten Theile) eine starke Krümmung

in der Richtung des Windens zu bilden. Infolge dessen bleibt die windende Spitze fortwährend mit ihrem Ende hakenförmig gekrümmt, die Lage dieser Krümmung ist aber immer derart, dass die nutirende Spitze nur abwärts und in der Richtung des Windens (um die Stütze herum) sich ungehindert krümmen kann, während ihre Bewegung von der Stütze weg schon aus mechanischen Gründen vollständig unmöglich wird. Die Vorstellung von der Mechanik des Windens, zu welcher der kritische Sinn Schwendener's diesen Forscher geführt hat, kommt auch in gewisser Beziehung nahe an den wirklichen Sachverhalt, ohne ihm aber zu entsprechen, denn Schwendener kannte die Eigenschaften der transversalen Krümmung nicht und glaubte darum die vorwiegende Krümmungsfähigkeit der Spitze in der Richtung des Windens durch die mechanischen Spannungen einer windenden Spitze erklären zu müssen. Dem entsprechend kann nach Schwendener eine Stütze nicht mehr von einer Pflanze umwunden werden, wenn die nutationsfähige Spitze derselben kürzer ist als der $\frac{1}{2}$-Umfang der Stütze. Thatsächlich trifft das aber nicht zu. Ein Stengel von *Dioscorea Batatas* wand bei mir (im Zimmer, wo eine nutationsfähige Stengelspitze nie so lang ist, wie im Freien) um eine Stütze von 34 Cent. Umfang, welche die (etwa 10—12 Cent. lange) Spitze nicht zu umfassen vermochte; sie machte ihre Bewegungen neben der Stütze und doch wurden beinahe 2 Windungen um die Stütze gebildet, welche aber so locker waren, dass sie sich nicht mehr halten konnten und fielen herunter. Ganz dasselbe zeigte im Freien ein schwacher Hopfenstengel, welcher eine Stütze von 37 Cent., aber ebenfalls nur so locker umwand, dass die Windungen ihre Lage nicht dauernd behalten konnten. Die Bewegungsamplituden der Spitze waren in diesen Fällen nur unbedeutend, die Bewegungen selbst der Art, dass die Aufwärtskrümmungen der Spitze nur schwach waren, sie blieb meistentheils nach der Stütze concav gekümmt und mit ihrer Endknospe an die Stütze angedrückt. Aus dieser Thatsache ist auch zu sehen, dass die oben angegebene mechanische Bedeutung der hakenförmigen Krümmung der Spitze, welche Krümmung in den gewöhnlichen Fällen dazu beiträgt das Umwinden der Stütze ausserordentlich sicher zu machen, doch keineswegs als eine nothwendige Bedingung des Windens anzusehen ist. Eine solche Bedingung liegt vielmehr in der speciellen Eigenschaft einer windungsfähigen Stengelspitze in horizontaler oder sehr geneigter Ebene sich vorwiegend in der Richtung des Windens zu krümmen.

Was die Bedeutung des Geotropismus für das Winden betrifft, so braucht nach dem in diesem Abschnitte schon Gesagten diese Frage kaum noch besprochen zu werden. Ohne als ein directer Factor des Windens aufzutreten hat doch der Geotropismus insofern eine Bedeutung, als er die Stellung der Ebene bestimmt, in welcher die Bewegungen der Spitze erfolgen. Darin liegt die Erklärung der seit H. v. Mohl bekannt gewordenen Thatsache, dass die Pflanze nicht mehr eine Stütze zu umwinden vermag, wenn ihre Neigung zur Verticale einen gewissen Winkel übertrifft. Dieser Winkel wurde aber für verschiedene Pflanzen sehr ungleich gefunden, was, wie leicht einzusehen, hauptsächlich von der specifischen Krümmungsfähigkeit der Spitze wird abhängen müssen. Die Angabe von Hugo de Vries, dass die jüngsten Windungen flach und locker sind um erst nachher in Folge

des Geotropismus sich zu strecken und der Stütze fest anzulegen, beruht offenbar auf der Beobachtung solcher Fälle, wo die Spitze zeitweise zu einer freien Spirale sich um die Stütze krümmt, was bei den im Freien wachsenden Pflanzen überhaupt öfter als bei den Zimmerculturen zu geschehen pflegt. Doch auch in solchen Fällen wird, wie wir gesehen haben, die freie Spirale nicht einfach durch blosse Streckung in definitive Windungen verwandelt. Jede solche Windung entsteht vielmehr unmittelbar bei den Nutationsbewegungen der Spitze und wird jedesmal dauernd nachdem der betreffende Theil in eine solche Lage gekommen ist, wo seine weiteren Krümmungen unmöglich werden. Daher kommt es, dass bei runden und gleichmässig dicken Stützen alle Windungen ausserordentlich regelmässig sind, was nach der Vorstellung von Hugo de Vries aber nicht zu erwarten wäre. Einige Pflanzen mit besonders krümmungsfähigen Spitzen bieten auffallende Beispiele dazu, wie wenig überhaupt die Lage der Windungen von dem Geotropismus abhängen kann. Bei *Ipom. sibirica* z. B. ist die Neigung der Windungen auf einem dünnen Faden (Fig. 13, VIII) beinahe dieselbe wie auf den Stützen von 8—10 Millim. Durchmesser[1]). Die jüngsten Windungen, so lange sie noch wachsthumsfähig bleiben, werden allerdings streben in Folge des Geotropismus steiler zu werden, was an den von ihrer Stütze befreiten Windungen leicht zu constatiren ist. Solche geotropische Windungen können auch nach Maassgabe ihres Längenwachsthums wirklich etwas steiler werden. Die unmittelbare Beobachtung zeigt aber, dass das Längenwachsthum in dem schon gewundenen Theile rasch aufhört und dass es in der Regel nicht mehr als die letzte Windung ist, welche noch geotropisch bleibt, so dass der nachträgliche Einfluss des Geotropismus auf die Lage der Windungen jedenfalls nur gering ist.

Antidrome Torsion der gewundenen Stengel. Hugo de Vries scheint deutlicher als es bei den früheren Beobachtern geschah unterschieden zu haben, dass die gegenläufige Torsion nur bei gewundenen Stengeln vorkommt, hielt sie aber für keine das Winden regelmässig begleitende Erscheinung und glaubte die homodrome Torsion an den gewundenen Stengeln ebenso oft beobachtet zu haben (l. c. S. 331). Dieser thatsächlichen Angabe entspricht der Versuch von Hugo de Vries das Auftreten der gegenläufigen Torsion zum Theil auf zufällige Ursachen zurückzuführen. Als eine solche, deren aber H. de Vries eine bedeutende Rolle zuzuschreiben scheint, liegt nach ihm in der seitlichen Verschiebung, welche der gewundene Stengeltheil erfahren muss, wenn auf der Innenseite der Windung sich ein Blatt befindet. In seinem Streben sich (in Folge des Geotropismus) fest an die Stütze anzulegen wird der Stengel in dem betreffenden Knoten sich so weit nach der einen oder der anderen Richtung drehen müssen, bis die Blattbasis auswärts zu stehen kommt. Als eine mehr allgemeine Ursache der entstehenden antidromen Torsion betrachtet aber H. de Vries

---

1) Es wäre danach zu erwarten, dass eine und dieselbe Pflanze (die gleiche Dicke der Stütze vorausgesetzt) bei günstigen Wachsthumsbedingungen flacher windet und umgekehrt, — was ich leider versäumte direct zu beobachten.

das Gewicht der in horizontalen Bogen gekrümmten, windenden Spitze, welches den rückwärtsliegenden Stengeltheil in der (dem Winden) gegenläufigen Richtung zu drehen sucht.

Schwendener constatirte, dass die regelmässig gewundenen Stengel immer nur gegenläufig gedreht sind und erkannte in dieser Art der Torsion eine Erscheinung, welche als eine mechanische und zum Theil nothwendige Folge des Windens auftritt. Wie ich schon oben Gelegenheit hatte zu bemerken hat Schwendener gezeigt, dass, wenn ein gerader, cylindrischer Stab zu einer Spirale gebogen wird, und zwar der Art, dass die Biegungsaxen zur Axe des Stabes rechtwinklig stehen, so erhält er nothwendig eine scheinbare antidrome Torsion, welche desto stärker ist, je steiler die Windungen. Diese Torsion erfolgt aber nicht wenn ein solcher Stab schief zu seiner Axe gebogen wird. Schwendener ist nun der Meinung, dass die windenden Pflanzenstengel sich dieser letzteren Eventualität mehr nähern müssen, weil die Kräfte, welche die Biegungen der Stengel bei dem Umwinden einer Stütze verursachen, hauptsächlich in einer zur Axe des Stengels schiefen Richtung wirksam sind. Die Quelle der drehenden Kraft findet Schwendener in derjenigen Spannung, welche sucht den Krümmungsbogen der Spitze an die Stütze anzudrücken (vergl. oben, S. 8). Steht der betreffende Bogen in einer zur Axe der Stütze schiefen Ebene, so wird dabei eine antidrome Drehung der Spitze eintreten müssen.

Die Angabe Schwendener's über das constante Auftreten der antidromen Torsion an den geschlungenen Stengeln kann bei einigermaassen aufmerksamer Beobachtung für die meisten Pflanzen leicht bestätigt werden. Verschiedene Pflanzen zeigen eben diese Erscheinung in sehr ungleichem Grade. Unter den von mir beobachteten können *Polygonum Convolvulus*, *Pharbitis hispida*, *Convolvulus arvensis* als Beispiele angeführt werden wo die gegenläufige Torsion in der Regel nur unbedeutend und ausserdem sehr unconstant ist; es geht bei der letztgenannten Pflanze soweit, dass es sogar nicht schwer ist einzelne Strecken zu finden wo der Stengel in der homodromen Richtung tordirt ist. Bei den meisten Pflanzen scheint das aber bei den regelmässig geschlungenen Stengeln nie der Fall su sein und einige Pflanzenarten, wie *Ipomaea sibirica*, zum Theil der Hopfen, lassen im Gegensatz zu den früher genannten bei nicht zu dünnen Stützen gewöhnlich eine sehr starke gegenläufige Torsion erkennen. Schwendener bemerkte schon, dass diese Torsion mit der Dicke der Stütze sich überhaupt vergrössert. Ich habe die Torsion an einer und derselben Pflanze bei verschieden dicken Stützen verglichen und Folgendes gefunden:

Für den Stengel von *Humulus Lupulus*, im Freien (sehr geschützter Ort):

Umfang der Stütze in Millimeter.	Anzahl der Windungen.	Anzahl der Torsionsumläufe.	Torsionsumläufe für eine Windung.
55	16¼	16¼	1
72	7¾	9	1,16
118	9¼	20¼	2,20
125	16¼	31¼	1,92

für den Stengel von *Ipomaea sibirica*, im Zimmer:

Umfang der Stütze in Milimeter.	Anzahl der Windunden.	Anzahl der Torsionsumläufe.	Torsionsumläufe für eine Windung.
$4\frac{1}{2}$	10	3	0,33
44	8	20	2,50
54	7	18	2,57

Ein Torsionsumlauf wurde gerechnet nachdem eine der Axe parallele Stengelkante, welche von der Aussenseite der Windung um den Stengel herum ging, wieder auf der Aussenseite der Windung erschienen ist. Die scheinbare Drehung ist somit in den obigen Zahlen mitbegriffen, was eben nicht anders zu machen ist, weil, wie Schwendener selbst hervorgehoben hat, ist die Grösse dieser scheinbaren Drehung bei den gewundenen Stengeln nicht genau zu ermitteln. Um die eintretende Torsion bei *Ipom. sibirica*, deren Stengel glatt ist, zu beobachten, wurde auf dem freien Ende der Spitze ein der Axe derselben paralleler Strich mit Tusche aufgetragen, und jedesmal auf die neu anwachsenden Internodien verlängert. Es zeigte sich dabei, wie es schon von Hugo de Vries angegeben wurde, dass das jüngste, noch ganz frei bewegliche Ende der Spitze überhaupt keine Torsion erfährt.

Bei einigen Pflanzen, sehr auffallend oft bei Hopfen, ist die Thatsache zu constatiren, dass einzelne Internodien nicht etwa ihrer ganzen Länge nach gleichmässig tordirt sind, und zwar scheint die Drehung meistentheils im unteren Theile der Internodien stärker als im oberen zu sein. Bisweilen ist der untere Theil ausserordentlich stark gedreht, während der obere nur eine schwache Drehung besitzt, wodurch die beiderseits eines Knotens liegende Stengelregionen sehr verschiedenes Aussehen erhalten. Diese Erscheinung muss wahrscheinlich dadurch bestimmt werden, dass zu der Zeit, wo bestimmte Internodien in Folge ihrer Lage am stärksten tordirt werden, sie eben in einer Wachsthumsperiode sich befinden, wo ihre unteren Theile am meisten weich und plastisch sind. Die Uebergabe der erhaltenen Torsion auf die rückwärts liegenden Internodien wird aber durch den Umstand verhindert, dass der Torsion der schon gewundenen Internodien bald eine Gränze, und zwar durch den Widerstand der Blätter, gesetzt wird. Beobachtet man aufmerksam einen gewundenen und mehr oder weniger stark tordirten Stengel, so findet man in der That, dass fast sämmtliche Blattstiele in der Richtung der Torsion an die Stütze angelehnt und fest an dieselbe angedrückt sind. Die Torsion muss darum auf die jüngeren Internodien sich beschränken, deren Blattstiele noch weich und nachgiebig sind, — worauf wir später noch zurückkommen werden.

Die Torsion, welche ein leicht biegsamer, aber untordirbarer Stab (wie das bei Schwendener's Versuchen der Fall war) bei dem Umwinden um eine cylindrische Fläche erhält, ist, wie schon Schwendener hervorhob, nur eine scheinbare: einzelne Querschnitte eines solchen Stabes bleiben in ihrer relativen Lage unverändert, nur ihre Lage in Bezug auf die Stütze verschieden ist. Wird ein biegsames Bleiröhrchen um einen festen

Cylinder spiralförmig gewunden so erhält es immer die von Schwendener angegebene Torsion. Wird aber darauf eine solche Spirale in der Ebene ihrer Windungen zurückgekrümmt, so bleibt dabei an dem Röhrchen keine Torsion zurück. Die Torsion der gewundenen Pflanzenstengel ist aber, zum Theil wenigstens, eine wirkliche, wo die Axe selbst des Stengels gedreht ist. Werden die Windungen eines solchen Stengels zurückgerollt so erscheint er immer noch (wenn auch etwas schwächer) in der antidromen Richtung tordirt. Handelt es sich also darum die Ursachen der antidromen Torsion der gewundenen Stengel zu untersuchen, so müssen zunächst beide Arten der Torsion auseinandergehalten werden. Ueber die Ursachen der wirklichen Torsion der gewundenen Stengel hat sich Schwendener nicht ausgesprochen. Die schon oben besprochene, von dem genannten Forscher angeführte Spannung eines zur Axe der Stütze schief gestellten Krümmungsbogens ist eigentlich derselbe Vorgang, welcher jedesmal bei dem Steilerwerden einer mehr flachen Spirale stattfindet und welcher ebenfalls nur eine scheinbare Torsion verursachen kann. An einem nicht elastischen Stabe, einem dünnen Bleiröhrchen, kann man sich anschaulich davon überzeugen. — Die Kraft, mit welcher die Torsion der windenden Stengel zu Stande kommt ist sehr beträchtlich. Bei Hopfen oder *Ipom. sibirica*, wo die Blätter an sehr jungen Internodien schon bedeutend entwickelt sind und wo die Spitze starke Torsion erfährt, ist sehr oft zu beobachten wie ein Blattstiel, welcher in Folge der Drehung der Spitze an die Stütze angedrückt wurde, bei weiterer Drehung scharf gebogen und in Form einer Schleife unter dem Stengel durchgezogen wird; bei Hopfen wird die breite Blattlamina dabei gewöhnlich zusammengeknickt und wenn sie nicht abgerissen wird (was auch bisweilen geschieht) so wird sie schliesslich auf die andere Seite durchgeschleppt.

Was nun die Ursachen der wirklichen antidromen Torsion betrifft, so kann von den von Hugo de Vries angeführten Umständen nur die etwaige Wirkung des Eigengewichtes einer in horizontaler Ebene gekrümmten, freien Spitze in Aussicht genommen werden. Bei der Betrachtung der asymmetrischen Nutation haben wir auch gesehen, dass eine lange und weiche Stengelspitze, deren horizontale Krümmung etwa 180° erreicht hat in Folge ihrer Schwere eine merkliche Torsion erhalten kann. Diese Torsion wird aber jedesmal wieder vollständig ausgeglichen, sobald die Krümmungsebene in eine gegen den Horizont sehr schiefe Stellung gebracht wird. Andererseits zeigten uns die früher beschriebenen Versuche mit abgeschnittenen Hopfen- und Menispermumstengeln (S. 48), dass wenn die Krümmung der Spitze weniger bedeutend ist (wobei das Gewicht an einen von der Endknospe weiter rückwärts liegenden, älteren Stengeltheil drehend einwirkt) so ist ihr eigenes Gewicht kaum ausreichend irgend eine merkliche Torsion des Stengels zu verursachen. Diese Thatsachen zusammengenommen führen nur zu dem Schlusse, dass die Wirkung des Eigengewichtes einer windenden Stengelspitze höchstens in ganz beschränktem Maasse sich an der Drehung des Stengels betheiligen kann[1]). Wie wenig die wirkliche antidrome Torsion der Stengel

1) Was die antidrome Drehung an einer ausserhalb einer Stütze sich bildenden Spirale betrifft, welche Dre-

von dem Gewichte der Spitze abhängig ist zeigt unmittelbar der Fall von *Dioscorea* wo die windende Spitze meistentheils abwärts gekrümmt bleibt, während doch die Drehung des Stengels sich fortwährend vergrössert.

Eine wirkliche und fortwährend thätige Ursache der antidromen Torsion ist unzweifelhaft in den Nutationsbewegungen der windenden Stengelspitze zu suchen. Ich habe schon früher (S. 51—52) darauf aufmerksam gemacht, wie die Verhinderung der fortschreitenden Bewegung einer symmetrisch nutirenden Spitze zu einer antidromen Torsion derselben Anlass giebt. An den im vorigen Paragraphen beschriebenen Fällen des Windens war es auch wirklich zu erkennen, dass die symmetrische Nutation hier nicht selten bei den Bedingungen auftritt wo sie sich in antidrome Torsion umsetzen muss. Bei den Pflanzen wie die *Dioscorea* muss auch die Torsion der gewundenen Stengel fast ausschliesslich durch die symmetrische Nutation der Stengelspitze verursacht werden. — Die auf diesem Wege entstandene antidrome Torsion wird aber nicht eine bedeutende Grösse erreichen können; die Ursache davon habe ich schon bei der Beschreibung des Windens von *Dioscorea* (S. 57) angegeben. Wächst der Stengel rasch in die Länge und ist die Stütze dünn genug, so wird die Krümmungsebene der Spitze sich ungehindert um die Stütze bewegen können und es wird überhaupt keine wirkliche antidrome Torsion zu Stande kommen. Jedenfalls kann diese Torsion der gewundenen Stengel nur zum kleinen Theile durch die symmetrische Nutation verursacht werden, weil diese Art der Nutation selbst in der Regel nur gelegentlich auftritt, während die Bewegungen der windenden Stengelspitze wesentlich in asymmetrischer Weise erfolgen. — In diesem letzteren Falle ist aber in den Bewegungen der Spitze nicht minder thätige Ursache der antidromen Torsion gegeben und zwar wieder jedesmal wenn eine Bewegung durch den Wiederstand der Stütze verhindert wird. Der Vorgang ist hier offenbar derselbe wie bei der Verhinderung einer symmetrischen Bewegung, weil er in beiden Fällen darauf beruht, dass das Wachsthum selbstständig das Bestreben hat von der einen Stengelkante auf die nächste um den Stengel herum zu schreiten. Am stärksten wird die antidrome Torsion jedesmal eintreten, wenn eine in horizontaler oder sehr schiefer Ebene liegende, enge Krümmung bestrebt ist in eine mehr aufrechte Lage zu kommen. Betrachten wir z. B. die in Fig. 9, V mit Punctir angedeutete freie Krümmung, welche auf ihrer Unterseite zu wachsen begann. Wäre keine Stütze da so würde die Krümmung in verticale Lage kommen, wobei die wachsende Stengelseite zur convexen Seite der Krümmung geworden wäre. Durch die Stütze wird aber die Krümmung in schiefer Lage aufgehalten und das noch fortdauernde

---

hung, wie wir gesehen haben, auch ganz unabhängig von dem Gewichte der Spitze zu Stande kommt, so ist diese Drehung unzweifelhaft nur eine scheinbare. Dafür spricht schon der Umstand, dass diese Drehung hier hauptsächlich mit der ersten Windung der Spirale auftritt und bei der nachträglichen Vermehrung der Anzahl der Windungen sich nur wenig vergrössert. An einer aus dem Bleiröhrchen dargestellten Spirale konnte ich mich wirklich überzeugen, dass wenn eine Spirale sich enger zusammenzieht, wodurch die Anzahl ihrer Windungen grösser (die Windungen selbst aber nothwendig niedriger) wird, so bleibt dabei die gesammte Torsion der Spirale unverändert.

Wachsthum der früheren Seite wird nur die gegenläufige Drehung der Spitze, so zu sagen das Rollen derselben auf der Stütze zur Folge haben, bis die wachsende Seite zur convexen Seite der Krümmung geworden ist. Es ist natürlich nicht zu erwarten, dass die Spannung sich dabei vollständig in Torsion umsetzt; ein Zunehmen der wirklichen Torsion kann aber in der That bei den angegebenen Bedingungen sehr oft direct constatirt werden; Beispiele dazu haben wir in den oben beschriebenen Fällen des Windens gesehen. Die am meisten effectiven Bewegungen einer windenden Spitze bestehen eben in den Auf- und Abwärtsbewegungen derselben, welche erstere mit einer wirklichen gegenläufigen Drehung der Spitze verbunden ist. Bei der entgegengesetzten Bewegung wird zwar die erhaltene Torsion sich wieder frei ausgleichen können, was, — wie wir sehen werden, manchmal auch wirklich geschieht. Bei den meisten Pflanzen aber, wo die Spitze wenig elastisch und weich ist, bleibt dabei wenigstens ein Theil der Torsion übrig, um bei wiederholten Nutationsumgängen sich immer zu summiren. — Auf diese Weise muss die Torsion wesentlich in dem noch unmittelbar beweglichen Theile der Spitze entstehen. Ich habe durch mehrere Tage die allmähliche Entstehung der Torsion an einer ca. 1 Cent. dicke Stütze umwindenden *Ipomaea sibirica* verfolgt und gefunden, dass diese Torsion wirklich nur in dem nutirenden Theile der Spitze (innerhalb der äussersten Stelle, mit welcher die Krümmung der Spitze mit der Stütze in Berührung kommt) entsteht; selbst in dem jüngsten aber schon ganz unbeweglichen Theile der Windung ist nur eine geringe nachträgliche Vergrösserung der Torsion zu constatiren.

Aus dem Gesagten folgt unmittelbar, dass die wirkliche Torsion pro Windung mit der Dicke der Stütze und zwar voraussichtlich in demselben Verhältniss sich vergrössern muss, wie die Anzahl der Nutationsumgänge, welche für die Bildung einer Windung nothwendig sind. Aus der oben gegebenen kleinen Tabelle scheint es aber, dass nachdem die Stütze eine gewisse Dicke erreicht hat, so vergrössert sich mit weiterem Zunehmen dieser Dicke die Torsion nur sehr wenig, ja vielleicht vermindert sie sich wieder (Hopfen). Das rührt möglicherweise davon her, dass in den obigen Zahlen auch die scheinbare Torsion, welche von der Neigung der Windungen abhängt, mitbegriffen ist. Da die Neigung der Windungen sich mit der Dicke der Stütze gewöhnlich (bei Hopfen sehr augenfällig, die Zahlenangaben fehlen mir leider) vermindert, so muss dabei die gesammte Torsion der Spitze bei der Verminderung der scheinbaren Torsion verhältnissmässig immer geringer erscheinen. — Hat aber die Stütze ein gewisses Maximum der Dicke überschritten, so dass die Nutation der Spitze, wie oben angegeben, nicht um, sondern neben der Stütze erfolgt, so erfährt der Stengel auch keine antidrome Torsion, er wird im Gegentheil, wie im freien Zustande homodrom tordirt, — was die oben dargelegte Ansicht über die Ursachen der antidromen Torsion nur bestätigt. —

Die Thatsache, dass bei gleicher Dicke der Stütze die gewundenen Stengel verschiedener Pflanzen in sehr verschiedenem Grade tordirt sind, wird unzweifelhaft durch die Elasticität der Stengel bestimmt. Bei den Pflanzen, deren gewundene Stengel nur schwache

Torsion aufweisen, ist es unmittelbar zu beobachten, wie fast jedesmal, wenn die windende Stengelspitze sich abwärtsgekrümmt und somit von der Stütze sich befreit hat, sie fast in demselben Augenblick eine Drehung in der homodromen Richtung erfährt, welche offenbar nur eine Ausgleichung der schon bestandenen antidromen Torsion bedeutet. In besonders hohem Grade ist das bei *Convolvulus arvensis* der Fall, dessen gewundene Stengel, wie schon früher erwähnt, nur ganz geringe antidrome, stellenweise sogar homodrome Torsion erkennen lassen. Die Elasticität der Spitze und das Bestreben die gezwungene antidrome Torsion auszugleichen, ist bei dieser Pflanze so bedeutend, dass manchmal dieses Bestreben allein hinreicht dazu eine schwach angehakte Spitze von der Stütze ausgleiten zu lassen. In einem solchen Falle habe ich gesehen, wie nachdem eine solche Spitze ausglitt, fast momentan beinahe eine ganze Windung sich gerade streckte und zugleich einen vollen Umlauf (bezüglich ihrer früheren Lage auf der Stütze) einer homodromen Torsion erhielt. — Die homodrome Drehung einer zeitweise frei gewordenen, windenden Spitze geht in der Regel nur so weit, bis die schon bestandene entgegengesetzte Torsion sich (vollständig oder nur theilweise) ausgeglichen hat. Bei den Pflanzen aber wie *Convolvulus arvensis*, wo die organische Neigung zu der homodromen Torsion ausserordentlich gross zu sein scheint (was aus dem Verhalten der nicht windenden Stengel dieser Pflanze zu schliessen ist) kann es leicht vorkommen, dass diese Torsion auch bei einer regelmässig windenden Spitze eintritt, sobald dieselbe sich von ihrer Stütze zeitweise entfernt hat. —

Aus dem über das Winden Gesagten erhellt, dass:

1) Das Umwinden der Stütze wird in der Regel durch die asymmetrische Nutation der Spitze vermittelt.

2) Die Eigenschaften der transversalen Krümmung sind für das Winden maassgebend, weil dadurch die Bewegungen der Spitze hauptsächlich in der Richtung des Windens erfolgen.

3) Bei einer steil aufgerichteten windenden Spitze wird das Entfernen von der Stütze durch das hakenförmig gekrümmte Ende der Spitze mechanisch verhindert.

4) Die symmetrische Nutation der Spitze spielt bei dem Umwinden der Stütze meistens nur eine unbedeutende Rolle.

5) Die Fähigkeit der Stengelspitze bei gewissen Bedingungen eine freie Spirale zu bilden, kommt meistentheils bei dem Umwinden der Stütze nicht zur Geltung.

6) Die Neigung der Windungen ist wesentlich von der Krümmungsfähigkeit der Spitze (hauptsächlich von der Intensität der transversalen Krümmung) und der Dicke der Stütze abhängig.

7) Der Geotropismus spielt in der Mechanik des Windens keine unmittelbare Rolle.

8) Die wirkliche antidrome Torsion der gewundenen Stengel wird durch die Nutationsbewegungen der windenden Spitze verursacht; insofern ist diese Torsion eine das Winden nothwendig begleitende Erscheinung.

9) Die bei der Nutation der windenden Spitze entstehende Torsion kann bei elastischen Stengeln von Zeit zu Zeit wieder ausgeglichen werden, in Folge dessen die bleibende Torsion an den gewundenen Stengeln verschiedener Pflanzen sehr verschieden sein kann.

Ouvrages botaniques publiés dans la VII[me] série des Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences:

T. I, № 2, **Regel, E.** Die Parthenogenesis im Pflanzenreiche. Eine Zusammenstellung der wichtigsten Versuche und Schriften über Samenbildung ohne Befruchtung, nebst Beleuchtung derselben nach eigenen Beobachtungen. 1859. Mit 2 Taf. Pr. 60 K. = 2 Mk.

T. III, № 1. **Borszczow, El.** Die Aralo-Caspischen Calligoneen. 1860. Mit 3 Taf. Pr. 65 K. = 2 Mk. 20 Pf.

№ 8. **Borszczow, El.** Die pharmaceutisch-wichtigen Ferulaceen der Aralo-Caspischen Wüste, nebst allgemeinen Untersuchungen über die Abstammung der im Handel vorkommenden Gummiharze: Asa foetida, Ammoniacum und Galbanum. 1860. Mit. 8 Taf. Pr. 1 R. 95 K. = 6 Mk. 50 Pf.

T. IV, № 4. **Regel, E.** Tentamen florae Ussuriensis oder Versuch einer Flora des Ussuri-Gebietes. Nach den von Herrn R. Maack gesammelten Pflanzen bearbeitet. 1861. Mit 12 Taf. Pr. 2 R. 95 K. = 9 Mk. 80 Pf.

№ 11. **Bunge, Al. v.** Anabasearum revisio. Cum tribus tabulis. 1862. Pr. 1 R. 20 K. = 4 Mk.

T. VII, № 1. **Ruprecht, F. J.** Barometrische Höhenbestimmungen im Caucasus, ausgeführt in den Jahren 1860 und 1861 für pflanzen-geographische Zwecke nebst Betrachtungen über die obere Gränze der Culturpflanzen. 1863. Pr. 1 R. 5 K. = 3 Mk. 50 Pf.

T. VIII, № 15. **Famintzin, A.** Die Wirkung des Lichtes auf das Wachsen der keimenden Kresse. 1865. Pr. 25 K. = 80 Pf.

T. IX, № 2. **Bunge, Al. v.** Uebersichtliche Zusammenstellung der Arten der Gattung Cousinia Cass. 1865. Pr. 45 K. = 1 Mk. 50 Pf.

T. X, № 6. **Woronin, M.** Ueber die bei der Schwarzerle (Alnus glutinosa) und der gewöhnlichen Garten-Lupine (Lupinus mutabilis) auftretenden Wurzelanschwellungen. 1866. Mit 2 lith. Taf. Pr. 30 K. = 1 Mk.

№ 11. **Maximowicz, C. J.** Rhamneae orientali-asiaticae. 1866. Cum tabula. Pr. 30 K = 1 Mk.

№ 16. **Maximowicz, C. J.** Revisio Hydrangearum Asiae orientalis. 1867. Scripsit tabulisque 4 lapidi incisis illustravit..... Pr. 80 K. = 2 Mk. 70 Pf.

T. XI, № 2. **Kauffmann, N.** Beitrag zur Kenntniss von Pistia texensis Klotsch 1867. Mit 1 lith. Taf. Pr. 25 K. = 80 Pf.

№ 7. **Linsser, C.** Die periodischen Erscheinungen des Pflanzenlebens in ihrem Verhältniss zu den Wärmeerscheinungen. Mit Zugrundelegung einer Bearbeitung des von dem Herrn Director der Brüsseler Sternwarte, Prof. A. Quetelet, publicirten Materials, sowie einiger nördlicheren Beobachtungsreihen. 1867. Pr. 35 K. = 1 Mk. 20 Pf.

№ 9. **Famintzin, A.** und **Baranetzky, J.** Zur Entwickelungsgeschichte der Gonidien- und Zoosporenbildung der Flechten. 1867. Mit 1 lith. Taf. Pr. 25 K. = 80 Pf.

№ 16. **Bunge, Al. v.** Generis Astragali species gerontogeae. Pars prior. Claves diagnosticae. 1868. Pr. 1 R. 10 K. = 3 Mk. 70 Pf.

T. XII, № 2. **Schmidt, Fr.** Reisen im Amur-Lande und auf der Insel Sachalin, im Auftrage der Kaiserlich-Russischen Geographischen Gesellschaft ausgeführt. Botanischer Theil. 1868. Mit 2 lith. Karten und 8 lith. Taf. Abbildungen. Pr. 2 R. 85 K. = 9 Mk. 50 Pf.

№ 3. **Strassburger, E.** Die Befruchtung bei den Farrnkräutern. 1868 Mit. 1 lith. Taf. Pr. 30 K. = 1 Mk.

T. XIII, № 6. **Sperk, G.** Die Lehre von der Gymnospermie im Pflanzenreiche. Eine von der Kais. Universität zu Charkow gekrönte Preisschrift. 1869. Avec 7 pl. (200 fig.) lith. Pr. 1 R. 40 K. = 4 Mk. 70 Pf.

№ 8. **Linsser, C.** Untersuchungen über die periodischen Lebenserscheinungen der Pflanzen. Zweite Abhandlung: Resultate aus einer eingehenden Bearbeitung des eu-

ropäischen Materials für die Holzpflanzen in Bezug auf Wärme und Regenmenge. 1869. Pr. 75 K. = 2 Mk. 50 Pf.

T. XIV, № 4. **Osten-Sacken, Baron Fr. v. d.**, et **Ruprecht, F. J.** Sertum Tianschanicum. Botanische Ergebnisse einer Reise im mittleren Tian-Schan. 1869. Pr. 60 K. = 2 Mk.

T. XV, № 1. **Bunge, Al. v.** Generis Astragali species gerontogeae. Pars altera. Specierum enumeratio. 1869. Pr. 1 R. 95. K. = 6 Mk. 50 Pf.

№ 2. **Ruprecht, F. J.** Flora Caucasi. Pars I. 1869. Accedunt tabulae (lith.). Pr. 2 R. 90 K. = 9 Mk. 70 Pf.

T. XVI, № 9. **Maximowicz, C. J.** Rhododendreae Asiae orientalis. 1870. Scripsit tabulisque 4 lapidi incisis illustravit.... Pr. 80 K. = 2 Mk. 70 Pf.

T. XVIII, № 2. **Bunge, Al. v.** Die Gattung Acantholimon Boiss. 1872. Mit 2 lith. Taf. Pr. 95 K. = 3 Mk. 20 Pf.

T. XIX, № 1. **Russow, E.** Vergleichende Untersuchungen betreffend die Histiologie (Histiographie und Histiogenie) der vegetativen und sporenbildenden Organe und die Entwickelung der Sporen der Leitbündel-Kryptogamen, mit Berücksichtigung der Histiologie der Phanerogamen, ausgehend von der Betrachtung der Marsiliaceen. 1872. Mit XI Taf. Abbildungen. Pr. 2 R. 75 K. = 9 Mk. 20 Pf.

T. XX, № 3. **Famintzin, A.** und **Woronin, M.** Ueber zwei neue Formen von Schleimpilzen: Ceratium hydnoides Alb. et Schw. und Ceratium porioides Alb. et Schw. 1873. Mit 3 Taf. Pr. 60 K. = 2 Mk.

T. XXI, № 1. **Bunge, Al. v.** Labiatae persicae. 1873. Pr. 70 K. = 2 Mk. 30 Pf.

№ 9. **Gobi, Ch.** Die Brauntange (Phaeosporeae und Fucaceae) des Finnischen Meerbusens. 1874. Mit 2 Taf. Pr. 40 K. = 1 Mk. 30 Pf.

T. XXII, № 1. **Bunge, Al. v.** Species generis Oxytropis Dc. 1874. Pr. 1 R. 30 K. = 4 Mk. 30 Pf.

№ 2. **Keyserling, Al.** Gen. Adiantum L. 1875. Avec 1 pl. Pr. 50 K. = 1 Mk. 70 Pf.

№ 10. **Famintzin, A.** Beitrag zur Keimblattlehre im Pflanzenreiche. 1876. Mit 8 lith. Taf. Pr. 1 R. = 3 Mk. 30 Pf.

T. XXIV, № 2. **Schmalhausen, J.** Beiträge zur Kenntniss der Milchsaftbehälter der Pflanzen. 1877. Avec 2 pl. Pr. 45. K. = 1 Mk. 50 Pf.

№ 7. **Gobi, Ch.** Die Rothtange (Florideae) des Finnischen Meerbusens. 1877. Avec 1 pl. Pr. 25 K. = 80 Pf.

T. XXV, № 2. **Cienkowsky, L.** Zur Morphologie der Bacterien. 1877. Avec 2 pl. Pr. 40 K. = 1 Mk. 30 Pf.

T. XXVI, № 1. **Gobi, Ch.** Die Algenflora des Weissen Meeres und der demselben zunächstliegenden Theile des nördlichen Eismeeres. 1878. Pr. 75 K. = 2 Mk. 50 Pf.

№ 10. **Famintzin, A.** Embryologische Studien. 1879. Avec 3 pl. Pr. 40 K. = 1 Mk. 30 Pf.

№ 12. **Klinge, I.** Vergleichend-histiologische Untersuchung der Gramineen- und Cyperaceen-Wurzeln, insbesondere der Wurzel-Leitbündel. 1879. Avec 3 pl. Pr. 85 K. = 2 Mk. 80 Pf.

T. XXVII, № 2. **Baranetzky, J.** Die tägliche Periodicität im Längenwachsthum der Stengel. 1879. Avec 5 pl. Pr. 1 R. 20 K. = 4 Mk.

№ 8. **Bunge, Al.** Pflanzen-geographische Betrachtungen über die Familie der Chenopodiaceen. 1880. Pr. 30 K. = 1 Mk.

T. XXVIII, № 4. **Borodin, J.** Untersuchungen über die Pflanzenathmung. 1881. Mit 2 Taf. Pr. 55 K. = 1 Mk. 80 Pf.

T. XXIX, № 3. **Maximowicz, C. J.**, De Coriaria, Ilice et Monochasmate, hujusque generibus proxime affinibus Bungea et Cymbaria. 1881. Cum tabulis 4 lapidi incisis. Pr. 1 R. = 3 Mk. 30 Pf.

Imprimé par ordre de l'Académie Impériale des sciences.

Juillet, 1883. C. Vessélofsky, Secrétaire perpétuel.

Imprimerie de l'Académie Impériale des sciences.
(Vass.-Ostr., 9e ligne, № 12.)

MÉMOIRES
DE
L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES DE ST.-PÉTERSBOURG, VII[E] SÉRIE.
TOME XXXI, N° 9.

L'ABERRATION DES ÉTOILES FIXES.

PAR

Magnus Nyrén.

(Lu le 15 février 1883.)

ST.-PÉTERSBOURG, 1883.
Commissionnaires de l'Académie Impériale des sciences:
à St.-Pétersbourg: MM. Eggers et C[ie] et J. Glasounof;
à Riga: M. N. Kymmel;
à Leipzig: Voss' Sortiment (G. Haessel)

Prix: 40 Kop. = 1 Mark. 30 Pf.

MÉMOIRES
DE
L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES DE ST.-PÉTERSBOURG, VIIE SÉRIE.
Tome XXXI, N° 9.

L'ABERRATION
DES ÉTOILES FIXES.

PAR

Magnus Nyrén.

(Lu le 15 février 1883.)

St.-PÉTERSBOURG, 1883.
Commissionnaires de l'Académie Impériale des sciences:
à St.-Pétersbourg: MM. Eggers et Cie et J. Glasounof;
à Riga: M. N. Kymmel;
à Leipzig: Voss' Sortiment (G. Haessel).

Prix: 40 Kop. = 1 Mark. 30 Pf.

Imprimé par ordre de l'Académie Impériale des sciences.
Septembre, 1883. C. Vessélofsky, Secrétaire perpétuel.

Imprimerie de l'Académie Impériale des sciences.
(Vass.-Ostr., 9 ligne, № 12.)

Le mémoire classique de W. Struve sur l'aberration des étoiles fixes a engagé les astronomes, pendant plusieurs dizaines d'années, à regarder la valeur trouvée par lui, pour la constante de l'aberration, comme d'une certitude pour ainsi dire absolue. Ce n'était pas la seule autorité de l'illustre auteur, qui avait amené ce succès: les qualités intrinsèques du travail lui ont acquis à un plus haut degré encore la confiance générale.

Dans ces conditions notre entreprise de déterminer de nouveau, par la même méthode d'observation, la dite constante, ne pouvait avoir pour but de réduire encore l'erreur probable par des observations plus nombreuses. Certainement pour bien longtemps encore, l'exactitude indiquée par l'err. pr. $\pm$ 0,"011, comme l'a trouvée W. Struve, aurait satisfait à tous les besoins de l'astronomie pratique. Mais d'autres séries d'observations, d'une haute exactitude, ont fourni des indications très fortes que l'aberration trouvée par Struve fût affectée d'une erreur considérablement plus grande que ne l'accusait l'err. pr. évaluée. Ces indications gagnent encore en force par le fait que les autres séries, auxquelles nous venons de faire allusion, s'accordent toutes à assigner à la constante une valeur plus forte de plusieurs centièmes de seconde, quoique les observations aient été faites par différents observateurs, à l'aide de différents instruments, et par des méthodes qui n'ont rien de commun entre elles. C'est pourquoi nous n'avons pu supprimer un doute légitime sur le degré d'exactitude indiqué par l'err. pr. de la valeur trouvée par W. Struve.

D'un autre côté, en considérant les soins minutieux pris par Struve dans l'exécution de la série d'observations, il paraît difficile d'indiquer les sources d'erreur qui lui auraient échappé. Presque toute erreur de nature systématique est exclue par l'arrangement même des observations. Ce n'est que sur deux points, que son travail paraît laisser la possibilité d'un doute, à savoir: la régularité supposée de la marche diurne de l'horloge, sur laquelle les passages des étoiles avaient été notés, et l'invariabilité de l'azimut de l'axe horizontal de l'instrument, dans l'intervalle entre les passages de la même étoile par les deux branches (Est et Ouest) du premier vertical. Ces remarques ont déjà été faites par l'auteur lui-même quelques ans après la publication de son mémoire; elles l'ont engagé à

ajouter une petite correction à la valeur primitive et à adopter une valeur de la moitié plus forte pour l'err. pr. de la détermination. Plus tard M. O. Struve, en réponse à une interpellation faite dans la séance de l'Académie des Sciences de Paris du 22 juillet 1872, a exposé, dans le même ordre d'idées, les raisons qui rendaient une nouvelle détermination de la dite quantité fort désirable. Il est évident que de petites variations accidentelles dans la marche de l'horloge ou dans l'azimut de l'axe de l'instrument ne sauraient occasionner dans les observations que des erreurs accidentelles, dont l'influence, par le grand nombre d'observations, se trouverait réduite de très près à zéro. Ce ne serait donc que par des variations d'une nature systématique que le résultat déduit de ces observations pourrait être influencé à un degré notable. Quant à l'horloge, il n'y aurait pas à s'étonner, si la marche avait été constamment un peu différente pendant les observations du matin et pendant celles du soir. Une telle différence n'aurait pu être aperçue dans les comparaisons peu fréquentes avec la pendule normale. Cependant, vu les petits intervalles qui séparent l'un de l'autre les passages des étoiles observées par les deux branches du premier vertical, on comprendra que les erreurs des résultats, dues à cette cause, ne sauraient être que minimes.

La constance de l'azimut de l'instrument a été l'objet d'examens nombreux de la part de W. Struve lui-même à l'époque de ses observations, et plus tard j'ai examiné de nouveau la même question (Obs. de Poulk. Vol. III p. (195)); mais ni à l'une ni à l'autre occasion aucune trace de variations systématiques ne s'est révélée. Il faut cependant convenir que la détermination régulière de l'azimut de notre instrument par des observations d'étoiles de grande distance zénithale — la seule méthode dont on a pu faire usage jusque dans ces derniers temps — se complique extrêmement par l'effet de différentes causes troublantes à étudier spécialement, lorsqu'il s'agit de fixer la valeur de cet élément avec assez d'exactitude pour notre but, et pour toutes les heures du jour et toutes les saisons. Ordinairement on a été forcé de se contenter d'un petit nombre d'observations de quelques étoiles choisies, et de supposer que l'axe de rotation de l'instrument soit resté invariable en sens azimutal pendant les intervalles entre les passages Est et Ouest. En considérant que ces intervalles embrassent toujours plusieurs heures, il est évident que ce contrôle est peu satisfaisant. Il restait encore la possibilité de variations périodiques qui auraient échappé à la découverte par cette méthode. On ne peut donc prétendre avec certitude, que la détermination de l'aberration, exécutée par W. Struve, soit tout-à-fait à l'abri d'erreurs systématiques.

A ce point de vue, il faut reconnaître qu'une nouvelle détermination de la constante de l'aberration, exempte des objections ci-dessus énoncées, était fort à désirer. L'intérêt qui se rattache à une valeur aussi exacte que possible de cette quantité n'est pas limité par les besoins immédiats de la réduction des observations astronomiques. Vu la précision extraordinaire atteinte en ces derniers temps par MM. Cornu, Michelson, Forbes et Newcomb dans leurs recherches sur la vitesse de la lumière, on pourra aussi sans doute

accepter avec beaucoup de confiance, pour la parallaxe du soleil, la valeur à déduire de cette vitesse en combinaison avec l'aberration des étoiles fixes.

Ayant reconnu combien il était à désirer que l'incertitude mentionnée ci-dessus fût dissipée par de nouvelles recherches, il paraît nécessaire de répondre, avant tout, à une objection assez grave, soulevée contre toutes les déterminations de l'aberration, instituées de la même manière jusqu'à présent.

Dans un mémoire très intéressant, inséré dans la «Connaissance des temps» pour 1878[1]), M. Yvon Villarceau a fait remarquer le premier que, pour déterminer rigoureusement la constante de l'aberration, il est indispensable d'avoir égard au mouvement absolu de translation du système solaire. Afin qu'on puisse juger du degré d'importance de cette observation, nous reproduirons ici, pour l'expression de l'aberration, la formule à employer lorsqu'on veut prendre en considération ce mouvement. En posant:

V = vitesse absolue de la lumière;
U = vitesse de translation du système solaire;
$v = \frac{U}{V}$;
$\varkappa$ = angle formé par la direction du mouvement du système solaire avec la direction d'une étoile quelconque;
α = aberration spéciale à l'étoile considérée,

nous aurons:

$$\alpha = \frac{k}{\sqrt{1 - v^2 \sin\varkappa^2} + v\cos\varkappa} \quad \text{(a)}$$

où

$$k = \frac{1}{\sin 1''} \cdot \frac{a}{\cos\eta} \cdot \frac{2\pi}{T};$$

si l'on nomme a le demi-grand axe de l'orbite terrestre, T la durée de l'année sidérale et η l'angle dont le sinus = excentricité de la même orbite (l. c. p. 32).

En supposant nul le rapport de la vitesse absolue du système solaire à la vitesse de la lumière, on retombe sur la formule connue de l'aberration. Mais lorsqu'on admet pour v une valeur appréciable, on ne trouve plus les mêmes valeurs de α que pour les étoiles dont les directions $\varkappa$ avec le mouvement du système solaire sont d'égale grandeur. Les deux quantités α et k ne coïncident que dans les cas où

$$\varkappa = \text{arc}\cos\frac{v}{2}, \text{ c.-à-d. à peu près } 90°,$$

puisque v est nécessairement une quantité très petite.

Dans quelle direction faudra-t-il choisir au ciel les étoiles qui satisferont à cette condition?

1) Voir aussi Comptes Rendus 1872 et 1875.

Dans l'impossibilité actuelle de donner à cette question une réponse satisfaisante, M. Villarceau fait la proposition de choisir quatre étoiles, de sorte que leurs positions correspondent aux quatre sommets d'un tétraèdre régulier inscrit à la sphère céleste. De cette manière la valeur moyenne des aberrations à obtenir pour les quatre étoiles serait indépendante de l'influence produite par le mouvement du système solaire sur l'aberration de chaque étoile séparement. S'il y avait des différences notables dans les quatre valeurs trouvées, on déterminerait en même temps, par cet arrangement, les coordonnées du lieu vers lequel est dirigé le mouvement de translation de notre système. D'un autre côté, si des différences appréciables ne se montraient pas entre les résultats fournis par les quatre étoiles, une telle série d'observations nous donnerait, en dépendance de l'exactitude des observations instituées, une limite supérieure pour la vitesse de translation du système solaire.

Cette théorie de l'aberration est basée sur des principes que M. Villarceau formule ainsi:

«On attribue la propagation de la lumière aux vibrations de l'éther qui remplit les espaces célestes, et l'on admet que ce fluide n'est animé que de mouvements de cette nature. On admet encore que, de chacune des positions de la source lumineuse, partent des ondes qui se propagent en ligne droite et avec une vitesse constante et indépendante, tant de sa direction, que de l'état de mouvement ou de repos de la source lumineuse».

Avec ces principes pour base, on parvient par des déductions rigoureuses aux formules que nous venons de reproduire. Il faut donc convenir que l'ancienne théorie de l'aberration n'est pas à l'abri d'objections à cet égard. Dans ce qui va suivre nous allons examiner de plus près, de combien les déterminations de la constante de l'aberration, exécutées jusqu'à présent à l'aide des observations d'étoiles fixes, ont pu être influencées par les termes négligés.

La valeur de v étant évidemment une très petite fraction, nous voyons par l'équation (**a**) que la différence entre les quantités α et k atteindra son maximum lorsque

$$\varkappa = 180^\circ \text{ ou } = 0^\circ$$

et que les extrêmes valeurs seront

$$\alpha = k\,(1 + v)$$

et

$$\alpha = k\,(1 - v).$$

Dans la quantité v, c.-à-d. dans le rapport de la vitesse du mouvement absolu du système solaire à celle de la lumière, il y a deux composantes à discerner: le mouvement du système solaire par rapport au système galactique, et le mouvement admissible de ce dernier système lui-même. Quant à la première composante, nous en connaissons le montant entre des limites assez restreintes: il paraît très vraisemblable que la translation annuelle du système solaire ne dépasse pas de beaucoup le double du rayon de l'orbite terrestre.

Ceci donné, l'effet de ce mouvement sur la constante de l'aberration serait au maximum de 0,″0006. Dans la moyenne des résultats qu'on obtiendrait par rapport à des étoiles situées à différents endroits du ciel, cet effet se réduirait nécessairement à une fraction de la valeur maximum. Il s'ensuit qu'on n'a rien à craindre, pour l'exactitude de l'aberration déduite des observations d'étoiles fixes quelconques, de l'influence qu'exerce sur le résultat le mouvement de translation du système solaire par rapport au système galactique.

Concernant l'autre composante du mouvement absolu — la translation de tout le système galactique — nous ne savons rien, et M. Villarceau observe avec raison que notre connaissance de l'une des composantes ne permet de préjuger en rien ce qui se rapporte à l'autre. Cependant, quand même nous voulions admettre que cette autre composante soit dix ou bien vingt fois plus forte que celle que nous venons de discuter, toujours l'effet sur la constante de l'aberration à déterminer par des observations en différents endroits du ciel sera tout à fait imperceptible. On peut, de plus, avec une certitude presque absolue affirmer qu'il faudra renoncer pour toujours à l'espoir de parvenir par cette voie à la connaissance du mouvement de notre nébuleuse, tant qu'il ne se fasse pas dans l'art de l'observation des progrès tout à fait inattendus.

Ayant discuté les objections qu'on pourrait faire, sous l'un ou l'autre de ces points de vue, à la détermination de l'aberration exécutée par Struve, nous donnerons maintenant les détails nécessaires pour juger du travail analogue entrepris par nous dans le même but.

L'instrument employé dans cette nouvelle série d'observations est le même dont s'est servi W. Struve, l'instrument des passages établi dans le premier vertical. Dans l'intervalle entre les deux séries, l'instrument n'a subi que très peu de changements. En premier lieu il faut mentionner ici le nouveau porte-oculaire avec le micromètre. Il y a trois ans, le col du tambour de la vis micrométrique a été cassé. Cet accident nous engagea à remplacer l'ancien micromètre par un nouvel appareil micrométrique, construit par le mécanicien de l'Observatoire. La construction du nouveau micromètre nous permet de corriger l'inclinaison entre les fils fixes et les fils mobiles, ce qui n'était pas possible avec l'ancien appareil. Aussi maintenant les fils fixes sont tendus en deux groupes de sept fils, séparés du fil du milieu par des intervalles de 110″. On sait que d'après la méthode d'observation de W. Struve ce n'est que l'un de ces groupes qui s'emploie pour une observation complète. Afin d'abréger le temps nécessaire pour le passage d'une étoile par tous les fils d'un groupe, les distances entre les fils ont été réduites de 56″ à 37,″ distance de très près égale à deux révolutions de la vis micrométrique. Au lieu d'un seul fil mobile, nous en avons maintenant deux, séparés également l'un de l'autre d'une distance de deux révolutions de la vis. Dans toute la série d'observations nous n'avons jamais fait usage de la

vis micrométrique pour mesurer directement la distance de l'étoile à un fil fixe; mais les fils mobiles ont été employés pour quelques étoiles, de la même manière que les fils fixes, c.-à-d. ils ont été placés dans une position déterminée, dans laquelle ils sont restés pendant tout le passage de l'étoile par une branche du premier vertical. Pour les étoiles qui passent le méridien à une distance zénithale de plus d'un degré, le passage par le réticule s'effectue trop rapidement pour qu'on puisse sans précipitation observer les passages par tous les sept fils d'un groupe, lire le niveau, renverser l'instrument, faire une nouvelle lecture du niveau et observer une seconde fois les passages par les mêmes fils dans la nouvelle position de l'instrument. Dans ces cas on a observé les passages par les fils mobiles, placés à l'extérieur des fils fixes, et l'on a omis les passages par les deux fils les plus voisins du fil du milieu. Pour les étoiles culminant à une distance zénithale de 15′ ou de moins, les passages par tous les fils fixes du groupe auraient exigé trop de temps; alors les passages par les deux fils fixes les plus éloignés du fil du milieu ont été omis, et on les a remplacés par les passages par les fils mobiles placés approximativement au milieu de deux intervalles séparant deux paires de fils fixes. En prenant soin que l'indication du tambour du micromètre fût exactement la même pour tous les quatre passages de l'étoile par le même fil, on a tout à fait éliminé du résultat la valeur d'une révolution de la vis micrométrique.

Il faut encore mentionner un autre détail, en apparence très insignifiant, mais qui pour le résultat à déduire ne manque pas d'importance. L'éclairage du champ du tube se fait à l'aide d'un miroir métallique, ayant la forme d'un anneau elliptique, et placé dans le cube central approximativement sous l'inclinaison de 45° par rapport à l'axe optique du tube. Avant le commencement de la nouvelle série d'observations, l'inclinaison du miroir a été corrigée un peu. Auparavant ce n'était que dans la direction verticale du tube qu'on avait le champ éclairé par un quinquet fixé à la paroi de la salle d'observation dans la direction de l'axe horizontal. Maintenant l'éclairage du champ est indépendant de la direction du tube. Ce changement n'aurait aucune influence sur les distances zénithales déduites des observations, si l'éclairage était tout à fait égal dans les deux positions, tube Sud et tube Nord du pilier. Mais il n'en est pas ainsi lorsque les rayons lumineux qui éclairent le champ, viennent, dans la position tube Sud, d'une autre partie du miroir que dans la position tube Nord; les distances zénithales à déduire pourraient par ce fait varier d'une quantité minime. Dans la nouvelle série d'observations j'ai tâché autant que possible d'affaiblir toute influence nuisible provenant de cette origine.

Dans l'intervalle écoulé depuis l'époque des observations de W. Struve, notre instrument a été pourvu d'un nouveau niveau pour la détermination de l'inclinaison de l'axe horizontal, l'ancien niveau s'étant cassé il y a quelques années. Un examen très minutieux m'a fait trouver, pour la valeur angulaire d'un intervalle de ce niveau, la formule:

$$\frac{\tau}{2} = 0''\!,604 + 0''\!,0013\,(l - 51{,}0)$$

où l désigne la longueur de la bulle d'air. Afin d'éviter que des erreurs, provenant d'une inexactitude quelconque de cette formule, n'influençassent les observations, nous avons eu soin de veiller toujours à ce que l'inclinaison de l'axe fût très petite; ce n'est que dans des cas exceptionnels qu'elle s'est élévée au-delà d'un petit nombre de dixièmes de seconde.

Dans l'emploi du niveau, j'ai suivi la règle de le laisser immobile sur les pivots de l'axe, en ne le renversant qu'avec l'instrument lui-même. Une observation complète comprend, presque sans exception, huit lectures du niveau, de sorte que chacun des quatre passages de l'étoile, par la même moitié du réticule, est renfermé entre deux lectures du niveau. En général les deux lectures faites avant et après les passages par les fils s'accordent si bien entre elles que l'incertitude de l'inclinaison ne pourra s'élever qu'à peu de centièmes de seconde.

Il a été mentionné plus haut que les anciennes recherches sur la constance de l'instrument en sens azimutal ont été sujettes à des objections très sérieuses. C'est pourquoi on a établi, il y a quelques ans, deux mires azimutales, tout à fait analogues aux mires employées pour contrôler l'azimut de notre lunette méridienne. Les mires, établies dans les directions Est et Ouest à des distances d'environ 400 et 500 pieds respectivement des objectifs collimateurs, correspondent à la position Sud de l'instrument. La lecture des mires se fait très commodément à l'aide des fils mobiles du micromètre. Pour un seul pointage l'erreur pr. s'est trouvée en moyenne = ± 0,"195, sans égard à la qualité des images et sans exclure même les plus mauvaises. Pour chaque détermination de l'azimut, les pointages ont été répétés plusieurs fois, de sorte que l'err. pr. d'une lecture complète des deux mires est en moyenne = ± 0,"057.

Grâce à cet arrangement nous sommes à même de contrôler la position de l'instrument en azimut aussi souvent que nous voulons. Pendant toute la série d'observations on a suivi la règle de faire les lectures des mires avant et après chaque observation complète; ce n'est que dans quelques cas exceptionnels que cette règle n'a pas été maintenue. De cette manière on se persuada bientôt que la supposition d'un azimut tout à fait constant pendant plusieurs heures de suite était illusoire. Souvent les variations ont été presque insensibles ou du même ordre que l'incertitude inhérente aux mesures elles-mêmes. En d'autres occasions elles se sont élévées à une ou même à deux secondes dans des intervalles d'environ deux heures. Quelquefois cette discontinuité des variations arrivait dans le courant de quelques heures. En comparant les lectures faites plusieurs jours consécutifs, une marche analogue des variations ne peut être méconnue; mais cette régularité est loin d'être générale. Ce qui m'a frappé le plus dans les variations de l'azimut, c'est la prépondérance du signe positif, c. à d. du mouvement d'Est à Ouest du bout Sud de l'axe horizontal. Ces variations n'exercent aucune influence sur l'exactitude des résultats à déduire par rapport à la constante de l'aberration, tant qu'il ne se manifeste pas une différence en sens constant entre les observations du matin et celles du soir. Par contre, le résultat serait affecté d'erreurs systématiques si une différence de ce genre existait réellement. Afin

d'examiner cette question, nous avons établi le tableau suivant des moyennes mensuelles des variations horaires, déduites des lectures des mires, faites pendant toute la période de nos observations.

	Matin.	Err. pr.	Soir.	Err. pr.
Janvier	+ 0,″04	± 0,″07	+ 0,″13	± 0,″13
Février	0,00	± 0,19	+ 0,02	± 0,05
Mars	+ 0,15	± 0,05	+ 0,16	± 0,04
Avril	+ 0,02	± 0,05	+ 0,17	± 0,07
Mai	+ 0,08	± 0,06	+ 0,32	± 0,04
Juin	+ 0,09	± 0,07	+ 0,27	± 0,13
Juillet	+ 0,15	± 0,06	— 0,01	± 0,13
Août	+ 0,12	± 0,05	+ 0,13	± 0,05
Septembre	+ 0,14	± 0,05	+ 0,05	± 0,04
Octobre	+ 0,09	± 0,07	+ 0,28	± 0,10
Novembre	+ 0,16	± 0,08	+ 0,02	± 0,10
Décembre	—	—	— 0,18	± 0,10

Les err. pr. de ces moyennes sont déduites des différences entre les variations isolées, obtenues par chaque paire de lectures consécutives des mires, et les moyennes mensuelles correspondantes. La valeur probable d'une seule différence est ± 0,″19.

Suivant les distances zénithales des différentes étoiles observées, il aurait fallu multiplier les variations horaires par des coefficients variant entre les limites 0,02 et 0,48, pour obtenir les corrections à appliquer aux déclinaisons observées.

On voit donc que les variations azimutales de notre instrument peuvent introduire, dans les distances zénithales, des erreurs dont il faut tenir compte dans des recherches où il s'agit d'arriver à la plus haute exactitude. Dans celle qui nous occupe, ces corrections auraient moins d'importance parce que les variations sont, presque sans exception, du même signe et de très près de la même grandeur. Pour la même raison, si l'on suppose qu'à l'époque des observations de Struve l'instrument ait été assujetti à des variations analogues de l'azimut, on peut regarder le résultat trouvé par lui comme peu affecté par l'effet de ces variations. Cependant il ne s'ensuit nullement que cette influence soit tout à fait éliminée; certainement la valeur trouvée pour la constante de l'aberration pourrait encore être affectée, par ce fait, d'une erreur de quelques centièmes de seconde. Peut-être même la question jusqu'à présent inexpliquée des parallaxes négatives qui résultent des observations nommées, trouverait-elle dans ces variations une solution satisfaisante. Cette explication est appuyée par le fait que les parallaxes augmentent en proportion des distances zénithales des étoiles (Nyrén, «Bestimmung der Nutation der Erdachse», Mém. de l'Acad. T. XIX).

Quant à l'origine des variations azimutales, elle n'a pas encore pu être bien expliquée. Quelquefois il nous a paru comme si le renversement de l'instrument avait produit le changement en azimut; mais d'autres observations n'ont pas confirmé cette remarque. Cette supposition ne saurait d'ailleurs s'accorder avec le fait que l'instrument est retourné tou-

jours dans les intervalles entre des observations du matin et celles du soir ou vice versâ, approximativement à la position primitive. Une autre explication nous paraît donc préférable, savoir que la dite variation dût être attribuée à l'échauffement progressif du pilier par la proximité de l'observateur. Quoi qu'il en soit, il suffirait pour notre question de savoir si les variations s'effectuent par sauts, ou proportionnellement au temps écoulé. Une réponse tout à fait satisfaisante ne peut être donnée à cette question, à cause des irrégularités occasionnellement observées. En tels jours cependant où plusieurs lectures des mires ont été exécutées dans le courant de plusieurs heures, une proportionalité approximative aux intervalles écoulés se manifeste en général assez distinctement. C'est pourquoi dans nos calculs des corrections à appliquer aux observations, nous avons admis que cette proportionalité ait eu lieu sans exception. Il va sans dire que dans ces calculs, au lieu des variations moyennes mensuelles, nous avons employé toujours les variations indiquées par les lectures des mires, exécutées immédiatement avant et après chaque observation.

La régularité de la marche de l'horloge employée pour les observations des passages est aussi de la plus haute importance. L'horloge établie depuis plusieurs années dans la salle du premier vertical est le № 586 de Dent. Quoique la marche de cette horloge soit d'une régularité très remarquable, elle a été comparée, par surcroît de prudence, avec la pendule normale de l'observatoire avant et après chaque observation. La marche de cette dernière horloge est connue avec une sûreté plus que suffisante pour notre but. Nos distances zénithales doivent conséquemment être tout à fait exemptes d'erreurs provenant d'une incertitude à cet égard.

Nous avons discuté plus haut les raisons qui permettent de supposer que la constante de l'aberration, déduite par Struve d'un grand nombre d'observations de sept étoiles, pourrait être affectée encore d'erreurs assez considérables. Parmi les précautions à prendre pour garantir la nouvelle série d'observations contre les mêmes objections, il nous a paru particulièrement nécessaire d'étendre les observations sur un aussi grand nombre d'étoiles que possible. Dans la nouvelle série nos observations s'étendent sur 24 étoiles, satisfaisant aux conditions indispensables: de passer le méridien à une distance zénithale assez petite, et d'être assez luisantes pour pouvoir être poursuivies dans la lunette par un crépuscule très fort, et même quelque temps avant le coucher ou après le lever du soleil.

La distribution de ces étoiles sur le cercle parallèle est assez uniforme, mais le nombre des observations faites sur les différentes étoiles varie très considérablement, en partie à cause de l'état défavorable de l'atmosphère à l'époque du solstice d'hiver, en partie à cause de l'éclat trop faible de quelques étoiles comprises dans la liste. Voici l'énumération des étoiles observées:

	Gr.	Ascens. droite.	
β Cassiopeiae	(2)	0^h 3^m	26 observations.
δ Cassiopeiae	(3)	1 18	44 »
χ Cassiopeiae	(5.6)	1 26	22 »
2 H. Camelop.	(5.4)	3 19	23 »
10 H. Camelop.	(5)	3 55	11 »
B. D. 793	(6.7)	4 13	21 »
11 Camelop.	(5.4)	4 56	23 »
37 Camelop.	(5)	5 59	17 »
2 Lyncis	(5.4)	6 9	24 »
14 Lyncis	(5.6)	6 43	25 »
15 Lyncis	(5)	6 47	30 »
24 Lyncis	(5)	7 33	33 »
υ Ursae maj.	(3)	9 43	31 »
74 Ursae maj.	(6)	12 24	18 »
75 Ursae maj.	(6)	12 25	11 »
Radcliffe 3104	(6)	13 46	10 »
ι Draconis	(3)	15 22	41 »
ϑ Draconis	(4.3)	16 0	35 »
b Draconis	(5.4)	18 22	38 »
o Draconis	(4)	18 49	41 »
Radcliffe 4511	(6.5)	19 51	15 »
Radcliffe 5074	(6)	20 56	10 »
B. A. C. 7387	(6)	21 10	11 »
15 Cephei	(6)	22 0	6 »
		Nombre total	566 observations.

Notre série d'observations, commencée le 17 Déc. 1879, a été terminée le 29 Janv. 1882. Elle comprend ainsi deux maxima et deux minima de l'aberration pour chaque étoile Cependant il n'a pas été possible d'observer toutes les étoiles à ces quatre époques; il y en a quatre pour lesquelles nous n'avons obtenu des observations que dans un seule maximum et un seul minimum. Aussi les deux phases du phénomène n'entrent-elles pas, dans le nombre des observations, aussi également qu'il eut été à désirer. Mais ce manque d'uniformité était inévitable, à moins qu'on ne voulût ajourner encore d'un an ou de deux l'achèvement des observations.

Toutes les positions observées ont été réduites à l'aide des «Tabulae Pulcovenses» à l'époque moyenne 1881,0. Les mouvements propres ont été empruntés, pour quelques étoiles, au «Fundamental Catalog» de M. Auwers ou aux «Beobachtungen von 521 Bradley'schen Sternen» de M. Becker; pour les autres étoiles je les ai déduits moi-même à l'aide des meilleurs positions connues. Les déclinaisons moyennes déduites ainsi pour 1881,0 et les mouvements propres employés sont les suivants:

	Décl. moy. 1881,0	Mouv. pr. en décl.
β Cassiopeiae	+ 58° 29′ 35″,76	— 0″,190
δ Cassiopeiae	+ 59 36 57,92	— 0,035
χ Cassiopeiae	+ 58 37 13,88	— 0,025
2 H. Camelop.	+ 59 31 25,95	+ 0,012
10 H. Camelop.	+ 58 49 22,30	— 0,007
B. D. 793	+ 59 19 55,12	— 0,051
11 Camelop.	+ 58 48 13,54	— 0,026
37 Camelop.	+ 58 56 55,24	+ 0,030
2 Lyncis	+ 59 3 5,58	+ 0,042
14 Lyncis	+ 59 35 13,80	— 0,036
15 Lyncis	+ 58 34 34,95	— 0,123
24 Lyncis	+ 58 59 12,12	— 0,059
υ' Ursae major.	+ 59 35 50,95	— 0,149
74 Ursae major.	+ 59 3 38,20	+ 0,100
75 Ursae major.	+ 59 25 33,75	— 0,034
Radcliffe 3104	+ 59 7 43,62	+ 0,011
ι Draconis	+ 59 22 59,85	+ 0,022
ϑ Draconis	+ 58 53 0,17	+ 0,345
b Draconis	+ 58 43 55,44	+ 0,051
o Draconis	+ 59 14 35,20	+ 0,023
Radcliffe 4511	+ 59 23 39,37	+ 0,030
Radcliffe 5074	+ 58 58 25,33	— 0,009
B. A. C. 7387	+ 59 36 25,00	— 0,030
15 Cephei	+ 59 14 16,09	— 0,018

A côté de l'aberrration, nous avons introduit dans les équations de condition comme inconnues à déterminer aussi la parallaxe de l'étoile et la correction de la déclinaison moyenne adoptée. Les observations ayant eu lieu aux environs des époques où le coefficient de la parallaxe est de très près zéro, cette inconnue n'a pas été introduite dans le but d'en fixer la valeur numérique, mais pour voir en quelle proportion l'aberration trouvée pourrait en être influencée. Ainsi nos équations de condition seront de la forme:

$$ax + by + cz + n = 0.$$

où

$a = -1.$
$b =$ coefficient de l'aberration.
$c =$ » » la parallaxe.
$n =$ observation — calcul.
$x =$ correction de la décl. moyenne adoptée.
$y =$ correction de l'aberration 20″,445.
$z =$ parallaxe de l'étoile.

Voici la liste des observations:

β Cassiopeiae.

			Décl. observée.	n	b	c
1880	Février	17	+ 58° 29′ 35″,52	— 0″,24	— 0,28	+ 0,84
		23	35,67	— 0,09	— 0,19	+ 0,86
	Mars	1	35,60	— 0,16	— 0,09	+ 0,87
	Juillet	20	35,88	+ 0,12	+ 0,65	— 0,59
	Août	10	36,02	+ 0,26	+ 0,41	— 0,78
		11	35,78	+ 0,02	+ 0,40	— 0,78
		14	36,20	+ 0,44	+ 0,36	— 0,80
		15	35,74	— 0,02	+ 0,35	— 0,81
		17	35,73	— 0,03	+ 0,32	— 0,82
		19	36,24	+ 0,48	+ 0,29	— 0,83
		21	35,49	— 0,27	+ 0,27	— 0,84
	Décembre	4	36,06	+ 0,30	— 0,87	— 0,05
1881	Janvier	7	35,95	+ 0,19	— 0,75	+ 0,46
		17	35,55	— 0,21	— 0,66	+ 0,58
		19	36,23	+ 0,47	— 0,64	+ 0,60
		20	35,84	+ 0,08	— 0,63	+ 0,61
		21	35,97	+ 0,21	— 0,62	+ 0,62
	Février	8	35,48	— 0,28	— 0,40	+ 0,78
		18	35,30	— 0,46	— 0,25	+ 0,84
	Juin	28	35,47	— 0,29	+ 0,82	— 0,32
		29	36,01	+ 0,25	+ 0,81	— 0,33
		30	35,42	— 0,34	+ 0,81	— 0,35
	Juillet	1	35,90	+ 0,14	+ 0,80	— 0,37
		3	35,64	— 0,12	+ 0,79	— 0,39
	Août	2	35,44	— 0,32	+ 0,52	— 0,71
		9	36,07	+ 0,31	+ 0,43	— 0,77

Equations finales:

$$+ 26{,}00\,x - 2{,}65\,y + 2{,}48\,z - 0''{,}44 = 0$$
$$- 2{,}65\,x + 8{,}26\,y - 7{,}26\,z - 0{,}32 = 0$$
$$+ 2{,}48\,x - 7{,}26\,y + 11{,}83\,z - 1{,}27 = 0$$

d'où résultent:

$$x = + 0''{,}022 - 0{,}01\,z \pm 0''{,}038$$
$$y = + 0{,}045 + 0{,}88\,z \pm 0{,}067$$

Erreur pr. d'une observation $= \pm\ 0''{,}188$.

δ Cassiopeiae.

		Décl. observée.	n	b	c
1879 Décembre	17	+ 59° 36′ 58″,36	+ 0″,44	— 0,81	— 0,12
	18	58,05	+ 0,13	— 0,81	— 0,11
	20	58,07	+ 0,15	— 0,81	— 0,09
	21	57,68	— 0,24	— 0,81	— 0,08
	23	58,11	+ 0,19	— 0,81	— 0,06
	27	57,23*	— 0,69	— 0,82	+ 0,01
1880 Janvier	19	58,26	+ 0,34	— 0,74	+ 0,35
	20	57,65	— 0,27	— 0,74	+ 0,36
Juillet	20	58,01	+ 0,09	+ 0,74	— 0,36
Août	1	57,57	— 0,35	+ 0,66	— 0,49
	10	57,92	0,00	+ 0,58	— 0,58
	11	57,58	— 0,34	+ 0,57	— 0,59
	12	58,08	+ 0,16	+ 0,56	— 0,60
	14	58,13	+ 0,21	+ 0,54	— 0,62
	15	57,82	— 0,10	+ 0,53	— 0,63
	17	58,21	+ 0,29	+ 0,51	— 0,64
	19	57,77	— 0,15	+ 0,49	— 0,66
	21	57,62	— 0,30	+ 0,47	— 0,67
	22	58,35	+ 0,43	+ 0,46	— 0,68
	23	57,78	— 0,14	+ 0,45	— 0,69
	25	57,97	+ 0,05	+ 0,42	— 0,70
	28	58,04	+ 0,12	+ 0,39	— 0,72
Décembre	4	58,17	+ 0,25	— 0,76	— 0,31
	18	58,27	+ 0,35	— 0,81	— 0,11
1881 Janvier	7	58,04	+ 0,12	— 0,79	+ 0,22
	17	57,91	— 0,01	— 0,75	+ 0,33
	19	58,07	+ 0,15	— 0,74	+ 0,35
	20	57,91	— 0,01	— 0,73	+ 0,37
	21	58,14	+ 0,22	— 0,72	+ 0,39
Février	4	58,37	+ 0,45	— 0,61	+ 0,55
	8	57,66	— 0,26	— 0,57	+ 0,59
	18	57,53	— 0,39	— 0,46	+ 0,68
Juin	28	57,99	+ 0,07	+ 0,81	— 0,03
	29	57,76	— 0,16	+ 0,81	— 0,04
	30	57,96	+ 0,04	+ 0,81	— 0,05
Juillet	1	57,94	+ 0,02	+ 0,81	— 0,07
	3	58,14	+ 0,22	+ 0,81	— 0,09
Août	2	57,29*	— 0,63	+ 0,66	— 0,49
	9	58,21	+ 0,29	+ 0,60	— 0,56

		Décl. observée.	n	b	c
Août	20	+ 59° 36′ 57″,84	— 0″,08	+ 0,48	— 0,66
	22	57,83	— 0,09	+ 0,46	— 0,68
	26	57,87	— 0,05	+ 0,41	— 0,71
Septembre	5	57,79	— 0,13	+ 0,29	— 0,77
	8	57,37	— 0,55	+ 0,25	— 0,78

Equations finales:

$$+ 42{,}00\,x - 1{,}44\,y + 9{,}76\,z - 1'',16 = 0$$
$$- 1{,}44\,x + 17{,}70\,y - 8{,}37\,z - 1{,}39 = 0$$
$$+ 9{,}76\,x - 8{,}37\,y + 10{,}46\,z + 0{,}29 = 0$$

d'où

$$x = + 0'',030 - 0{,}22\,z \pm 0'',024$$
$$y = + 0{,}081 + 0{,}46\,z \pm 0{,}039$$

Err. prob. d'une observation = ± 0″,162.

χ Cassiopeiae.

			Décl. observée.	n	b	c
1880	Février	17	+ 58° 37′ 13″,84	— 0″,04	— 0,48	+ 0,64
		23	14,18	+ 0,30	— 0,42	+ 0,68
	Mars	1	13,55	— 0,33	— 0,33	+ 0,73
	Août	12	13,75	— 0,13	+ 0,57	— 0,56
		14	13,83	— 0,05	+ 0,55	— 0,58
		15	13,88	0,00	+ 0,54	— 0,59
		19	14,08	+ 0,20	+ 0,50	— 0,62
		21	13,68	— 0,20	+ 0,47	— 0,65
		22	13,95	+ 0,07	+ 0,46	— 0,65
		23	13,77	— 0,11	+ 0,45	— 0,66
		25	13,91	+ 0,03	+ 0,43	— 0,67
		28	14,06	+ 0,18	+ 0,40	— 0,69
	Décembre	4	14,19	+ 0,31	— 0,74	— 0,30
		18	14,35	+ 0,47	— 0,79	— 0,13
		23	14,12	+ 0,24	— 0,80	— 0,04
1881	Janvier	17	13,90	+ 0,02	— 0,74	+ 0,30
		21	14,11	+ 0,23	— 0,72	+ 0,35
	Août	20	13,75	— 0,13	+ 0,49	— 0,63
		22	13,68	— 0,20	+ 0,47	— 0,65
		26	13,68	— 0,20	+ 0,42	— 0,68
	Septembre	5	13,69	— 0,19	+ 0,30	— 0,74
		8	13,48	— 0,40	+ 0,26	— 0,76

Equations finales:

$$+ 21,50\,x - 1,05\,y + 6,59\,z - 0'',13 = 0$$
$$- 1,05\,x + 6,22\,y - 4,85\,z - 1,37 = 0$$
$$+ 6,59\,x - 4,85\,y + 7,53\,z + 0,60 = 0$$

d'où

$$x = + 0'',017 - 0,27\,z \pm 0'',029$$
$$y = + 0,224 + 0,73\,z \pm 0,054$$

Err. pr. d'une observation = ± 0",134.

2 H. Camelop.

			Décl. observée.	*n*	*b*	*c*
1880	Février	16	+ 59° 31′ 25",83	— 0,12	— 0,64	+ 0,26
		17	26,40	+ 0,45	— 0,63	+ 0,28
		23	26,08	+ 0,13	— 0,60	+ 0,34
	Mars	1	25,98	+ 0,03	— 0,56	+ 0,40
		15	26,19	+ 0,24	— 0,45	+ 0,52
	Août	14	25,95	0,00	+ 0,66	— 0,20
		15	25,93	— 0,02	+ 0,65	— 0,22
		21	25,82	— 0,13	+ 0,63	— 0,28
		22	26,02	+ 0,07	+ 0,63	— 0,29
		25	25,58	— 0,37	+ 0,61	— 0,32
		28	25,91	— 0,04	+ 0,59	— 0,36
		30	26,21	+ 0,26	+ 0,58	— 0,37
	Septembre	4	25,75	— 0,20	+ 0,55	— 0,42
1881	Janvier	20	25,94	— 0,01	— 0,68	— 0,07
		21	26,10	+ 0,15	— 0,68	— 0,06
	Février	8	25,69	— 0,26	— 0,67	+ 0,16
		18	25,60	— 0,35	— 0,63	+ 0,28
		25	25,99	+ 0,04	— 0,59	+ 0,36
	Septembre	5	25,81	— 0,14	+ 0,54	— 0,43
		14	25,98	+ 0,03	+ 0,47	— 0,51
		24	26,65*	+ 0,70	+ 0,38	— 0,58
		25	26,02	+ 0,07	+ 0,37	— 0,58
		26	25,49	— 0,46	+ 0,36	— 0,59

Equations finales:

$$+22{,}00\,x - 0{,}51\,y + 2{,}10\,z + 0'',63 = 0$$
$$-0{,}51\,x + 7{,}59\,y - 3{,}80\,z - 0{,}60 = 0$$
$$+2{,}10\,x - 3{,}80\,y + 2{,}86\,z + 0{,}56 = 0$$

d'où

$$x = -0'',027 - 0{,}08\,z \pm 0'',031$$
$$y = +0{,}078 + 0{,}49\,z \pm 0{,}053$$

Err. pr. d'une observation = ± 0'',147.

10 H. Camelop.

			Décl. observée.	n	b	c
1880	Février	12	+ 58° 49′ 22'',14	— 0'',16	— 0,64	+ 0,07
		18	22,32	+ 0,02	— 0,63	+ 0,14
	Mars	6	22,67	+ 0,37	— 0,56	+ 0,31
	Septembre	7	21,92	— 0,38	+ 0,56	— 0,31
		16	22,15	— 0,15	+ 0,50	— 0,40
		19	22,44	+ 0,14	+ 0,48	— 0,42
		24	22,26	— 0,04	+ 0,45	— 0,46
		26	22,34	+ 0,04	+ 0,43	— 0,47
1881	Mars	5	22,46	+ 0,16	— 0,56	+ 0,31
	Octobre	16	21,98	— 0,32	+ 0,25	— 0,59
		18	22,33	+ 0,03	+ 0,22	— 0,60

Equations finales:

$$+11{,}00\,x - 0{,}50\,y + 2{,}42\,z + 0{,}29 = 0$$
$$-0{,}50\,x + 2{,}73\,y - 1{,}75\,z - 0{,}50 = 0$$
$$+2{,}42\,x - 1{,}75\,y + 1{,}79\,z + 0{,}45 = 0$$

d'où

$$x = -0'',018 - 0{,}19\,z \pm 0'',042$$
$$y = +0{,}181 + 0{,}60\,z \pm 0{,}085$$

Err. pr. d'une observation = ± 0'',140.

B. D. 793.

	Décl. observée.	n	b	c
1880 Février 4	+ 59° 19′ 55″,21	+ 0″,09	— 0,63	— 0,08
9	55,07	— 0,05	— 0,63	— 0,02
11	55,28	+ 0,16	— 0,63	0,00
16	55,41	+ 0,29	— 0,63	+ 0,05
17	55,39	+ 0,27	— 0,63	+ 0,06
19	55,20	+ 0,08	— 0,63	+ 0,09
Mars 1	55,12	0,00	— 0,60	+ 0,19
Septembre 21	55,04	— 0,08	+ 0,50	— 0,38
22	54,99	— 0,13	+ 0,50	— 0,39
23	55,18	+ 0,06	+ 0,49	— 0,40
Octobre 14	55,52	+ 0,40	+ 0,32	— 0,54
16	55,13	+ 0,01	+ 0,30	— 0,55
20	55,04	— 0,08	+ 0,26	— 0,57
1881 Février 18	54,89	— 0,23	— 0,63	+ 0,08
22	55,18	+ 0,06	— 0,62	+ 0,12
24	54,94	— 0,18	— 0,62	+ 0,14
25	54,94	— 0,18	— 0,61	+ 0,16
Septembre 14	54,94	— 0,18	+ 0,55	— 0,31
25	54,91	— 0,21	+ 0,48	— 0,41
26	54,96	— 0,16	+ 0,47	— 0,42
Octobre 3	55,50	+ 0,38	+ 0,42	— 0,47

Équations finales:

$$+ 21,00\,x + 2,57\,y + 3,65\,z - 0'',32 = 0$$
$$+ 2,57\,x + 6,21\,y - 2,33\,z - 0,28 = 0$$
$$+ 3,65\,x - 2,33\,y + 2,16\,z - 0,12 = 0$$

d'où

$$x = + 0'',010 - 0,23\,z \pm 0'',034$$
$$y = + 0,041 + 0,47\,z \pm 0,062$$

Err. pr. d'une observation $= \pm\ 0'',150$.

11 Camelop.

		Décl. observée.	n	b	c
1880 Février	9	+ 58° 48′ 13,″66	+ 0,″12	— 0,57	— 0,18
	11	13,64	+ 0,10	— 0,58	— 0,15
	12	13,21	— 0,33	— 0,58	— 0,14
	18	13,49	— 0,05	— 0,59	— 0,07
	19	13,68	+ 0,14	— 0,59	— 0,06
Mars	6	13,69	+ 0,15	— 0,59	+ 0,10
Septembre	19	14,28*	+ 0,74	+ 0,56	— 0,22
	21	13,60	+ 0,06	+ 0,55	— 0,23
	22	13,52	— 0,02	+ 0,55	— 0,24
	23	13,83	+ 0,29	+ 0,54	— 0,25
	24	13,59	+ 0,05	+ 0,54	— 0,26
	26	13,49	— 0,05	+ 0,53	— 0,28
Octobre	5	13,55	+ 0,01	+ 0,48	— 0,36
	14	13,83	+ 0,29	+ 0,42	— 0,43
	16	13,64	+ 0,10	+ 0,40	— 0,45
	20	13,53	— 0,01	+ 0,37	— 0,47
1881 Février	20	13,05	— 0,49	— 0,60	— 0,05
	24	13,25	— 0,29	— 0,60	— 0,01
	28	13,17	— 0,37	— 0,60	+ 0,02
Mars	5	13,76	+ 0,22	— 0,59	+ 0,09
Octobre	3	13,82	+ 0,28	+ 0,49	— 0,35
	4	13,72	+ 0,18	+ 0,49	— 0,36
	16	13,24	— 0,30	+ 0,41	— 0,44

Équations finales:

$$+ 22,00\, x + 0,12\, y + 4,57\, z - 0,''08 = 0$$
$$+ 0,12\, x + 6,29\, y - 1,66\, z + 0,93 = 0$$
$$+ 4,57\, x - 1,66\, y + 1,61\, z - 0,22 = 0$$

d'où

$$x = + 0,''005 - 0,21\, z \pm 0,''031$$
$$y = - 0,148 + 0,27\, z \pm 0,058$$

Err. pr. d'une observation $= \pm\, 0,''146$.

37 Camelop.

		Décl. observée.	n	b	c
1880 Février	23	+ 58° 56′ 55″,52	+ 0,28	— 0,53	— 0,24
Mars	8	55,44	+ 0,20	— 0,57	— 0,12
	12	55,08(½)	— 0,16	— 0,58	— 0,08
	14	55,05	— 0,19	— 0,58	— 0,07
	21	55,43	+ 0,19	— 0,58	0,00
	23	55,32	+ 0,08	— 0,58	+ 0,02
Octobre	26	54,77	— 0,47	+ 0,48	— 0,33
Novembre	7	55,41	+ 0,17	+ 0,40	— 0,42
	16	55,20	— 0,04	+ 0,33	— 0,48
	22	55,11	— 0,13	+ 0,28	— 0,51
	30	55,43	+ 0,19	+ 0,20	— 0,54
1881 Février	20	54,60*	— 0,64	— 0,52	— 0,26
	28	54,74	— 0,50	— 0,55	— 0,18
Mars	4	55,31	+ 0,07	— 0,56	— 0,15
	15	55,05	— 0,19	— 0,58	— 0,06
	17	55,17	— 0,07	— 0,58	— 0,04
Octobre	4	55,50	+ 0,26	+ 0,57	— 0,13

Équations finales:

$$+15{,}50\,x + 3{,}14\,y + 3{,}29\,z + 0''{,}23 = 0$$
$$+3{,}14\,x + 4{,}01\,y - 0{,}32\,z + 0{,}11 = 0$$
$$+3{,}29\,x - 0{,}32\,y + 1{,}23\,z + 0{,}06 = 0$$

d'où

$$x = -0''{,}012 - 0{,}27\,z \pm 0''{,}048$$
$$y = -0{,}018 + 0{,}29\,z \pm 0{,}095$$

Err. prob. d'une observation = ± 0″,174.

2 Lyncis.

		Décl. observée.	n	b	c
1880 Février	12	+ 59° 3′ 5″,40	— 0″,18	— 0,45	— 0,37
	16	5,74	+ 0,16	— 0,47	— 0,34
	17	5,99	+ 0,41	— 0,48	— 0,33
	18	5,59	+ 0,01	— 0,48	— 0,32
	19	5,71	+ 0,13	— 0,49	— 0,31

		Décl. observée.	n	b	c
Mars	1	+ 59° 3′ 5″,20	— 0″,38	— 0,54	— 0,21
	6	5,74	+ 0,16	— 0,56	— 0,15
	16	5,43	— 0,15	— 0,58	— 0,08
Septembre	21	5,61	+ 0,03	+ 0,58	+ 0,02
	22	5,84	+ 0,26	+ 0,58	+ 0,01
	23	5,80	+ 0,22	+ 0,58	0,00
	24	5,70	+ 0,12	+ 0,58	— 0,01
	26	5,57	— 0,01	+ 0,58	— 0,03
Octobre	14	5,93	+ 0,35	+ 0,55	— 0,18
	16	5,56	— 0,02	+ 0,54	— 0,20
1881 Février	18	5,31	— 0,27	— 0,49	— 0,31
	25	5,45	— 0,13	— 0,52	— 0,26
Mars	5	5,68	+ 0,10	— 0,55	— 0,18
	14	5,51	— 0,07	— 0,58	— 0,09
	20	5,77	+ 0,19	— 0,58	— 0,03
	23	5,40	— 0,18	— 0,58	0,00
	24	5,18	— 0,40	— 0,58	+ 0,01
Septembre	26	5,08	— 0,50	+ 0,58	— 0,03
Octobre	16	5,37	— 0,21	+ 0,55	— 0,18

Équations finales:

$$+ 24{,}00\,x + 2{,}81\,y + 3{,}57\,z + 0{,}''36 = 0$$
$$+ 2{,}81\,x + 7{,}14\,y + 1{,}16\,z + 0{,}49 = 0$$
$$+ 3{,}57\,x + 1{,}16\,y + 0{,}94\,z \quad 0{,}00 = 0$$

d'où

$$x = -\,0{,}''007 - 0{,}14\,z \pm 0{,}''034$$
$$y = -\,0{,}066 - 0{,}11\,z \pm 0{,}062$$

Err. pr. d'une observation = ± 0″,163.

14 Lyncis.

		Décl. observée.	n	b	c
1880 Février	11	+ 59° 35′ 13″,82	+ 0″,02	— 0,36	— 0,48
Mars	8	13,86	+ 0,06	— 0,53	— 0,28
	14	13,58	— 0,22	— 0,56	— 0,22
	20	13,60	— 0,20	— 0,58	— 0,16

			Décl. observée.	n	b	c
1880	Mars	21	+ 59° 35′ 13″,92	+ 0″,12	— 0,58	— 0,15
		23	14,03	+ 0,23	— 0,59	— 0,13
		30	13,44	— 0,36	— 0,60	— 0,05
	Avril	2	13,85	+ 0,05	— 0,60	— 0,02
	Octobre	20	13,91	+ 0,11	+ 0,58	— 0,16
		26	13,43	— 0,37	+ 0,57	— 0,20
	Novembre	7	14,00	+ 0,20	+ 0,51	— 0,32
		16	13,42	— 0,38	+ 0,46	— 0,39
		22	13,73	— 0,07	+ 0,42	— 0,43
		30	13,95	+ 0,15	+ 0,35	— 0,49
	Décembre	22	13,64	— 0,16	+ 0,14	— 0,58
1881	Février	28	13,77	— 0,03	— 0,49	— 0,35
	Mars	4	13,82	+ 0,02	— 0,51	— 0,32
		15	13,59	— 0,21	— 0,56	— 0,22
		16	13,50	— 0,30	— 0,56	— 0,21
		17	13,89	+ 0,09	— 0,57	— 0,20
		28	13,83	+ 0,03	— 0,59	— 0,07
		31	13,49	— 0,31	— 0,60	— 0,04
	Avril	1	13,85	+ 0,05	— 0,60	— 0,03
	Novembre	30	14,41*	+ 0,61	+ 0,36	— 0,48
	Décembre	9	13,95($\frac{1}{2}$)	+ 0,15	+ 0,27	— 0,54

Équations finales:

$$+ 23,50\,x + 5,71\,y + 5,77\,z + 1'',40 = 0$$
$$+ 5,71\,x + 6,48\,y + 0,46\,z + 0,36 = 0$$
$$+ 5,77\,x + 0,46\,y + 2,02\,z + 0,28 = 0$$

d'où

$$x = -\,0'',059 - 0,29\,z \pm 0'',031$$
$$y = -\,0,004 + 0,18\,z \pm 0,059$$

Err. pr. d'une observation = ± 0″,134.

15 Lyncis.

			Décl. observée.	n	b	c
1880	Février	11	+ 58° 34′ 34″,95	0″,00	— 0,34	— 0,48
		12	34,64	— 0,31	— 0,35	— 0,47
		16	34,79	— 0,16	— 0,38	— 0,45

			Décl. observée.	n	b	c
1880	Février	17	+ 58° 34′ 35″,18	+ 0″,23	— 0,39	— 0,44
		18	34,92	— 0,03	— 0,39	— 0,43
		19	35,00	+ 0,05	— 0,40	— 0,43
	Mars	1	34,84	— 0,11	— 0,48	— 0,34
		6	35,20	+ 0,25	— 0,50	— 0,31
		8	34,86	— 0,09	— 0,51	— 0,30
		14	34,99	+ 0,04	— 0,54	— 0,24
		16	35,16	+ 0,21	— 0,55	— 0,22
		21	35,18	+ 0,23	— 0,56	— 0,18
	Septembre	26	35,14	+ 0,19	+ 0,57	+ 0,10
	Octobre	14	35,40	+ 0,45	+ 0,58	— 0,08
		16	35,12	+ 0,17	+ 0,58	— 0,10
	Novembre	16	34,77	— 0,18	+ 0,46	— 0,37
		22	35,14	+ 0,19	+ 0,42	— 0,41
		30	35,07	+ 0,12	+ 0,36	— 0,47
	Décembre	22	35,09	+ 0,14	+ 0,16	— 0,57
1881	Février	28	34,45	— 0,50	— 0,47	— 0,36
	Mars	4	35,01	+ 0,06	— 0,49	— 0,32
		5	35,05	+ 0,10	— 0,50	— 0,31
		14	34,64	— 0,31	— 0,54	— 0,24
		15	34,73	— 0,22	— 0,54	— 0,23
		17	34,58	— 0,37	— 0,55	— 0,21
		23	34,77	— 0,18	— 0,57	— 0,14
		24	34,66	— 0,29	— 0,57	— 0,13
		27	34,70	— 0,25	— 0,58	— 0,10
		28	34,78	— 0,17	— 0,58	— 0,09
	Octobre	4	35,36	+ 0,41	+ 0,58	+ 0,02

Équations finales:

$$+30{,}00\,x + 7{,}07\,y + 8{,}30\,z + 0''{,}33 = 0$$
$$+7{,}07\,x + 7{,}29\,y + 2{,}31\,z + 1{,}70 = 0$$
$$+8{,}30\,x + 2{,}31\,y + 3{,}07\,z + 0{,}26 = 0$$

d'où

$$x = +0''{,}057 - 0{,}26\,z \pm 0''{,}029$$
$$y = -0{,}288 - 0{,}06\,z \pm 0{,}059$$

Err. pr. d'une observation $= \pm\, 0''{,}139$.

24 Lyncis.

			Décl. observée.	n	b	c
1880	Mars	8	+ 58° 59′ 12″,07	— 0″,05	— 0,44	— 0,44
		14	12,36	+ 0,24	— 0,48	— 0,39
		16	12,11	— 0,01	— 0,50	— 0,37
		20	11,85	— 0,27	— 0,52	— 0,34
		21	12,55	+ 0,43	— 0,53	— 0,32
		23	12,39	+ 0,27	— 0,54	— 0,30
		27	12,15	+ 0,03	— 0,56	— 0,27
		29	11,64($\frac{1}{2}$)	— 0,48	— 0,57	— 0,25
		30	11,74	— 0,38	— 0,57	— 0,24
	Avril	2	12,38	+ 0,26	— 0,58	— 0,22
	Octobre	14	12,58	+ 0,46	+ 0,61	+ 0,08
		16	12,43	+ 0,31	+ 0,61	+ 0,06
	Novembre	7	11,93	— 0,19	+ 0,60	— 0,16
		16	11,74	— 0,38	+ 0,57	— 0,25
		22	12,04	— 0,08	+ 0,55	— 0,29
		30	12,40	+ 0,28	+ 0,50	— 0,37
1881	Février	28	12,10	— 0,02	— 0,37	— 0,50
	Mars	4	12,22	+ 0,10	— 0,41	— 0,47
		5	12,28	+ 0,16	— 0,42	— 0,46
		14	11,86	— 0,26	— 0,48	— 0,39
		15	11,98	— 0,14	— 0,49	— 0,38
		16	11,93	— 0,19	— 0,49	— 0,37
		17	12,03	— 0,09	— 0,50	— 0,36
		23	12,05	— 0,07	— 0,54	— 0,30
		24	11,96	— 0,16	— 0,54	— 0,29
		27	11,74	— 0,38	— 0,56	— 0,27
		28	12,18	+ 0,06	— 0,56	— 0,26
		31	11,69	— 0,43	— 0,57	— 0,24
	Avril	1	12,04	— 0,08	— 0,58	— 0,22
		5	12,21	+ 0,09	— 0,59	— 0,19
		8	12,13	+ 0,01	— 0,60	— 0,16
	Octobre	16	12,23	+ 0,11	+ 0,61	+ 0,06
	Novembre	30	12,41	+ 0,29	+ 0,50	— 0,37

Équations finales:

$$+ 32{,}50\,x + 8{,}16\,y + 9{,}13\,z + 0{,}''32 = 0$$
$$+ 8{,}16\,x + 9{,}28\,y + 3{,}31\,z + 1{,}08 = 0$$
$$+ 9{,}13\,x + 3{,}31\,y + 3{,}20\,z + 0{,}29 = 0$$

d'où

$$x = +0'',025 - 0,25\,z \pm 0'',032$$
$$y = -0,138 - 0,14\,z \pm 0,060$$

Err. pr. d'une observation $= \pm 0'',160$.

v Ursae maj.

			Décl. observée.	*n*	*b*	*c*
1879	Décembre	18	+ 59° 35′ 51″,35	+ 0″,40	+ 0,72	— 0,21
		27	50,89	— 0,06	+ 0,68	— 0,32
1880	Avril	7	50,88	— 0,07	— 0,46	— 0,59
		8	51,02	+ 0,07	— 0,47	— 0,58
		12	51,02	+ 0,07	— 0,51	— 0,55
		13	51,25	+ 0,30	— 0,52	— 0,54
		14	50,79	— 0,16	— 0,52	— 0,54
		21	51,13	+ 0,18	— 0,59	— 0,46
		28	51,01	+ 0,06	— 0,64	— 0,39
	Mai	5	51,04	+ 0,09	— 0,68	— 0,32
		12	50,82	— 0,13	— 0,71	— 0,24
		13	51,02	+ 0,07	— 0,72	— 0,23
		15	50,98	+ 0,03	— 0,72	— 0,21
	Novembre	22	50,54	— 0,41	+ 0,74	+ 0,12
		30	51,20	+ 0,25	+ 0,75	+ 0,03
1881	Janvier	16	50,42	— 0,53	+ 0,52	— 0,54
		20	50,85	— 0,10	+ 0,48	— 0,58
		21	50,81	— 0,14	+ 0,47	— 0,58
		28	50,49	— 0,46	+ 0,40	— 0,63
	Mai	1	50,89	— 0,06	— 0,66	— 0,36
		11	50,90	— 0,05	— 0,71	— 0,24
		12	50,89	— 0,06	— 0,71	— 0,23
		18	50,58	— 0,37	— 0,73	— 0,17
		23	51,12	+ 0,17	— 0,75	— 0,09
		24	50,90	— 0,05	— 0,75	— 0,08
		25	51,04	+ 0,09	— 0,75	— 0,07
		27	51,16	+ 0,21	— 0,75	— 0,04
	Juin	16	51,19	+ 0,24	— 0,73	+ 0,17
	Novembre	30	51,16	+ 0,21	+ 0,75	+ 0,03
1882	Janvier	15	51,06	+ 0,11	+ 0,53	— 0,53
		16	50,90	— 0,05	+ 0,52	— 0,54

Équations finales:

$$+31{,}00\,x + 6{,}52\,y + 9{,}51\,z + 0{,}''15 = 0$$
$$+6{,}52\,x + 12{,}84\,y + 1{,}52\,z - 0{,}65 = 0$$
$$+9{,}51\,x + 1{,}52\,y + 4{,}61\,z + 0{,}47 = 0$$

d'où

$$x = -0{,}''017 - 0{,}32\,z \pm 0{,}''028$$
$$y = +0{,}059 + 0{,}04\,z \pm 0{,}044$$

Err. pr. d'une observation $= \pm 0{,}''149$.

74 Ursae maj.

		Décl. observée.	n	b	c
1880 Mai	11	+ 59° 3′ 38,″48	+ 0,″28	— 0,49	— 0,75
	12	38,37	+ 0,17	— 0,50	— 0,75
	13	38,43	+ 0,23	— 0,51	— 0,74
	15	38,14	— 0,06	— 0,54	— 0,72
1881 Janvier	16	37,91	— 0,29	+ 0,89	— 0,08
	21	37,75	— 0,45	+ 0,88	— 0,15
	28	38,24	+ 0,04	+ 0,84	— 0,32
Mai	9	37,97	— 0,23	— 0,46	— 0,77
	11	38,04	— 0,16	— 0,48	— 0,76
	12	38,27	+ 0,07	— 0,50	— 0,75
	14	38,44	+ 0,24	— 0,52	— 0,73
	18	37,91	— 0,29	— 0,57	— 0,70
	20	38,34	+ 0,14	— 0,59	— 0,68
	23	38,30	+ 0,10	— 0,63	— 0,64
1882 Janvier	15	38,44	+ 0,24	+ 0,89	— 0,08
	23	38,16	— 0,04	+ 0,87	— 0,22
	26	38,23	+ 0,03	+ 0,85	— 0,28
	29	38,30	+ 0,10	+ 0,84	— 0,32

Équations finales:

$$+18{,}00\,x - 0{,}27\,y + 9{,}44\,z - 0{,}''12 = 0$$
$$-0{,}27\,x + 8{,}32\,y + 2{,}95\,z - 0{,}60 = 0$$
$$+9{,}44\,x + 2{,}95\,y + 6{,}19\,z - 0{,}32 = 0$$

d'où

$$x = +0'',008 - 0,53\,z \pm 0'',034$$
$$y = +0,072 - 0,37\,z \pm 0,050$$

Err. pr. d'une observation = ± 0″,144.

75 Ursae maj.

		Décl. observée.	n	b	c
1880 Mai	13	+ 59° 25′ 34″,03	+ 0″,28	— 0,52	— 0,73
	15	33,79	+ 0,04	— 0,54	— 0,72
1881 Janvier	16	32,93*	— 0,82	+ 0,89	— 0,12
	21	33,78	+ 0,03	+ 0,88	— 0,20
	28	33,89	+ 0,14	+ 0,84	— 0,32
Mai	9	33,83	+ 0,08	— 0,46	— 0,77
	11	33,62	— 0,13	— 0,49	— 0,75
	12	33,92	+ 0,17	— 0,50	— 0,75
	14	33,94	+ 0,19	— 0,53	— 0,73
1882 Janvier	15	33,83	+ 0,08	+ 0,90	— 0,10
	23	33,65	— 0,10	+ 0,87	— 0,23

Équations finales:

$$+10,00\,x - 0,45\,y + 5,30\,z - 0'',78 = 0$$
$$-0,45\,x + 4,59\,y + 1,52\,z - 0,20 = 0$$
$$+5,30\,x + 1,52\,y + 3,51\,z - 0,50 = 0$$

d'où

$$x = +0'',080 - 0,55\,z \pm 0'',027$$
$$y = +0,052 - 0,38\,z \pm 0,040$$

Err. pr. d'une observation = ± 0″,085.

Radcliffe 3104.

		Décl. observée.	n	b	c
1880 Mai	11	+ 59° 7′ 43″,79	+ 0″,17	— 0,25	— 0,92
	12	43,58	— 0,04	— 0,27	— 0,91
1881 Février	22	43,77	+ 0,15	+ 0,83	— 0,46
	24	43,55	— 0,07	+ 0,82	— 0,48

		Décl. observée.	n	b	c
1881 Mai	18	+ 59° 7′ 42″,73*	— 0″,89	— 0,35	— 0,88
	20	43,28	— 0,34	— 0,38	— 0,87
	23	43,79	+ 0,17	— 0,43	— 0,85
	24	43,76	+ 0,14	— 0,44	— 0,84
1882 Janvier	26	43,62	0,00	+ 0,95	0,00
	29	43,86	+ 0,24	+ 0,95	— 0,05

Équations finales:

$$+9,00\,x - 1,78\,y + 5,38\,z - 0'',42 = 0$$
$$-1,78\,x + 3,84\,y + 0,72\,z + 0,26 = 0$$
$$+5,38\,x + 0,72\,y + 4,31\,z - 0,13 = 0$$

d'où

$$x = +0'',037 - 0,70\,z \pm 0'',034$$
$$y = -0,052 - 0,51\,z \pm 0,052$$

Err. pr. d'une observation = ± 0″,098.

ι Draconis.

		Décl. observée.	n	b	c
1880 Février	23	+ 59° 22′ 59″,96	+ 0″,11	+ 0,97	— 0,13
Mars	6	59,62	— 0,23	+ 0,92	— 0,34
	8	59,82	— 0,03	+ 0,90	— 0,38
	16	59,69	— 0,16	+ 0,84	— 0,50
	20	59,54	— 0,31	+ 0,80	— 0,57
	23	59,70	— 0,15	+ 0,77	— 0,61
	25	60,10	+ 0,25	+ 0,75	— 0,63
	27	59,88	+ 0,03	+ 0,73	— 0,65
	29	60,13	+ 0,28	+ 0,71	— 0,68
	31	59,84	— 0,01	+ 0,68	— 0,71
Avril	1	59,65	— 0,20	+ 0,67	— 0,72
Juillet	20	60,05	+ 0,20	— 0,87	— 0,45
	21	60,06	+ 0,21	— 0,87	— 0,44
	24	59,97	+ 0,12	— 0,90	— 0,39
	27	59,75	— 0,10	— 0,91	— 0,36
Août	7	59,96	+ 0,11	— 0,96	— 0,19
	15	60,08	+ 0,23	— 0,98	— 0,05
	18	60,25	+ 0,40	— 0,98	0,00
	22	60,23	+ 0,38	— 0,98	+ 0,07

			Décl. observée.	n	b	c
1880	Août	29	+ 59° 22′ 60″,24	+ 0″,39	— 0,96	+ 0,19
		30	60,25	+ 0,40	— 0,96	+ 0,20
	Septembre	3	60,01	+ 0,16	— 0,94	+ 0,28
		21	60,23	+ 0,38	— 0,82	+ 0,54
		27	60,12	+ 0,27	— 0,76	+ 0,62
1881	Mars	4	59,80	— 0,05	+ 0,93	— 0,31
		14	59,43	— 0,42	+ 0,86	— 0,47
		16	59,57	— 0,28	+ 0,84	— 0,50
		17	59,62	— 0,23	+ 0,83	— 0,52
		22	59,42	— 0,43	+ 0,79	— 0,58
		23	59,30	— 0,55	+ 0,78	— 0,59
		31	59,51	— 0,34	+ 0,69	— 0,70
	Avril	1	59,57	— 0,28	+ 0,68	— 0,71
		3	59,49	— 0,36	+ 0,65	— 0,73
		4	59,57	— 0,28	+ 0,64	— 0,74
	Août	1	59,91	+ 0,06	— 0,94	— 0,28
		20	59,89	+ 0,04	— 0,98	+ 0,03
	Septembre	8	60,02	+ 0,17	— 0,92	+ 0,34
		17	60,00	+ 0,15	— 0,86	+ 0,47
		20	60,11	+ 0,26	— 0,83	+ 0,52
		25	60,04	+ 0,19	— 0,79	+ 0,58
		26	59,80	— 0,05	— 0,78	+ 0,59

Équations finales:

$$+ 41{,}00\,x + 1{,}56\,y + 9{,}50\,z - 0'',33 = 0$$
$$+ 1{,}56\,x + 29{,}33\,y - 10{,}67\,z - 6{,}40 = 0$$
$$+ 9{,}50\,x - 10{,}67\,y + 10{,}05\,z + 2{,}86 = 0$$

d'où

$$x = 0'',000 - 0{,}25\,z \pm 0'',020$$
$$y = + 0{,}218 + 0{,}38\,z \pm 0{,}023$$

Err. pr. d'une observation = ± 0″,127.

ϑ Draconis.

			Décl. observée.	n	b	c
1880	Mars	6	+ 58° 52′ 59″,86	— 0″,31	+ 0,96	— 0,20
		16	60,57	+ 0,40	+ 0,91	— 0,36
		20	60,70	+ 0,53	+ 0,88	— 0,43

			Décl. observée.	n	b	c
1880	Mars	23	+ 58° 52′ 60″,10	— 0″,07	+ 0,85	— 0,49
		25	59,88	— 0,29	+ 0,84	— 0,51
		27	60,00	— 0,17	+ 0,82	— 0,54
		29	60,89*	+ 0,72	+ 0,80	— 0,57
		31	60,18	+ 0,01	+ 0,78	— 0,59
	Avril	1	60,01	— 0,16	+ 0,77	— 0,61
1880	Juillet	21	60,21	+ 0,04	— 0,81	— 0,55
		27	60,11	— 0,06	— 0,86	— 0,47
	Août	12	60,15	— 0,02	— 0,96	— 0,23
		15	60,28	+ 0,11	— 0,97	— 0,18
		18	60,54	+ 0,37	— 0,97	— 0,14
		29	60,48	+ 0,31	— 0,98	+ 0,05
		30	60,28	+ 0,11	— 0,98	+ 0,07
	Septembre	3	60,43	+ 0,26	— 0,98	+ 0,13
		12	60,35	+ 0,18	— 0,95	+ 0,24
		27	60,35	+ 0,18	— 0,85	+ 0,49
1881	Mars	4	59,80	— 0,37	+ 0,97	— 0,15
		14	59,54*	— 0,63	+ 0,92	— 0,34
		16	59,82	— 0,35	+ 0,91	— 0,37
		17	59,78	— 0,39	+ 0,90	— 0,39
		22	59,81	— 0,36	+ 0,86	— 0,47
		23	59,90	— 0,27	+ 0,86	— 0,48
	Avril	1	59,90	— 0,27	+ 0,77	— 0,61
		3	60,06	— 0,11	+ 0,75	— 0,63
		4	59,85	— 0,32	+ 0,74	— 0,64
	Août	1	60,18	+ 0,01	— 0,89	— 0,41
		20	60,28	+ 0,11	— 0,98	— 0,10
	Septembre	8	60,30	+ 0,13	— 0,96	+ 0,20
		17	60,46	+ 0,29	— 0,92	+ 0,34
		20	60,30	+ 0,13	— 0,90	+ 0,39
		25	60,25	+ 0,08	— 0,86	+ 0,47
		26	60,25	+ 0,08	— 0,86	+ 0,48

Équations finales:

$$+32,50\,x + 2,56\,y + 6,51\,z + 0'',39 = 0$$
$$+2,56\,x + 25,69\,y - 6,74\,z - 4,49 = 0$$
$$+6,51\,x - 6,74\,y + 5,63\,z + 1,57 = 0$$

d'où

$$x = -0'',026 - 0,22\,z \pm 0'',019$$
$$y = +0,177 + 0,28\,z \pm 0,021$$

Err. pr. d'une observation = ± 0″,108.

b Draconis.

			Décl. observée.	n	b	c
1880	Mars	25	+ 58° 43′ 55″,31	— 0″,13	+ 0,99	0,00
		29	55,25	— 0,19	+ 0,99	— 0,07
	Avril	12	55,59	+ 0,15	+ 0,94	— 0,31
		13	55,38	— 0,06	+ 0,93	— 0,33
		22	55,46(½)	+ 0,02	+ 0,87	— 0,47
		29	55,35	— 0,09	+ 0,81	— 0,57
	Mai	5	55,02	— 0,42	+ 0,75	— 0,65
		12	55,34	— 0,10	+ 0,67	— 0,73
		13	55,52	+ 0,08	+ 0,65	— 0,75
	Août	23	54,84*	— 0,60	— 0,82	— 0,55
		28	55,90	+ 0,46	— 0,87	— 0,47
		30	55,58	+ 0,14	— 0,88	— 0,45
		31	55,17	— 0,27	— 0,89	— 0,43
	Septembre	2	55,70	+ 0,26	— 0,90	— 0,41
		3	55,62	+ 0,18	— 0,91	— 0,39
		10	55,71	+ 0,27	— 0,95	— 0,29
		13	55,83	+ 0,39	— 0,96	— 0,24
		17	55,54	+ 0,10	— 0,98	— 0,17
		27	55,69	+ 0,25	— 0,99	0,00
		28	55,38	— 0,06	— 0,99	+ 0,02
	Octobre	11	55,72	+ 0,28	— 0,96	+ 0,24
1881	Avril	5	55,06	— 0,38	+ 0,97	— 0,19
		7	55,44	0,00	+ 0,96	— 0,22
		8	55,19	— 0,25	+ 0,96	— 0,24
		12	55,33	— 0,11	+ 0,94	— 0,31
		13	55,07	— 0,37	+ 0,93	— 0,32
		14	55,36	— 0,08	+ 0,93	— 0,34
		15	55,07	— 0,37	+ 0,92	— 0,36
		18	55,20	— 0,24	+ 0,90	— 0,41
	Mai	7	55,45	+ 0,01	+ 0,73	— 0,67
		9	55,16	— 0,28	+ 0,70	— 0,70
		22	55,11	— 0,33	+ 0,54	— 0,83
	Août	28	55,59	+ 0,15	— 0,86	— 0,49
	Septembre	5	55,68	+ 0,24	— 0,92	— 0,37
		6	55,78	+ 0,34	— 0,93	— 0,35

		Décl. observée.	n	b	c
1881 Septembre	8	+ 58° 43′ 55″,53	+ 0″,09	— 0,94	— 0,31
	25	55,84	+ 0,40	— 0,99	— 0,03
	26	55,23	— 0,21	— 0,99	— 0,01

Équations finales:

$$+ 36,50\,x - 0,74\,y + 12,39\,z + 0'',14 = 0$$
$$- 0,74\,x + 29,47\,y - 2,70\,z - 5,49 = 0$$
$$+ 12,39\,x - 2,70\,y + 6,30\,z + 0,54 = 0$$

d'où

$$x = 0'',000 - 0,34\,z \pm 0'',021$$
$$y = + 0,186 + 0,08\,z \pm 0,023$$

Err. prob. d'une observation $= \pm 0'',125$.

o Draconis.

		Décl. observée.	n	b	c
1879 Décembre	21	+ 59° 14′ 35″,16	— 0″,04	— 0,20	+ 0,97
1880 Mars	14	35,45	+ 0,25	+ 0,95	+ 0,28
	20	35,33	+ 0,13	+ 0,98	+ 0,17
	25	35,12	— 0,08	+ 0,99	+ 0,08
Avril	2	34,97	— 0,23	+ 0,99	— 0,05
	12	35,26	+ 0,06	+ 0,97	— 0,21
	13	35,34	+ 0,14	+ 0,96	— 0,23
	22	35,15	— 0,05	+ 0,91	— 0,39
	29	35,65	+ 0,45	+ 0,86	— 0,49
Mai	5	34,73	— 0,47	+ 0,81	— 0,57
	12	35,00	— 0,20	+ 0,74	— 0,66
	13	35,10	— 0,10	+ 0,73	— 0,67
Août	23	35,11	— 0,09	— 0,76	— 0,63
	28	35,38	+ 0,18	— 0,81	— 0,57
	30	35,18	— 0,02	— 0,83	— 0,54
	31	35,36	+ 0,16	— 0,84	— 0,52
Septembre	2	35,45	+ 0,25	— 0,86	— 0,49
	3	35,40	+ 0,20	— 0,87	— 0,47
	13	35,48	+ 0,28	— 0,93	— 0,34
	17	35,35	+ 0,15	— 0,95	— 0,27
	24	35,29	+ 0,09	— 0,98	— 0,16
	27	35,40	+ 0,20	— 0,99	— 0,10
	28	35,17	— 0,03	— 0,99	— 0,08

		Décl. observée.	n	b	c
1880 Octobre	11	+ 59° 14′ 35″,40	+ 0″,20	— 0,98	+ 0,14
	26	34,88	— 0,32	— 0,91	+ 0,39
	29	35,07	— 0,13	— 0,89	+ 0,43
1881 Avril	8	34,83	— 0,37	+ 0,98	— 0,15
	12	35,23	+ 0,03	+ 0,97	— 0,22
	13	34,94	— 0,26	+ 0,96	— 0,23
	15	34,80	— 0,40	+ 0,95	— 0,27
	18	35,11	— 0,09	+ 0,94	— 0,31
Mai	7	35,36	+ 0,16	+ 0,79	— 0,60
	9	35,17	— 0,03	+ 0,77	— 0,62
	22	35,24	+ 0,04	+ 0,62	— 0,77
Septembre	5	35,56	+ 0,36	— 0,88	— 0,45
	6	35,28	+ 0,08	— 0,89	— 0,43
	8	35,18	— 0,02	— 0,90	— 0,41
	13	35,35	+ 0,15	— 0,93	— 0,34
	25	35,24	+ 0,04	— 0,98	— 0,14
	26	35,23	+ 0,03	— 0,98	— 0,12
Octobre	28	34,97	— 0,23	— 0,90	+ 0,41

Équations finales:

$$+ 41{,}00\,x + 2{,}38\,y + 9{,}63\,z - 0'',47 = 0$$
$$+ 2{,}38\,x + 32{,}61\,y - 0{,}89\,z - 2{,}33 = 0$$
$$+ 9{,}63\,x - 0{,}89\,y + 7{,}59\,z - 0{,}58 = 0$$

d'où

$$x = + 0'',007 - 0{,}24\,z \pm 0'',021$$
$$y = + 0{,}071 + 0{,}05\,z \pm 0{,}024$$

Err. pr. d'une observation = ± 0″,135.

Radcliffe 4511.

		Decl. observée.	n	b	c
1880 Septembre	13	+ 59° 23′ 39″,69	+ 0″,32	— 0,83	— 0,54
	17	39,28	— 0,09	— 0,86	— 0,49
	24	39,50	+ 0,13	— 0,91	— 0,39
	27	39,85	+ 0,48	— 0,93	— 0,33
	28	39,27	— 0,10	— 0,94	— 0,31
Octobre	11	39,47	+ 0,10	— 0,98	— 0,08
	26	39,03	— 0,34	— 0,97	+ 0,17
	29	38,96	— 0,41	— 0,96	+ 0,22
Novembre	1	39,52	+ 0,15	— 0,95	+ 0,28

		Décl. observée.	n	b	c
1881 Juin	8	+ 59° 23′ 39″,08	— 0″,29	+ 0,58	— 0,80
	15	39,83	+ 0,46	+ 0,48	— 0,87
	19	39,10	— 0,27	+ 0,42	— 0,90
	20	38,99	— 0,38	+ 0,41	— 0,90
	22	39,50	+ 0,13	+ 0,38	— 0,91
	27	39,52	+ 0,15	+ 0,30	— 0,94

Équations finales:

$$+15{,}00\,x + 5{,}76\,y + 6{,}79\,z - 0''{,}04 = 0$$
$$+5{,}76\,x + 8{,}88\,y - 1{,}00\,z - 0{,}30 = 0$$
$$+6{,}79\,x - 1{,}00\,y + 5{,}78\,z - 0{,}26 = 0$$

d'où

$$x = -0''{,}013 - 0{,}66\,z \pm 0''{,}062$$
$$y = +0{,}042 + 0{,}54\,z \pm 0{,}080$$

Err. pr. d'une observation $= \pm 0''{,}207$.

Radcliffe 5074.

		Decl. observée.	n	b	c
1880 Octobre	26	+ 58° 58′ 25″,30	— 0″,03	— 0,97	— 0,06
	29	24,91	— 0,42	— 0,97	— 0,01
Novembre	1	25,68	+ 0,35	— 0,97	+ 0,01
	6	25,39	+ 0,06	— 0,97	+ 0,11
	16	25,71	+ 0,38	— 0,93	+ 0,28
	19	25,36	+ 0,03($\frac{1}{2}$)	— 0,91	+ 0,34
1881 Juillet	12	25,34	+ 0,01	+ 0,29	— 0,93
	13	25,33	0,00	+ 0,27	— 0,94
	15	25,35	+ 0,02	+ 0,24	— 0,94
	16	25,02	— 0,31	+ 0,22	— 0,94

Équations finales:

$$+9{,}50\,x + 4{,}25\,y + 3{,}24\,z - 0''{,}08 = 0$$
$$+4{,}25\,x + 5{,}31\,y - 1{,}42\,z - 0{,}39 = 0$$
$$+3{,}24\,x - 1{,}42\,y + 3{,}65\,z + 0{,}39 = 0$$

d'où

$$x = -0''{,}038 - 0{,}72\,z \pm 0''{,}073$$
$$y = +0{,}103 + 0{,}84\,z \pm 0{,}098$$

Err. pr. d'une observation $= \pm$ 0,181.

B. A. C. 7387.

		Décl. observée.	n	b	c
1880 Octobre	26	+ 59° 36′ 24,59	— 0,41	— 0,97	— 0,12
	29	24,41	— 0,59	— 0,97	— 0,07
Novembre	1	25,17	+ 0,17	— 0,97	— 0,01
	6	24,99	— 0,01	— 0,97	+ 0,07
	16	25,50	+ 0,50	— 0,94	+ 0,24
	19	25,39	+ 0,39	— 0,93	+ 0,28
1881 Juillet	9	24,83	— 0,17	+ 0,38	— 0,89
	12	25,15	+ 0,15	+ 0,33	— 0,91
	13	24,98	— 0,02	+ 0,32	— 0,92
	15	25,19	+ 0,19	+ 0,29	— 0,93
	16	24,74	— 0,26	+ 0,27	— 0,93

Équations finales:

$$+ 11,00\,x + 4,16\,y + 4,19\,z + 0{,}''06 = 0$$
$$+ 4,16\,x + 6,03\,y - 1,81\,z - 0,05 = 0$$
$$+ 4,19\,x - 1,81\,y + 4,36\,z + 0,41 = 0$$

d'où

$$x = - 0{,}''012 - 0,67\,z \pm 0{,}''083$$
$$y = + 0,016 + 0,76\,z \pm 0,112$$

Err. pr. d'une observation $= \pm$ 0,236.

15 Cephei.

		Décl. observée.	n	b	c
1880 Octobre	29	+ 59° 14′ 15,77	— 0,32	— 0,92	— 0,24
Novembre	6	16,53	+ 0,44	— 0,95	— 0,12
	19	16,58	+ 0,49	— 0,95	+ 0,10
1881 Juillet	21	15,97	— 0,12	+ 0,36	— 0,88
	25	15,77	— 0,32	+ 0,30	— 0,90
	28	15,97	— 0,12	+ 0,25	— 0,92

Équations finales:

$$+6{,}00\,x + 1{,}91\,y + 2{,}96\,z - 0{,}''05 = 0$$
$$+1{,}91\,x + 2{,}94\,y - 0{,}58\,z - 0{,}76 = 0$$
$$+2{,}96\,x - 0{,}58\,y + 2{,}51\,z + 0{,}58 = 0$$

d'où

$$x = -0{,}''093 - 0{,}70\,z \pm 0{,}''101$$
$$y = +0{,}318 + 0{,}65\,z \pm 0{,}145$$

Err. pr. d'une observation $= \pm 0{,}''221$.

En formant les équations finales, toutes les observations où les n dépassent $0{,}''60$ ont été exclues. Parmi ces observations — au nombre total de 10 — il y a trois qui déjà dans les journaux ont été notées comme moins sûres; pour trois autres les images ont été extrêmement mauvaises. Pour les quatre observations restantes, l'exclusion m'a paru assez justifiée par le fait que les écarts dépassent de 4 à 9 fois l'err. pr. d'une seule observation. Un écart p. ex. de $0{,}''89$, comme le montre l'observation de Radcliffe 3104 le 18 Mai 1881, pendant que l'err. pr. des autres observations est de $\pm 0{,}''098$, paraît inexplicable de toute autre manière qu'en supposant qu'une cause de nature extraordinaire ait influencé le résultat. Peut-être s'agit-il ici d'une réfraction latérale, ou bien le compte des secondes de l'horloge pendant l'un des passages par la moitié du réticule a-t-il été constamment erroné, pour tous les fils, d'une ou de plusieurs secondes entières[1]). Du reste on se convaincra facilement que le résultat définitif de l'aberration ne serait pas changé si l'on voulait tenir compte aussi des observations exclues. Les observations marquées par $(\frac{1}{2})$ — demi-poids — sont celles où tous les quatre passages de l'étoile n'ont pu être observés que sur un ou deux fils, tandis que sur les autres fils on n'a observé que trois passages.

En rassemblant les corrections à appliquer à l'aberration, trouvées par les différentes étoiles, et en désignant par π la parallaxe de l'étoile en question, nous aurons ainsi:

	Ascens. droite.		Corr. de l'aber.		Err. pr.	Err. pr. d'une observ.
β Cassiopeiae	0^h	3^m	$+0{,}''045$	$+0{,}88\,\pi$	$\pm 0{,}''067$	$\pm 0{,}''188$
δ Cassiopeiae	1	18	$+0{,}081$	$+0{,}46\,\pi$	$\pm 0{,}039$	$\pm 0{,}162$
χ Cassiopeiae	1	26	$+0{,}224$	$+0{,}73\,\pi$	$\pm 0{,}054$	$\pm 0{,}134$
2 H. Camelop.	3	19	$+0{,}078$	$+0{,}49\,\pi$	$\pm 0{,}053$	$\pm 0{,}147$

1) Une erreur de cette dernière espèce devrait se découvrir dans les moyennes des temps des passages Est et Ouest, observés dans les mêmes positions de l'instrument (Sud et Nord). Quelquefois cependant ces deux moyennes, sans offrir des écarts extraordinaires pour les distances zénithales dérivées, diffèrent l'une de l'autre de quantités si considérables, qu'il est impossible de dire, si l'on doit attribuer les différences aux erreurs du compte des secondes ou à une autre origine inconnue.

	Ascens. droite.		Corr. de l'aber.		Err. pr.	Err. pr. d'une observ.
10 H. Camelop.	3^h	54^m	+ 0",181	+ 0,60 π	± 0",085	± 0",140
B. D. 793	4	13	+ 0,041	+ 0,47 π	± 0,062	± 0,150
11 Camelop.	4	56	— 0,148	+ 0,27 π	± 0,058	± 0,146
37 Camelop.	5	59	— 0,018	+ 0,29 π	± 0,095	± 0,174
2 Lyncis	6	9	— 0,066	— 0,11 π	± 0,062	± 0,163
14 Lyncis	6	42	— 0,004	+ 0,18 π	± 0,059	± 0,134
15 Lyncis	6	49	— 0,288	— 0,06 π	± 0,059	± 0,139
24 Lyncis	7	33	— 0,138	— 0,14 π	± 0,060	± 0,160
υ Ursae maj.	9	42	+ 0,059	+ 0,04 π	± 0,044	± 0,149
74 Ursae maj.	12	24	+ 0,072	— 0,37 π	± 0,050	± 0,144
75 Ursae maj.	12	25	+ 0,052	— 0,38 π	± 0,040	± 0,085
Radcliffe 3104	13	46	— 0,052	— 0,51 π	± 0,052	± 0,098
ι Draconis	15	22	+ 0,218	+ 0,38 π	± 0,023	± 0,127
ϑ Draconis	16	0	+ 0,177	+ 0,28 π	± 0,021	± 0,108
b Draconis	18	22	+ 0,186	+ 0,08 π	± 0,023	± 0,125
o Draconis	18	49	+ 0,071	+ 0,05 π	± 0,024	± 0,135
Radcliffe 4511	19	51	+ 0,042	+ 0,54 π	± 0,080	± 0,207
Radcliffe 5074	20	56	+ 0,103	+ 0,84 π	± 0,098	± 0,181
B. A. C. 7387	21	10	+ 0,016	+ 0,76 π	± 0,112	± 0,236
15 Cephei	22	0	+ 0,318	+ 0,65 π	± 0,145	± 0,221

La moyenne de ces corrections, eu égard aux poids indiqués par les erreurs probables, serait:

$$\text{Corr.} = +\ 0''\!,105 + 0{,}19\pi_0 \pm 0''\!,0086$$

où π_0 désigne la parallaxe moyenne des étoiles observées.

Cette méthode d'évaluer la correction définitive ne saurait cependant être regardée comme la plus exacte, qu'à condition que les observations — ou pour s'exprimer avec plus de précision, les coefficients de l'aberration avec lesquels elles entrent dans les équations — soient distribuées uniformement sur toutes les heures de l'ascension droite. Comme nous l'avons vu, cette uniformité des observations n'a pu être atteinte dans notre cas. Mais si, comme cela s'est fait dans l'évaluation précédente de la correction, l'on ne tenait compte que du nombre des observations, on n'attribuerait point de poids à la distribution presque uniforme des étoiles observées. Cependant l'uniformité dans la distribution des étoiles, qui a pour conséquence nécessaire que les observations soient aussi espacées sur toutes les saisons, est certainement d'une haute importance pour réduire à un minimum l'influence des erreurs systématiques des observations. Pour cette raison — en convenant toute-fois que le procédé soit un peu arbitraire — il nous paraît plus conforme aux données du problème, de partager les 24 heures de l'ascension droite en sections égales de 6 heures p. ex., et de prendre pour chaque section la moyenne des corrections y trouvées. De cette manière on

peut faire droit au principe légitime, qu'un nombre d'observations s'étendant sur plusieurs étoiles, ait plus de poids que le même nombre d'observations faites sur une seule. Nous aurons ainsi:

Pour la section	$0^h\ 0^m$ — $6^h\ 0^m$	corr.	=	$+ 0'',066$	$+ 0,52\ \pi_0$	$\pm 0'',026$
» » »	6 0 — 12 0	»	=	— 0,067	$— 0,02\ \pi_0$	$\pm$ 0,040
» » »	12 0 — 18 0	»	=	+ 0,163	$+ 0,16\ \pi_0$	$\pm$ 0,025
» » »	18 0 — 24 0	»	=	+ 0,127	$+ 0,13\ \pi$	$\pm$ 0,019

Les erreurs probables sont déduites ici des différences entre ces corrections moyennes et les valeurs isolées du tableau précédent eu égard aux poids de ces dernières. En combinant entre elles les différentes corrections de chaque section, il a paru utile d'employer, dans les quadrants 0^h—6^h et 18^h—24^h, comme erreur probable d'une observation la valeur déduite des observations de l'étoile même; pour les quadrants intermédiaires on a pu se contenter des valeurs moyennes de ces erreurs, savoir $\pm 0'',150$ pour les étoiles 6^h—12^h et $\pm 0'',124$ pour celles de la section 12^h—18^h. La valeur moyenne de l'err. pr. d'une seule observation est pour toute la série $= \pm 0'',150$[1]).

La haute exactitude des observations isolées aurait permis d'attendre un accord plus parfait des corrections trouvées par les quatre groupes séparément. Mais nous voyons que les résultats fournis par les deux sections intermédiaires, où l'err. pr. des observations isolées est la plus petite, s'écartent le plus l'un de l'autre. C'est pourquoi il paraît très probable que les corrections trouvées ne soient pas encore entièrement exemptes d'erreurs systématiques. Cette supposition gagne encore en probabilité par les données du tableau suivant, où toutes les observations d'une étoile, faites aux environs d'un maximum ou d'un minimum de l'aberration, ont été réunies en groupe. Pour chaque mois les déviations moyennes de tous les groupes d'observations, dont les époques moyennes tombent sur ce mois, ont été combinées à une seule moyenne (Observation-Calcul). Les corrections des déclinaisons moyennes y sont déjà appliquées. Ces déviations sont:

		O.—C.	Nombre des observ.
1879	Décembre	$+ 0'',09$	10
1880	Février	+ 0,05	35
	Mars	— 0,01	56
	Avril	0,00	31
	Mai	+ 0,09	8
	Août	+ 0,08	61

1) Dans la série de Struve l'err. pr. a été trouvée pour 5 étoiles en moyenne $= \pm 0'',117$, pour une étoile $= \pm 0'',145$ et pour la septième $= \pm 0'',178$. Dans la série d'observations exécutées par M. Oom avec le même instrument, l'err. pr. d'une observation isolée est en moyenne $= \pm 0'',149$, c. à d. presque identique avec la valeur trouvée ici.

		O.—C.	Nombre des observ.
1880	Septembre	+ 0,"10	46
	Octobre	+ 0,03	15
	Novembre	+ 0,05	40
1881	Janvier	0,00	34
	Février	— 0,12	15
	Mars	— 0,17	63
	Avril	— 0,17	19
	Mai	0,00	23
	Juin	— 0,02	6
	Juillet	— 0,05	19
	Août	— 0,12	16
	Septembre	+ 0,08	35
	Octobre	— 0,02	9
	Novembre	+ 0,17	2
	Décembre	+ 0,21	$\frac{1}{2}$
1882	Janvier	+ 0,04	12

Il faut remarquer ici que dans toutes les saisons il se trouve des observations tant du maximum que du minimum de l'aberration de l'une ou de l'autre étoile. Néanmoins il se manifeste une marche trés prononcée dans ces différences. Ce sont les signes négatifs pour les mois Février-Août de l'année 1881 qui compensent les écarts positifs de presque tous les autres mois d'observation. Si l'on considère que la moyenne arithmétique des coefficients de l'aberration pour toutes les observations faites pendant cette période est = + 0.04, le fait mentionné ne peut s'expliquer par la prépondérance des observations de l'une ou de l'autre phase du phenomène. Aussi la série ininterrompue du même signe est trop accentuée pour être attribuée aux erreurs accidentelles.

Une explication de cette fluctuation des différences pourrait être donnée de plusieurs manières. Ainsi par exemple, il n'est pas à nier, qu'une variation temporaire de l'équation personnelle dans l'observation des passages par les fils pourrait se produire. Cependant vu la symétrie des passages en Est et en Ouest, il me paraît très improbable qu'une telle variation ne s'éliminerait pas d'elle-même du résultat de chaque observation. Une autre explication serait donné si l'on voulait admettre que la latitude de notre instrument subisse de petits changements temporaires. La seule objection à faire à cette supposition est que, jusqu'à présent on n'a pas constaté avec quelque certitude de pareils changements. On pourrait encore supposer que les déviations doivent leur origine à une réfraction latérale. Il est clair qu'une position non concentrique des couches de l'atmosphère doit faire dévier les distances zénithales observées de l'un ou de l'autre côté de leurs vrais lieux. Ces écarts cependant, s'ils sont de nature accidentelle, n'auront d'autre effet que d'augmenter les erreurs accidentelles des observations. Les variations régulières des couches d'air, pour autant que nous les connaissons par les isobares mensuelles de notre pays, sont tellement petites que leur influence sur

les distances zénithales des étoiles observées sera nécessairement insensible. Il est vrai que les isobares locales d'un certain endroit peuvent s'écarter considérablement de celles qui sont indiquées pour la même localité sur une carte construite pour un rayon beaucoup plus étendu. Mais il me paraît fort improbable qu'une telle déviation de la forme concentrique dans les couches de l'atmosphère puisse se maintenir durant plusieurs mois d'une seule année sans se produire également dans les années suivantes.

C'est donc pour le moment encore une question à résoudre, si la cause de la variation des distances zénithales observées doit être cherchée dans un changement temporaire de l'équation personnelle ou de la latitude de l'observatoire, ou bien dans une réfraction latérale ou peut-être dans d'autres circonstances inconnues. Mais en examinant notre problème d'un peu plus près, nous trouverons que les dites variations des distances zénithales seront presque sans aucune influence sur notre résultat à déduire. Évidemment cette influence serait tout à fait nulle si la somme des poids des observations faites aux environs des maxima était dans chaque saison parfaitement égale à la somme des poids des déterminations obtenues aux environs des minima de l'aberration. Dans notre cas cette égalité est bien près d'être atteinte, comme nous allons le montrer. Pour toutes les observations les moyennes arithmétiques des coefficients de l'aberration sont dans les différentes saisons:

Janvier — Mars	= —0.17
Avril — Juin	= + 0.14
Juillet — Septembre	= —0.09
Octobre — Décembre	= —0.09

Nous voyons donc que l'excès des observations faites sur l'une ou sur l'autre phase du phénomène est dans les différentes saisons tout à fait insignifiant. Par conséquent, s'il y a dans les declinaisons observées des variations périodiques s'étendant sur quelques mois, elles n'auront aucune influence appréciable sur l'aberration à déduire. La moyenne des aberrations trouvées par des observations presque simultanées de deux étoiles, distantes, en ascension droite, de 12^h environ l'une de l'autre, doit être exempte d'erreurs de cette nature.

Tout bien considéré, nous croyons devoir regarder comme correction définitive de l'aberration, fournie par notre série d'observations, la moyenne arithmétique des corrections trouvées pour les quadrants isolés. Nous avons ainsi:

$$\textbf{Correction de l'aberration} = +0''.072 + 0{,}20\pi_0 \pm 0''.014.$$

Le degré d'incertitude de cette correction paraît être indiqué assez exactement par l'err. pr. assignée.

Quant à la parallaxe moyenne, π_0, des étoiles observées, elle nous est absolument inconnue. Les parallaxes fournies par nos équations de condition sont tellement incertaines,

qu'il ne vaut pas la peine de les citer ici[1]). En considérant que les étoiles qui ont contribué le plus au terme de la correction définitive dépendant de la parallaxe, sont en moyenne au dessous de la 5ème grandeur, on ne peut douter que la quantité π_0, ne soit extrêmement petite. Nous préférons donc nous passer entièrement du terme dû à la parallaxe, au lieu d'ajouter au nombre trouvé une correction arbitraire de quelques millièmes de seconde.

Il a été dit plus haut que nous possédons aujourd'hui plusieurs séries d'observations qui pourraient avec succès concourir avec notre détermination dans l'évaluation définitive de la constante de l'aberration. Aux séries d'observations déjà connues de Poulkova nous sommes en était d'ajouter une nouvelle, qui, dans son genre, surpasse peut-être en exactitude tout ce qui a été fait jusqu'à présent. Ce sont les observations de quelques étoiles polaires, exécutées par M. Wagner à l'aide de la grande lunette méridienne dans les années 1861—72. Ces observations ne sont encore publiées qu'en partie, mais grâce à l'obligeance de M. Wagner j'ai pu faire usage ici de la série entière.

Les étoiles observées sont: α Ursae min., δ Ursae min. et Cephei 51 Hév. A peu d'exceptions près, tous les passages ont été observés de deux manières: à l'ouïe, et à l'aide du chronographe enrégistrateur. Ces deux méthodes d'observation seront traitées ici séparément. Le nombre des passages observés se trouve:

				Ouïe.	Enrégistrés.
pour	α Ursae min.	passages	supérieurs	232	218
	» »	»	inférieurs	207	211
»	δ Ursae min.	»	supérieurs	136	133
	» »	»	inférieurs	144	143
»	Cephei 51 Hév.	»	supérieurs	123	125
	» »	»	inférieurs	101	110

Les observations ont été réunies en groupes, chaque groupe comprenant toutes les observations faites dans les mêmes moitiés de mois de toute la période. Après avoir attribué à chaque passage des poids dépendant de la qualité des images et du nombre des fils observés, nous avons formé des équations de conditions tout à fait analogues aux équations établies pour les observations du premier vertical. L'unité de poids correspond ici à l'err. pr. de $\pm$ 0,"160 de l'arc du grand cercle.

1) Pour 10 étoiles les parallaxes se trouvent positives, pour 14 négatives; la valeur moyenne est $+0,''002 \pm 0,''026$.

α. Ursae min.

a) Ouïe.

	Époque moy.	n	b	c	Poids.
Janvier	8	— 0ˢ,250	— 0,04	+ 2,51	10,27
	24	— 0,360	+ 0,67	+ 2,42	9,53
Février	3	— 0,116	+ 1,08	+ 2,27	3,02
	18	+ 0,547	+ 1,63	+ 1,91	4,24
Mars	10	+ 0,221	+ 2,21	+ 1,20	7,02
	26	+ 0,171	+ 2,45	+ 0,55	9,38
Avril	8	— 0,068	+ 2,51	— 0,01	44,51
	22	+ 0,036	+ 2,43	— 0,62	29,99
Mai	9	+ 0,127	+ 2,16	— 1,28	38,20
	22	+ 0,224	+ 1,83	— 1,75	35,64
Juin	7	+ 0,406	+ 1,32	— 2,14	41,49
	23	+ 0,128	+ 0,70	— 2,41	30,52
Juillet	7	— 0,039	+ 0,14	— 2,51	30,98
	23	+ 0,135	— 0,53	— 2,45	19,11
Août	8	+ 0,020	— 1,16	— 2,23	5,08
	25	— 0,167	— 1,74	— 1,81	2,33
Septembre	11	— 0,055	— 2,18	— 1,24	3,63
	26	+ 0,433	— 2,42	— 0,65	16,70
Octobre	8	+ 0,166	— 2,50	— 0,14	30,60
	24	+ 0,292	— 2,44	+ 0,56	12,30
Novembre	10	+ 0,309	— 2,17	+ 1,26	7,02
	24	+ 0,200	— 1,80	+ 1,75	7,81
Décembre	7	+ 0,545	— 1,36	+ 2,11	11,82
	25	+ 0,388	— 0,63	+ 2,43	10,35

Avec ces quantités nous formons les équations finales:

$$+ 421{,}5\, x - 240{,}8\, y + 296{,}6\, z - 61^{s}{,}80 = 0$$
$$- 240{,}8\, x + 1435{,}6\, y - 395{,}6\, z - 4{,}54 = 0$$
$$+ 296{,}6\, x - 395{,}6\, y + 1225{,}0\, z - 51{,}88 = 0$$

d'où résultent les inconnues:

$$x = + 0^{s}{,}155$$
$$y = + 0''{,}033 \pm 0''{,}005$$
$$z = + 0{,}016 \pm 0{,}005$$

b) Enrégistré.

	Époque moy.	n	b	c	Poids.
Janvier	12	+ 0ˢ,010	+ 0,20	+ 2,50	7,22
	27	— 0,490	+ 0,82	+ 2,37	4,18

	Époque moy.	*n*	*b*	*c*	Poids.
Février	5	+ 0,421	+ 1,18	+ 2,21	7,99
	21	+ 0,270	+ 1,74	+ 1,80	1,52
Mars	8	— 0,260	+ 2,15	+ 1,29	2,31
	23	+ 0,337	+ 2,41	+ 0,69	13,25
Avril	9	— 0,226	+ 2,51	— 0,03	50,32
	21	— 0,302	+ 2,44	— 0,72	35,06
Mai	11	— 0,067	+ 2,13	— 1,33	34,73
	21	+ 0,016	+ 1,89	— 1,65	18,36
Juin	7	+ 0,193	+ 1,34	— 2,12	46,38
	22	+ 0,040	+ 0,77	— 2,39	39,91
Juillet	7	+ 0,018	+ 0,17	— 2,50	34,27
	22	+ 0,031	— 0,50	— 2,46	25,74
Août	8	+ 0,090	— 1,15	— 2,23	6,21
	25	— 0,134	— 1,73	— 1,82	2,68
Septembre	10	— 0,161	— 2,16	— 1,28	4,01
	26	+ 0,186	— 2,42	— 0,66	17,68
Octobre	7	— 0,006	— 2,50	— 0,19	32,51
	26	+ 0,256	— 2,43	+ 0,63	20,46
Novembre	9	+ 0,263	— 2,20	+ 1,20	20,69
	22	— 0,161	— 1,87	+ 1,67	20,52
Décembre	8	+ 0,442	— 1,33	+ 2,13	18,03
	25	— 0,242	— 0,64	+ 2,43	7,82

Équations finales:

$$+ 471,9\,x - 88,9\,y + 297,8\,z - 10^s,43 = 0$$
$$- 88,9\,x + 1635,3\,y - 477,5\,z - 67,16 = 0$$
$$+ 297,8\,x - 477,5\,y + 1353,6\,z + 6,49 = 0$$

d'où

$$x = + 0^s,027$$
$$y = + 0'',044 \pm 0'',004$$
$$z = + 0,005 \pm 0,005$$

δ Ursae min.

a) Ouïe.

	Époque moy.	*n*	*b*	*c*	Poids.
Janvier	13	— 0,561	+ 1,06	— 0,37	0,57
	23	+ 0,291	+ 0,98	— 0,56	5,70
Février	8	+ 0,059	+ 0,78	— 0,81	24,24
	22	+ 0,171	+ 0,56	— 0,98	15,50

Époque moy.		n	b	c	Poids.
Mars	8	+ 0ˢ,143	+ 0,29	— 1,09	31,26
	23	+ 0,059	0,00	— 1,13	54,63
Avril	15	+ 0,165	— 0,25	— 1,10	15,30
Juillet	12	+ 0,141	— 1,07	+ 0,34	1,63
	23	+ 0,028	— 1,00	+ 0,52	5,45
Août	10	+ 0,177	— 0,80	+ 0,80	19,13
	24	+ 0,010	— 0,59	+ 0,96	31,79
Septembre	7	+ 0,084	— 0,35	+ 1,07	33,12
	24	+ 0,083	— 0,03	+ 1,13	28,02
Octobre	4	— 0,121	+ 0,16	+ 1,11	7,30
Décembre	22	— 0,078	+ 1,12	+ 0,04	5,02

Équations finales:

$$+ 278{,}7\,x + 7{,}9\,y + 26{,}3\,z - 23^s{,}58 = 0$$
$$+ 7{,}9\,x + 70{,}5\,y - 78{,}3\,z - 0{,}36 = 0$$
$$+ 26{,}3\,x - 78{,}3\,y + 283{,}8\,z - 8{,}08 = 0$$

d'où

$$x = + 0^s{,}081$$
$$y = + 0''{,}028 \pm 0''{,}023$$
$$z = + 0{,}029 \pm 0{,}011$$

b) Enrégistré.

Époque moy.		n	b	c	Poids.
Janvier	25	+ 0ˢ,170	+ 0,96	— 0,59	9,79
Février	7	+ 0,136	+ 0,80	— 0,79	28,55
	23	+ 0,173	+ 0,54	— 0,99	25,15
Mars	6	+ 0,292	+ 0,33	— 1,08	52,72
	23	+ 0,137	0,00	— 1,13	51,32
Avril	5	+ 0,256	— 0,25	— 1,10	9,50
Juillet	13	+ 0,208	— 1,07	+ 0,35	2,88
	25	+ 0,280	— 0,98	+ 0,55	7,29
Août	11	+ 0,222	— 0,79	+ 0,80	20,64
	23	+ 0,059	— 0,61	+ 0,94	36,94
Septembre	5	+ 0,137	— 0,39	+ 1,05	26,75
	23	+ 0,093	— 0,06	+ 1,12	27,56
Octobre	4	+ 0,222	+ 0,16	+ 1,11	9,66
	24	+ 0,219	+ 0,53	+ 0,99	1,05
Décembre	21	+ 0,158	+ 1,12	+ 0,07	4,68

Équations finales:

$$
\begin{aligned}
+314{,}5\,x &- 7{,}0\,y + 50{,}9\,z - 53^{s}{,}37 = 0\\
-7{,}0\,x &+ 88{,}5\,y - 102{,}6\,z + 3{,}55 = 0\\
+50{,}9\,x &- 102{,}6\,y + 309{,}3\,z - 19{,}24 = 0
\end{aligned}
$$

d'où

$$
\begin{aligned}
x &= +0^{s}{,}164\\
y &= +0''{,}021 \pm 0''{,}022\\
z &= +0{,}042 \pm 0{,}012
\end{aligned}
$$

Cephei 51 Hév.

a) Ouïe.

Époque moy.		*n*	*b*	*c*	Poids.
Janvier	4	+ 0ˢ,612	— 1,37	+ 0,16	1,65
	24	— 0,087	— 1,23	+ 0,57	3,67
Février	7	+ 0,137	— 1,04	+ 0,91	18,34
	23	— 0,008	— 0,76	+ 1,16	12,17
Mars	8	— 0,195	— 0,47	+ 1,30	21,80
	23	— 0,135	— 0,12	+ 1,38	43,86
Avril	6	— 0,194	+ 0,21	+ 1,37	13,64
Juillet	12	— 0,079	+ 1,35	— 0,30	1,40
	23	— 0,259	+ 1,27	— 0,54	3,13
Août	11	— 0,101	+ 1,04	— 0,91	15,87
	24	+ 0,056	+ 0,82	— 1,11	21,90
Septembre	6	— 0,067	+ 0,56	— 1,27	27,62
	24	— 0,097	+ 0,15	— 1,38	23,72
Octobre	4	— 0,393	— 0,09	— 1,38	8,04
Décembre	4	— 0,087	— 1,25	— 0,60	0,92
	25	— 0,128	— 1,38	— 0,10	3,51

Équations finales:

$$
\begin{aligned}
+221{,}2\,x &- 4{,}9\,y - 20{,}1\,z + 18^{s}{,}85 = 0\\
-4{,}9\,x &+ 98{,}4\,y - 107{,}7\,z - 3{,}62 = 0\\
-20{,}1\,x &- 107{,}7\,y + 325{,}4\,z - 4{,}59 = 0
\end{aligned}
$$

d'où

$$
\begin{aligned}
x &= -0^{s}{,}081\\
y &= +0''{,}068 \pm 0''{,}020\\
z &= +0{,}032 \pm 0{,}011
\end{aligned}
$$

b) Enrégistré.

	Époque moy.	n	b	c	Poids.
Janvier	28	— 0,026	— 1,19	+ 0,71	5,33
Février	7	+ 0,058	— 1,04	+ 0,91	24,54
	23	+ 0,052	— 0,76	+ 1,16	16,92
Mars	8	+ 0,005	— 0,47	+ 1,30	41,03
	23	— 0,038	— 0,12	+ 1,38	45,45
Avril	6	— 0,431	+ 0,21	+ 1,37	7,47
Juillet	12	+ 0,356	+ 1,35	— 0,30	1,46
	23	— 0,077	+ 1,27	— 0,54	3,51
Août	12	+ 0,036	+ 1,03	— 0,93	18,94
	24	+ 0,145	+ 0,82	— 1,11	41,08
Septembre	6	+ 0,100	+ 0,56	— 1,27	26,05
	23	— 0,045	+ 0,18	— 1,37	24,91
Octobre	5	— 0,153	— 0,10	— 1,38	10,95
Décembre	25	+ 0,046	— 1,38	— 0,10	5,44

Équations finales:

$$+273{,}1\,x - 2{,}4\,y - 23{,}6\,z - 4^s{,}39 = 0$$
$$-2{,}4\,x + 129{,}1\,y - 153{,}8\,z + 4{,}46 = 0$$
$$-23{,}6\,x - 153{,}8\,y + 393{,}5\,z - 11{,}00 = 0$$

d'où

$$x = +0^s{,}019$$
$$y = +0'',001 \pm 0'',019$$
$$z = +0{,}029 \pm 0{,}011$$

En combinant les corrections de l'aberration tirées des observations à l'ouïe, avec les résultats fournis par les observations enrégistrées, nous avons par

α Ursae min. la corr. de l'aberr.	=	+ 0'',039	±	0'',003
δ Ursae min. » » »	=	+ 0,024	±	0,016
Cephei 51 Hév. » » »	=	+ 0,033	±	0,014
Moyenne		+ 0,038	±	0,003

Il y a lieu de supposer que la sûreté de cette correction, quoique certainement très considérable, ne correspond pas exactement à l'err. pr. assignée. On se convaincra facilement qu'en introduisant dans les équations de condition les autres quantités qui y jouent un rôle: le coefficient de la nutation, le mouvement propre de l'étoile ainsi que les variations possibles dépendant de la position de l'instrument, le poids de chaque inconnue serait réduit de beaucoup, sans que les valeurs numériques des corrections, trouvées pour la con-

Ouvrages astronomiques et géodésiques publiés dans la VII. Série des Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences:

T. I, № 1. **Struve, O.** Nouvelle détermination de la parallaxe annuelle des étoiles α Lyrae. et 61 Cygni. 1859. Pr. 45 K. = 1 Mk. 50 Pf.

№ 6. **Schubert, T. F.** Essai d'une détermination de la véritable figure de la terre. Avec 1 pl. 1859. Pr. 35 K. = 1 Mk. 20 Pf.

T. II, № 1. **Struve, O. u. Winnecke, Dr. A.** Pulkowaer Beobachtungen des grossen Cometen von 1858. Erste Abtheilung: Beobachtungen am Refractor, angestellt von O. Struve, Mitgliede der Akademie. Zweite Abtheilung: Beobachtungen am Heliometer nebst Untersuchungen über die Natur des Cometen von Dr. A. Winnecke, Adjunct-Astronomen der Hauptsternwarte. Mit 6 Taf. 1859. Pr. 1 R. 50 K. = 5 Mk.

№ 4. **Struve, O.** Beitrag zur Feststellung des Verhältnisses von Keppler zu Wallenstein. 1860. Pr. 30 K. = 1 Mk.

T. III, № 5. **Baeyer, J. J.** Ueber die Strahlenbrechung in der Atmosphäre. Avec 1 pl. lith. 1860. Pr. 65 K. = 2 Mk. 20 Pf.

T. IV, № 1. **Struve, O.** Beobachtung der totalen Sonnenfinsterniss vom 18. (6.) Juli 1860 in Pobes. Nach den Berichten der einzelnen Theilnehmer zusammengestellt. Mit 3 Taf. 1861. Pr. 85 K. = 2 Mk. 80 Pf.

T. V, № 4. **Struve, O.** Observations de la grande nébuleuse d'Orion, faites à Cazan et à Poulkova. I[e] Partie: Mémoire de M. Liapounov sur les observations de Cazan. II[e] Partie: O. Struve, Additions au mémoire de M. Liapounov et Observations de Poulkova. Avec 4 pl. lith. 1862. Pr. 1 R. 35 K. = 4 Mk. 50 Pf.

T. VI, № 7. **Winnecke, A.** Beobachtungen des Mars um die Zeit der Opposition 1862. 1863. Pr. 40 K. = 1 Mk. 30 Pf.

№ 11. **Sawitsch, A.** Opposition des Mars im Jahre 1862, beobachtet auf der kleinen akademischen Sternwarte zu St. Petersburg. 1863. Pr. 25 K. = 80 Pf.

T. VII, № 7. **Winnecke, A.** Pulkowaer Beobachtungen des hellen Cometen von 1862, nebst einigen Bemerkungen. Mit 6 lith. Taf. 1864. Pr. 90 K. = 3 Mk.

T. VIII, № 2. **Linsser, C.** Vier von De l'Isle beobachtete Plejaden-Bedeckungen, bearbeitet und mit Hansen's Mond-Tafeln verglichen. 1864. Pr. 25 K. = 80 Pf.

T. X, № 1. **Gyldén, H.** Untersuchungen über die Constitution der Atmosphäre und die Strahlenbrechung in derselben. Erste Abhandlung. 1866. Pr. 70 K. = 2 Mk. 30 Pf.

T. XII, № 4. **Gyldén, H.** Untersuchungen über die Constitution der Atmosphäre und die Strahlenbrechung in derselben. Zweite Abhandlung. 1868. Pr. 45 K. = 1 Mk. 50 Pf.

№ 5. **Struve, O.** Beobachtungen des grossen Cometen von 1861. Mit 1 lith. Taf. 1868. Pr. 50 K. = 1 Mk. 70 Pf.

T. XVI, № 10. **Gyldén, H.** Studien auf dem Gebiete der Störungstheorie. I. Entwickelung einiger Verbindungen elliptischer Functionen. 1871. Pr. 1 R. 5 K. = 3 Mk. 50 Pf.

T. XVII, № 1. **Kortazzi, J.** Bestimmung der Längen-Differenz zwischen Pulkowa, Helsingfors, Åbo, Lowisa und Wiborg. 1871. Pr. 60 K. = 2 Mk.

№ 10. **Fuss, V.** u. **Nyrén, M.** Bestimmung der Längen-Differenz zwischen den Sternwarten Stockholm und Helsingfors, ausgeführt im Sommer 1870. 1871. Pr. 35 K. = 1 Mk. 20 Pf.

T. XVIII, № 3. **Fuss, V.** Beobachtungen und Untersuchungen über die astronomische Strahlenbrechung in der Nähe des Horizontes. 1872. Pr. 40 K. = 1 Mk. 30 Pf.

№ 5. **Asten, E. v.** Resultate aus Otto von Struve's Beobachtungen der Uranustrabanten. 1872. Pr. 25 K. = 80 Pf.

№ 10. **Asten, E. v.** Untersuchungen über die Theorie des Encke'schen Cometen. I. Berechnung eines wichtigen Theiles der absoluten Jupitersstörungen des Encke'schen Cometen. 1872. Pr. 65 K. = 2 Mk. 20 Pf.

T. XIX, № 2. **Nyrén, M.** Bestimmung der Nutation der Erdachse. 1872. Pr. 55 K. = 1 Mk. 80 Pf.

№ 10. **Nyrén, M.** Die Polhöhe von Pulkowa. 1873. Pr. 35 K. = 1 Mk. 20 Pf.

T. XXIII, № 3. **Nyrén, M.** Das Aequinoctium für 1865,0, abgeleitet aus den am Passageninstrumente und am Verticalkreise in den Jahren 1861 — 70 in Pulkowa angestellten Sonnenbeobachtungen. 1876. Pr. 30 K. = 1 Mk.

T. XXVI, № 2. **Asten, E. v.** Untersuchungen über die Theorie des Encke'schen Cometen. II. Resultate aus den Erscheinungen 1819—1875. 1878. Pr. 1 R. = 3 Mk. 30 Pf.

№ 4. **Hasselberg, Dr. B.** Studien auf dem Gebiete der Absorbtionsspectralanalyse. Avec 4 pl. 1878. Pr. 1 R. = 3 Mk. 30 Pf.

T. XXVII, № 1. **Hasselberg, Dr. B.** Ueber das durch electrische Erregung erzeugte Leuchten der Gaze bei niedriger Temperatur. 1879. Pr. 25 K. = 80 Pf.

№ 11. **Struve, O.** Études sur le mouvement relatif des deux étoiles du système de 61 Cygni. 1880. Pr. 35 K. = 1 Mk. 20 Pf.

T. XXVIII, № 6. **Backlund, O.** Zur Theorie des Encke'schen Cometen. 1881 Pr. 70 K. = 2 Mk. 30 Pf.

T. XXX, № 4. **Lindemann, Ed.** Zur Beurtheilung der Veränderlichkeit rother Sterne. 1882. Pr. 15 K. = 50 Pf.

№ 7. **Hasselberg, Dr. B.** Untersuchungen über das zweite Spectrum des Wasserstoffs. Avec 1 pl. 1882. Pr. 30 K. = 1 Mk.

№ 8. **Struve, Hermann.** Ueber den Einfluss der Diffraction an Fernröhren auf Lichtscheiben. 1882. Pr. 90 K. = 3 Mk.

T. XXXI, № 1. **Struve, Hermann.** Zur Theorie der Talbot'schen Linien. 1883. Pr. 15 K. = 50 Pf.

№ 2. **Struve, Ludwig.** Resultate aus den in Pulkowa angestellten Vergleichungen von Procyon mit benachbarten Sternen. 1883. Pr. 45 K. = 1 Mk. 50 Pf.

№ 4. **Lindstedt, And.** Beitrag zur Integration der Differentialgleichungen der Störungstheorie. 1883. Pr. 20 K. = 70 Pf.

Imprimé par ordre de l'Académie Impériale des sciences. Octobre, 1883. C. Vessélofsky, Secrétaire perpétuel.

Imprimerie de l'Académie Impériale des sciences. (Vass.-Ostr., 9[e] ligne, № 12.)

MÉMOIRES
DE
L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES DE ST.-PÉTERSBOURG, VIIE SERIE.
TOME XXXI, № 10.

ÜBER DIE
WECHSELWIRKUNG ZWEIER MAGNETE
MIT
BERÜCKSICHTIGUNG IHRER QUERDIMENSIONEN

VON

O. Chwolson.

(*Lu le 24 mai 1883.*)

ST.-PÉTERSBOURG, 1883.
Commissionnaires de l'Académie Impériale des sciences:

à St.-Pétersbourg: MM Eggers & Cie et J. Glasounof;
à Riga: M. N. Kymmel;
à Leipzig: Voss' Sortiment (G. Haessel).

Prix: 30 Kop. = 1 Mrk.

MÉMOIRES
DE
L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES DE ST.-PÉTERSBOURG, VIIE SERIE.
Tome XXXI, № 10.

ÜBER DIE

WECHSELWIRKUNG ZWEIER MAGNETE

MIT

BERÜCKSICHTIGUNG IHRER QUERDIMENSIONEN

VON

O. Chwolson.

(*Lu le 24 mai 1883.*)

St.-PETERSBOURG, 1883.
Commissionnaires de l'Académie Impériale des sciences:

à St.-Pétersbourg:	à Riga:	à Leipzig:
MM. Eggers & Cie et J. Glasounof;	M. N. Kymmel;	Voss' Sortiment (G. Haessel).

Prix: 30 Kop. = 1 Mrk.

Imprimé par ordre de l'Académie Impériale des sciences.

Octobre 1888. C. Vessélofski, Secrétaire perpétuel.

Imprimerie de l'Académie Impériale des sciences.
(Vass.-Ostr., 9 ligne, № 12.)

Als erste Aufgabe, Cap. I, in dieser Arbeit habe ich mir gestellt, genaue Formeln für die Wechselwirkung zweier Magnete (zunächst ohne Berücksichtigung der Breite und Dicke derselben), hauptsächlich für die Grösse der Ablenkung des einen aus dem Meridian, zu entwickeln. Gewöhnlich werden bei den Ablenkungsbeobachtungen in den beiden Gauss-schen Hauptlagen Näherungsformeln benutzt, in denen das Quadrat und die vierte Potenz des Sinus des Ablenkungswinkels vernachlässigt werden. Die diese Potenzen enthaltenden Glieder sind aber nicht so klein, als dass eine solche Vernachlässigung gerechtfertigt wäre in den Fällen, wo das äusserste erreichbare Maass der Genauigkeit erzielt werden soll. Genaue Formeln hat Lamont angegeben, ohne den Gang der Entwickelung vollständig darzulegen; er giebt unter Anderem für die beiden Gauss'schen Hauptlagen die Glieder 2ter und 4ter Ordnung an. Es kam darauf an, diese Formeln zu verificiren und den Werth der höhern vernachlässigten Glieder zu bestimmen. Dem entsprechend habe ich (§ 1) zuerst einen allgemeinen Ausdruck für das Potential zweier Magnete (die Fluida vorläufig in je zwei Polen concentrirt gedacht) auf einander entwickelt und zwar bis zu den Gliedern 4ter Ordnung. Hieraus werden sofort (§ 2) die Lamont'schen Formeln für die beiden Hauptlagen erhalten, wobei es sich herausstellt, dass die eine einer Correction bedarf. Für die erste Hauptlage habe ich sodann auf directem Wege eine allgemeine Formel entwickelt (§ 3), welche beliebig viel Glieder niederzuschreiben gestattet. Das so erhaltene Glied 6ter Ordnung erwies sich, bei Einsetzung entsprechender Zahlengrössen, als unbedingt zu vernachlässigen.

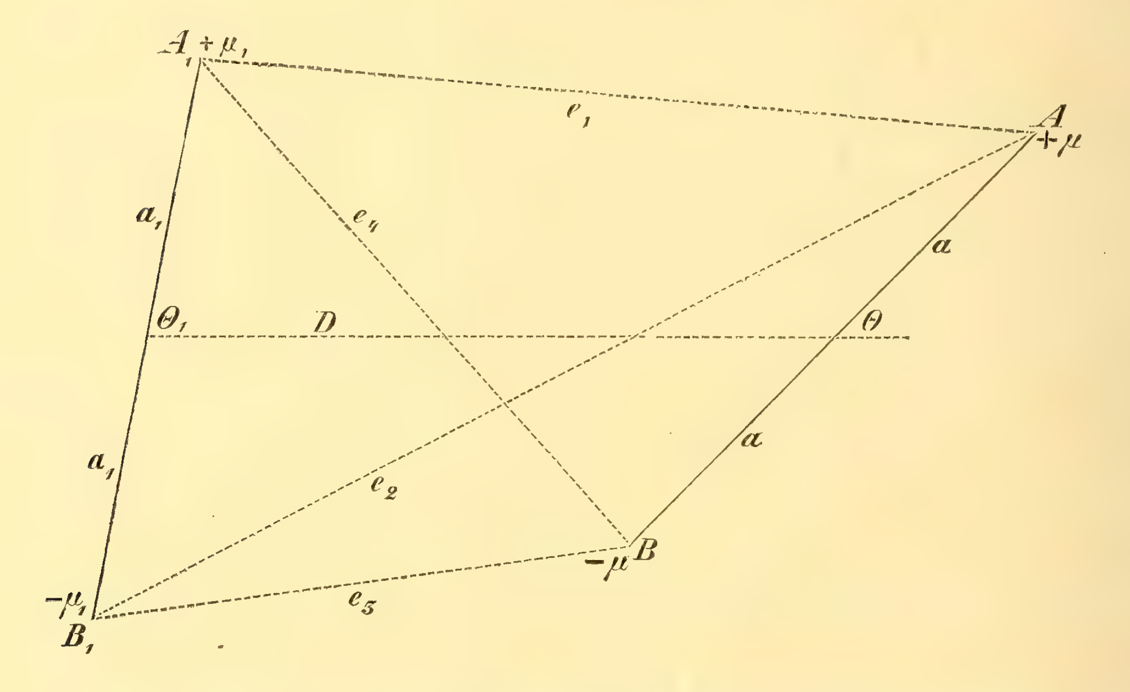
Die zweite Aufgabe, Cap. II, war, den Einfluss von Breite und Dicke der Magnete auf die Ablenkungsformeln zu entwickeln; dieselbe scheint bisher nicht in Angriff genommen zu sein. Es erweist sich, dass dieser Einfluss durch das Auftreten eines neuen selbstständigen Gliedes dargestellt wird, dessen Form ich für eine beliebige Lage der Magnete entwickelt habe (§ 4, 5, 6, 7). Für die beiden Hauptlagen werden hieraus Formeln erhalten (§ 8), welche zeigen, dass dieses Glied durchaus nicht zu vernachlässigen ist. — Eine für die erste Hauptlage besonders durchgeführte Rechnung zeigte dagegen, dass das darauf folgende zweite Correctionsglied unbedingt zu vernachlässigen ist.

Capitel I.

§ 1.

Es seien AB und A_1B_1 die beiden in derselben Horizontalebene gelegenen Magnete; $2a$ und $2a_1$ die Poldistanzen derselben. Im Weiteren soll stets der erste $(2a)$ der abgelenkte, der zweite $(2a_1)$ der ablenkende Magnet sein.

Fig. 1.



μ und μ_1 seien die in den Polen concentrirten magnetischen Massen; $m_1 = 2a_1\mu_1$ und $m = 2a\mu$ seien die magnetischen Momente; θ und θ_1 die Winkel zwischen den Axen der Magnete und der Centrallinie der letzteren (Fig. 1); endlich sei $AA_1 = e_1$, $AB_1 = e_2$, $BB_1 = e_3$ und $A_1B = e_4$. Dann ist das Potential V der beiden Magnete aufeinander:

$$V = \mu\mu_1 \left\{\frac{1}{e_1} - \frac{1}{e_2} + \frac{1}{e_3} - \frac{1}{e_4}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Nun ist

$$\frac{1}{e_1} = \frac{1}{\sqrt{(D - a_1\cos\theta_1 + a\cos\theta)^2 + (a_1\sin\theta_1 - a\sin\theta)^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{D^2 + a^2 + a_1^2 + 2D(-a_1\cos\theta_1 + a\cos\theta) - 2aa_1\cos(\theta - \theta_1)}} =$$

$$= \frac{1}{D}\left\{1 + \frac{2D(-a_1\cos\theta_1 + a\cos\theta) + a_1^2 + a^2 - 2aa_1\cos(\theta - \theta_1)}{D^2}\right\}^{-\frac{1}{2}}.$$

Setzen wir

$$\left.\begin{array}{l|l} M_1 = -a_1 \cos\theta_1 + a\cos\theta & N_1^2 = a_1^2 + a^2 - 2a_1 a \cos(\theta - \theta_1) \\ M_2 = a_1 \cos\theta_1 + a\cos\theta & N_2^2 = a_1^2 + a^2 + 2a_1 a \cos(\theta - \theta_1) \\ M_3 = -M_1 & N_3^2 = N_1^2 \\ M_4 = -M_2 & N_4^2 = N_2^2 \end{array}\right\} \dots (2)$$

so wird

$$\frac{1}{e_1} = \frac{1}{D}\left\{1 + \frac{2DM_1 + N_1^2}{D^2}\right\}^{-\frac{1}{2}} \dots\dots (3)$$

Für $\frac{1}{e_2}$, $\frac{1}{e_3}$ und $\frac{1}{e_4}$ erhält man entsprechende Ausdrücke, wenn man M_1 und N_1 durch M_2 und N_2 u. s. w. aus (2) ersetzt.

Wünscht man in dem Ausdruck von V die ersten zwei Correctionsglieder zu erhalten, so hat man in (3) sieben Glieder zu entwickeln, d. h.

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{e_1} = \frac{1}{D}\left\{1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{2DM_1 + N_1^2}{D^2} + \frac{1.3}{2.4}\frac{(2DM_1+N_1^2)^2}{D^4} - \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{(2DM_1+N_1^2)^3}{D^6} + \right. \\ \left. + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\frac{(2DM_1+N_1^2)^4}{D^8} - \frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10}\frac{(2DM_1+N_1^2)^5}{D^{10}} + \frac{1.3.5.7.9.11}{2.4.6.8.10.12}\frac{(2DM_1+N_1^2)^6}{D^{12}}\right\} \end{array}\right\} (3, a)$$

zu setzen. Wir öffnen die Klammern, vernachlässigen alle Glieder, welche vorläufig im Nenner eine höhere Potenz als D^6 geben (D^2 wird später herausgenommen) und bilden die Combination (1). Hierbei fallen alle ungeraden Potenzen von den M weg, da z. B.

$$M_1 - M_2 + M_3 - M_4 = 0$$

ist. So erhalten wir vorerst

$$V = \frac{\mu\mu_1}{D}\left\{-\frac{1}{2}\cdot\frac{2N_1^2 - 2N_2^2}{D^2} + \frac{3}{8}\cdot\frac{8D^2M_1^2 - 8D^2M_2^2 + 2N_1^4 - 2N_2^4}{D^4} - \right.$$

$$- \frac{5}{16}\cdot\frac{24D^2M_1^2N_1^2 - 24D^2M_2^2N_2^2 + 2N_1^6 - 2N_2^6}{D^6} + \frac{35}{128}\frac{32D^4M_1^4 - 32D^4M_2^4 + 48D^2M_1^2N_1^4 - 48D^2M_2^2N_2^4}{D^8} -$$

$$\left. - \frac{63}{256}\cdot\frac{160D^4M_1^4N_1^2 - 160D^4M_2^4N_2^2}{D^{10}} + \frac{693}{256.12}\cdot\frac{128D^6M_1^6 - 128D^6M_2^6}{D^{12}}\right\}.$$

Nach erfolgter Kürzung und Vereinigung der Glieder gleicher Ordnung erhalten wir

$$V = -\frac{\mu\mu_1}{D^3}\left\{(N_1^2 - N_2^2) - 3(M_1^2 - M_2^2) - \frac{1}{4}\cdot\frac{3(N_1^4 - N_2^4) - 30(M_1^2N_1^2 - M_2^2N_2^2) + 35(M_1^4 - M_2^4)}{D^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{8}\cdot\frac{5(N_1^6 - N_2^6) - 105(M_1^2N_1^4 - M_2^2N_2^4) + 315(M_1^4N_1^2 - M_2^4N_2^2) - 231(M_1^6 - M_2^6)}{D^4}\right\}.$$

Mit Hülfe von (2) kann man die hier vorkommenden Combinationen bilden:

$$N_1^2 - N_2^2 = -4aa_1\cos(\theta - \theta_1)$$
$$M_1^2 - M_2^2 = -4aa_1\cos\theta\cos\theta_1$$
$$N_1^4 - N_2^4 = -8aa_1(a^2 + a_1^2)\cos(\theta - \theta_1)$$
$$M_1^4 - M_2^4 = -8aa_1\cos\theta\cos\theta_1(a_1^2\cos^2\theta_1 + a^2\cos^2\theta)$$
$$N_1^6 - N_2^6 = -12(a^2 + a_1^2)aa_1\cos(\theta - \theta_1) - 16a^3a_1^3\cos^3(\theta - \theta_1)$$
$$M_1^6 - M_2^6 = -12a_1^5 a\cos^5\theta_1\cos\theta - 40a^3a_1^3\cos^3\theta_1\cos^3\theta - 12a_1a^5\cos\theta_1\cos^5\theta$$
$$M_1^2N_1^2 - M_2^2N_2^2 = -4aa_1(a^2 + a_1^2)\cos\theta\cos\theta_1 - 4aa_1\cos(\theta - \theta_1)(a_1^2\cos^2\theta_1 + a^2\cos^2\theta)$$
$$M_1^2N_1^4 - M_2^2N_2^4 = -4aa_1\cos\theta\cos\theta_1[(a^2 + a_1^2)^2 + 4aa_1^2\cos^2(\theta - \theta_1)] - $$
$$- 8aa_1(a^2 + a_1^2)\cos(\theta - \theta_1)(a_1^2\cos^2\theta_1 + a^2\cos^2\theta)$$
$$M_1^4N_1^2 - M_2^4N_2^2 = -8aa_1(a^2 + a_1^2)\cos\theta\cos\theta_1(a_1^2\cos^2\theta_1 + a^2\cos^2\theta) - $$
$$- 4aa_1\cos(\theta - \theta_1)(a_1^4\cos^4\theta_1 + 6a^2a_1^2\cos^2\theta\cos^2\theta_1 + a^4\cos^4\theta).$$

Alle diese Ausdrücke setzen wir in die vorhergehende Formel und erhalten endgültig, wenn wir noch $4aa_1$ herausnehmen

$$V = -\frac{mm_1}{D^3}\left\{k_0 + \frac{k_2}{D^2} + \frac{k_4}{D^4}\right\} \quad \text{(4, a)}$$

$$\left.\begin{aligned}
k_0 &= 2\cos\theta\cos\theta_1 - \sin\theta\sin\theta_1. \\
k_2 &= -\tfrac{3}{2}(a^2 + a_1^2)(4\cos\theta\cos\theta_1 - \sin\theta\sin\theta_1) + \\
&\quad + \tfrac{5}{2}(a_1^2\cos^2\theta_1 + a^2\cos^2\theta)(4\cos\theta\cos\theta_1 - 3\sin\theta\sin\theta_1). \\
k_4 &= \tfrac{15}{8}(a^2 + a_1^2)^2(6\cos\theta\cos\theta_1 - \sin\theta\sin\theta_1) + \\
&\quad + \tfrac{5}{2}a^2a_1^2\cos^2(\theta - \theta_1)(20\cos\theta\cos\theta_1 - \sin\theta\sin\theta_1) - \\
&\quad - \tfrac{105}{4}(a^2 + a_1^2)(a_1^2\cos^2\theta_1 + a^2\cos^2\theta)(2\cos\theta\cos\theta_1 - \sin\theta\sin\theta_1) + \\
&\quad + \tfrac{105}{4}a^2a_1^2\cos^2\theta\cos^2\theta_1(2\cos\theta\cos\theta_1 - 9\sin\theta\sin\theta_1) + \\
&\quad + \tfrac{63}{8}(a_1^4\cos^4\theta_1 + a^4\cos^4\theta)(6\cos\theta\cos\theta_1 - 5\sin\theta\sin\theta_1).
\end{aligned}\right\} \text{(4, b)}$$

Dies ist der gesuchte Ausdruck des Potentials der beiden Magnete aufeinander. $\frac{dV}{d\theta}$ und $\frac{dV}{d\theta_1}$ sind die Drehungsmomente, welche die Magnete aufeinander ausüben.

§ 2.

Für die erste Hauptlage ist $\theta_1 = 0$ und $\theta = 90° - \varphi$, wenn φ der kleine Winkel ist, um welchen der Magnet AB aus dem magnetischen Meridian abgelenkt worden ist. Diese Werthe für θ_1 und θ ergeben aus (4, b), wenn man

$$V = -\frac{2mm_1}{D^3}\left\{k_0' + \frac{k_2'}{D^2} + \frac{k_4'}{D^4}\right\} \quad \ldots \quad (5, a)$$

setzt,

$$\left.\begin{aligned} k_0' &= \sin\varphi \\ k_2' &= 2a_1^2 \sin\varphi - a^2 \sin\varphi (3 - 5\sin^2\varphi) \\ k_4' &= 3a_1^4 \sin\varphi + 25a^2a_1^2 (\sin^3\varphi - \tfrac{3}{5}\sin\varphi) + \tfrac{189}{8} a^4 (\sin^5\varphi - \tfrac{10}{9}\sin^3\varphi + \tfrac{5}{21}\sin\varphi). \end{aligned}\right\} \quad (5, b)$$

Die Gleichgewichtsbedingung ist in diesem Falle

$$\frac{dV}{d\theta} = -\frac{dV}{d\varphi} = mH\sin\varphi, \quad \ldots \quad (6)$$

wo H die horizontale Componente des Erdmagnetismus.

Nach Ausführung der Differentiation und unbedeutender Umstellung der Glieder erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{2mm_1 \cos\varphi}{D^3}\left\{1 + \frac{p_2}{D^2} + \frac{p_4}{D^4}\right\} = mH\sin\varphi \\ &p_2 = 2a_1^2 - 3a^2 + 15a^2\sin^2\varphi \\ &p_4 = 3a_1^4 - 15a^2a_1^2 (1 - 5\sin^2\varphi) + \tfrac{45}{8} a^4 (1 - 14\sin^2\varphi + 21\sin^4\varphi). \end{aligned}\right\} \quad \ldots (7)$$

Dieser Ausdruck ist völlig identisch mit dem von Lamont, Handbuch des Erdmagnetismus, p. 28, Formel (2), angegebenen.

Für die zweite Hauptlage ist $\theta_1 = 90°$ und $\theta = -\varphi$, wo φ wiederum der Ablenkungswinkel ist (es ist zu beachten, dass θ in diesem Falle negativ wird, vergl. Fig. 1). Diese Werthe ergeben aus (4, b), wenn man

$$V = -\frac{mm_1}{D^3}\left\{k_0'' + \frac{k_2''}{D^2} + \frac{k_4''}{D^4}\right\} \quad \ldots (8, a)$$

setzt:

$$\left.\begin{aligned} k_0'' &= \sin\varphi \\ k_2'' &= 6a^2\sin\varphi - \tfrac{3}{2}a_1^2\sin\varphi - \tfrac{15}{2}a^2\sin^3\varphi \\ k_4'' &= \tfrac{15}{8}(a^2 + a_1^2)^2\sin\varphi + \tfrac{5}{2}a^2a_1^2\sin^3\varphi - \tfrac{105}{4}(a^2 + a_1^2)a^2\cos^2\varphi\sin\varphi + \tfrac{315}{8}a^4\cos^4\varphi\sin\varphi = \\ &= \tfrac{15}{8}a_1^4\sin\varphi + \tfrac{5}{4}a^2a_1^2(3\sin\varphi + 2\sin^3\varphi - 21\cos^2\varphi\sin\varphi) + \\ &+ \tfrac{15}{8}a^4(\sin\varphi - 14\cos^2\varphi\sin\varphi + 21\cos^4\varphi\sin\varphi) = \\ &= \tfrac{15}{8}a_1^4\sin\varphi - \tfrac{5}{4}a^2a_1^2(18\sin\varphi - 23\sin^3\varphi) + a^4(15\sin\varphi - \tfrac{105}{2}\sin^3\varphi + \tfrac{315}{8}\sin^5\varphi). \end{aligned}\right\} \quad (8, b)$$

Formel (6) giebt nach Ausführung der Differentiation

$$\left.\begin{aligned} &\frac{mm_1 \cos\varphi}{D^3}\left\{1 + \frac{r_2}{D^2} + \frac{r_4}{D^4}\right\} = Hm \sin\varphi \\ &r_2 = 6a^2 - \tfrac{3}{2}a_1^2 - \tfrac{45}{2}a^2 \sin^2\varphi. \\ &r_4 = \tfrac{15}{8}a_1^4 - \tfrac{15}{4}a^2 a_1^2 (6 - 23\sin^2\varphi) + 15a^4 (1 - \tfrac{21}{2}\sin^2\varphi + \tfrac{105}{8}\sin^4\varphi). \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (9)$$

Dieser Ausdruck stimmt nicht völlig mit dem von Lamont, a. a. O. p. 29 Formel (4), überein. In der letzten Klammer bei a^4 steht bei Lamont

$$15 - \tfrac{315}{4}\sin^2\varphi - \tfrac{315}{8}\sin^4\varphi = 15(1 - \tfrac{21}{4}\sin^2\varphi - \tfrac{21}{8}\sin^4\varphi).$$

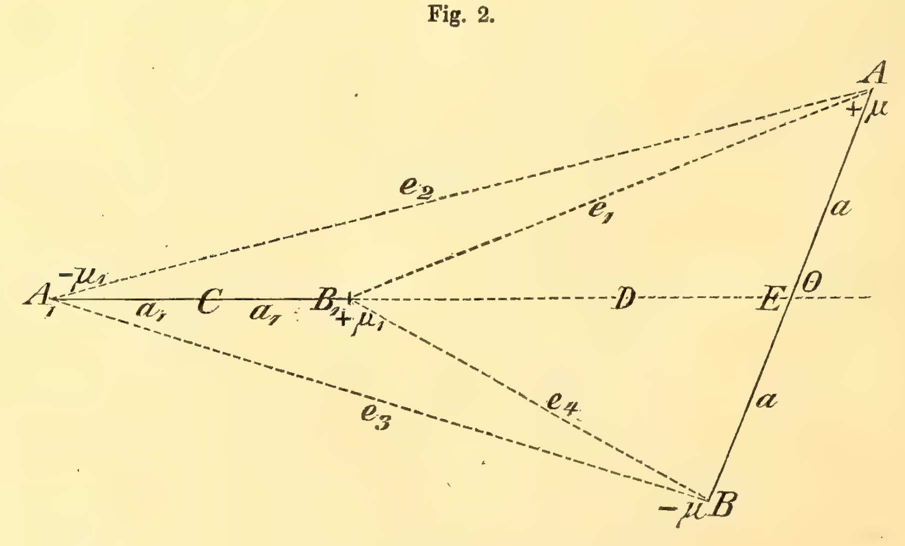
Dieser Ausdruck ist entsprechend (9) zu verificiren.

Eine auf anderem Wege speciell für die zweite Hauptlage durchgeführte Rechnung ergab identisch die Formeln (9).

§ 3.

Da die in (7) und (9) gegebenen Correctionen im Allgemeinen durchaus nicht zu vernachlässigen sind, so entstand die Aufgabe, wenigstens für eine der beiden Hauptlagen auch noch das nächste Correctionsglied auszurechnen, um wenigstens einen Begriff von der Grösse dieses Gliedes zu erhalten. Es zeigte sich, dass für die erste Hauptlage eine Formel aufgestellt werden kann, nach welcher sich ohne Weiteres beliebig viele Glieder niederschreiben lassen. Es sei (Fig. 2) AB der abgelenkte, A_1B_1 der ablenkende Magnet.

Fig. 2.



$AB_1 = e_1$, $AA_1 = e_2$, $A_1B = e_3$ und $BB_1 = e_4$; endlich $CE = D$. Dann ist das Potential der vier Pole aufeinander, wie in (1):

$$V = \mu\mu_1 \left\{\frac{1}{e_1} - \frac{1}{e_2} + \frac{1}{e_3} - \frac{1}{e_4}\right\} \dots\dots\dots\dots (10)$$

Nun ist

$$\frac{1}{e_1} = \frac{1}{\sqrt{(D-a_1)^2 + a^2 + 2a(D-a_1)\cos\theta}} = \frac{1}{(D-a_1)\sqrt{1 + 2\frac{a}{D-a_1}\cos\theta + \left(\frac{a}{D-a_1}\right)^2}} =$$

$$= \frac{1}{D-a_1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{D-a_1}\right)^n P^n(-\cos\theta).$$

Hier bedeutet allgemein $P^n(x)$ die n^{te} Kugelfunction, definirt durch die Identität

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2}} = \sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n P^n(x)$$

und

$$P^n(x) = \frac{1.3.5\dots(2n-1)}{1.2.3\dots\dots n}\left(x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4.(2n-1)(2n-3)}x^{n-4} - \dots\right),$$

also

$$\left.\begin{array}{l} P^1(x) = x;\quad P^3(x) = \frac{5}{2}(x^3 - \frac{3}{5}x); \\ P^5(x) = \frac{63}{8}(x^5 - \frac{10}{9}x^3 + \frac{5}{21}x);\quad P^7(x) = \frac{429}{16}(x^7 - \frac{21}{13}x^5 + \frac{105}{143}x^3 - \frac{35}{429}x). \end{array}\right\} \dots (11)$$

Es ist ferner

$$P^{2n}(-x) = P^{2n}(x);\quad P^{2n+1}(-x) = -P^{2n+1}(x) \dots\dots\dots\dots (12)$$

Aehnlich ist

$$\frac{1}{e^4} = \frac{1}{\sqrt{(D-a_1)^2 - 2a(D-a_1)\cos\theta + a^2}} = \frac{1}{D-a_1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{D-a_1}\right)^n P^n(\cos\theta).$$

(12) giebt nun

$$\frac{1}{e_1} - \frac{1}{e_4} = -\frac{1}{D-a_1}\left\{\frac{a}{D-a_1}P^1(\cos\theta) + \left(\frac{a}{D-a_1}\right)^3 P^3(\cos\theta) + \dots\right\}.$$

Ebenso ist

$$\frac{1}{e_3} - \frac{1}{e_2} = \frac{1}{D+a_1}\left\{\frac{a}{D+a_1}P^1(\cos\theta) + \left(\frac{a}{D+a_1}\right)^3 P^3(\cos\theta) + \dots\right\},$$

Dies in (10) eingesetzt, giebt

$$V_1 = -2\mu\mu\ \left\{a\left(\frac{1}{(D-a_1)^2} - \frac{1}{(D+a_1)^2}\right)P^1(\cos\theta) + a^3\left(\frac{1}{(D-a_1)^4} - \frac{1}{(D+a_1)^4}\right)P^3(\cos\theta) + \dots\right\}$$

oder

$$V = -2\mu\mu_1 \sum_{n=0}^{\infty} a^{2n+1} \left(\frac{1}{(D-a_1)^{2n+2}} - \frac{1}{(D+a_1)^{2n+2}} \right) P^{2n+1}(\cos\theta) =$$

$$= -2\mu\mu_1 a \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{2n}}{D^{2n+2}} \left\{ \left(1 - \frac{a_1}{D}\right)^{-(2n+2)} - \left(1 + \frac{a_1}{D}\right)^{-(2n+2)} \right\} P^{2n+1}(\cos\theta) =$$

$$= -mm_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{2n}}{2a_1 D^{2n+2}} \left\{ \begin{array}{l} 1 + (2n+2)\frac{a_1}{D} + \frac{(2n+2)(2n+3)}{1.2}\frac{a_1^2}{D^2} + \frac{(2n+2)(2n+3)(2n+4)}{1.2.3}\frac{a_1^3}{D^3} + \dots \\ -1 + (2n+2)\frac{a_1}{D} - \frac{(2n+2)(2n+3)}{1.2}\frac{a_1^2}{D^2} - \frac{(2n+2)(2n+3)(2n+4)}{1.2.3}\frac{a_1^3}{D^3} + \dots \end{array} \right\} \cdot$$

$$\cdot P^{2n+1}(\cos\theta) =$$

$$= -\frac{2mm_1}{D^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{2n}}{D^{2n}} (n+1) \left\{ 1 + \frac{(2n+3)(2n+4)}{1.2.3}\frac{a_1^2}{D^2} + \frac{(2n+3)(2n+4)(2n+5)(2n+6)}{1.2.3.4.5}\frac{a^4}{D^4} + \dots \right\} P^{2n+1}(\cos\theta).$$

Wir denken uns nun die jedem n entsprechende Reihe niedergeschrieben und sammeln aus allen diesen Reihen diejenigen Glieder, welche eine gleiche Potenz $2k$ von D im Nenner enthalten. Es wird dies für $n = k$ das erste Glied der Reihe sein, für $n = k - 1$ das zweite, für $n = k - 2$ das dritte u. s. w., endlich für $n = 0$ das $(k+1)$te. So erhalten wir den neuen Ausdruck für V, nach fallenden Potenzen von D geordnet:

$$V = -\frac{2mm_1}{D^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{D^{2k}} \left\{ \begin{array}{l} (k+1) a^{2k} P^{2k+1}(\cos\theta) + k a^{2k-2} a_1^2 \cdot \frac{(2k+1)(2k+2)}{1.2.3} P^{2k-1}(\cos\theta) + \\ + (k-1) a^{2k-4} a_1^4 \frac{(2k-1) \,.\, 2k \,.\, (2k+1)(2k+2)}{1.2.3.4.5} P^{2k-3}(\cos\theta) + \\ + (k-2) a^{2k-6} a_1^6 \frac{(2k-3)(2k-2)(2k-1)\, 2k\, (2k+1)(2k+2)}{1.2.3.4.5.6.7} P^{2k-5}(\cos\theta) + \\ + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array} \right.$$

oder

$$V = -\frac{2mm_1}{D^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{D^{2k}} \sum_{i=0}^{i=k} (k-i+1) a^{2k-2i} a_1^{2i} \cdot \frac{(2k-2i+3)(2k-2i+4)\dots(2k+2)}{1.2.3.4\dots(2i+1)} P^{2k-2i+1}(\cos\theta).$$

Bezeichnen wir, wie üblich, durch $(p)_q$ den $(q+1)$ten Binomialcoefficienten der Potenz p, d. h. $\frac{p(p-1)(p-2)\dots(p-q+1)}{1.2.3\dots q}$, so können wir schreiben,

$$V = -\frac{2mm_1}{D^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{D^{2k}} \sum_{i=0}^{i=k} \frac{a^{2k-2i} a_1^{2i}}{2} (2k+2)_{2i+1} P^{2k-2i+1}(\cos\theta).$$

Wir transformiren diesen Ausdruck, indem wir $2k - 2i = 2p$ setzen, damit in der zweiten Summe die P nicht, wie hier, nach fallenden, sondern nach steigenden Ordnungen auf einander folgen. So erhalten wir endgültig

$$V = -\frac{2mm_1}{D^3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{D^{2k}}\sum_{p=0}^{p=k}\frac{a_1^{2k-2p}a^{2p}}{2}(2k+2)_{2k-2p+1}P^{2p+1}(\cos\theta) \ldots\ldots (13)$$

Bilden wir $\frac{dV}{d\theta}$ und setzen dann $\theta = 90° - \varphi$, wo φ, wie früher, der Ablenkungswinkel, so erhalten wir:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{2mm_1\cos\varphi}{D^3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{D^{2k}}\sum_{p=0}^{k}\frac{a_1^{2k-2p}a^{2p}}{2}(2k+2)_{2k-2p+1}\cdot\frac{1.3.5\ldots(4p+1)}{1.2.3\ldots 2p}Q^{2p}(\sin\varphi) = MH\sin\varphi \\ Q^{2p}(\sin\varphi) = \sin^{2p}\varphi - \frac{2p(2p-1)}{2.(4p+1)}\sin^{2p-2}\varphi + \frac{2p(2p-1)(2p-2)(2p-3)}{2.4.(4p+1)(4p-1)}\sin^{2p-4}\varphi - \ldots\end{array}\right\}(14)$$

Diese Formel enthält die Lösung der Aufgabe. Begnügen wir uns mit den Gliedern bis $k = 3$, so erhalten wir, entsprechend (7):

$$\left.\begin{array}{l}\frac{2mm_1\cos\varphi}{D^3}\left\{1 + \frac{p_2}{D^2} + \frac{p_4}{D^4} + \frac{p_6}{D^6}\right\} = MH\sin\varphi \\ p_2 = 2a_1^2 - 3a^2 + 15a^2\sin^2\varphi \\ p_4 = 3a_1^4 - 15a^2a_1^2(1 - 5\sin^2\varphi) + \frac{45}{8}a^4(1 - 14\sin^2\varphi + 21\sin^4\varphi) \\ p_6 = 4a_1^6 - 42a_1^4a^2(1 - 5\sin^2\varphi) + \frac{105}{2}a_1^2a^4(1 - 14\sin^2\varphi + 21\sin^4\varphi) - \\ - \frac{35}{4}a^6(1 - 27\sin^2\varphi + 99\sin^4\varphi - \frac{429}{5}\sin^6\varphi).\end{array}\right\} \ldots (15)$$

Die ersten zwei Grössen p_2 und p_4 sind identisch mit (7). Das vierte Glied $\frac{p_6}{D^6}$ erweist sich bei Einführung entsprechender Zahlengrössen als so klein, dass seine Vernachlässigung wohl ohne Zweifel in allen vorkommenden Fällen statthaft sein dürfte.

Capitel II.

§ 4.

Bei allen obigen Entwickelungen ist vorausgesetzt worden, dass jeder der beiden Magnete als aus zwei Polpunkten bestehend zu betrachten ist, die in einem gegebenen Abstande ($2a$ und $2a_1$) von einander sich befinden. Mit anderen Worten, es sind nur die Längendimensionen der Magnete in Betracht gezogen worden. Es entstand nun die Aufgabe wenigstens ungefähr zu bestimmen, welchen Einfluss die Breite und Dicke der Magnete auf die Bedingungen ihres Gleichgewichts ausüben?

Wir denken uns im Centrum jedes der beiden Magnete den Anfang eines Coordinatensystemes gelegt und zwar x, y, z für den abgelenkten Magnet, x_1, y_1, z_1 für den ablenkenden; die Axen x und x_1 mögen mit den Axen der Magnete zusammenfallen, die Ebenen xy und x_1y_1 horizontal sein. Ferner setzen wir voraus, dass für jeden Magnet die Coordinatenebenen Symmetrieebenen seien. Dann giebt es in jedem Magnet immer je 8 Punkte, deren Coordinaten sich nur durch die Vorzeichen von einander unterscheiden und die gegen Centrum, Axe und Symmetrieebenen symmetrisch gelegen sind. Je 8 Punkte des einen Magneten (definirt durch die Zahlen x, y und z) und 8 Punkte des anderen (definirt durch die Zahlen x_1, y_1 und z_1) üben auf einander 64 Kräfte aus und ergeben in dem Ausdruck des Potentiales V der beiden Magnete auf einander 64 Glieder (definirt also durch die 6 Grössen x, y, z, x_1, y_1 und z_1). Bezeichnen wir diesen Theil des Potentiales durch W, so ist

$$V = \Sigma W, \qquad \text{(16)}$$

wo die Summation über je $\frac{1}{8}$ der beiden Magnete, d. h. über alle positiven Werthe der 6 Grössen x, y, z, x_1, y_1 und z_1 auszudehnen ist.

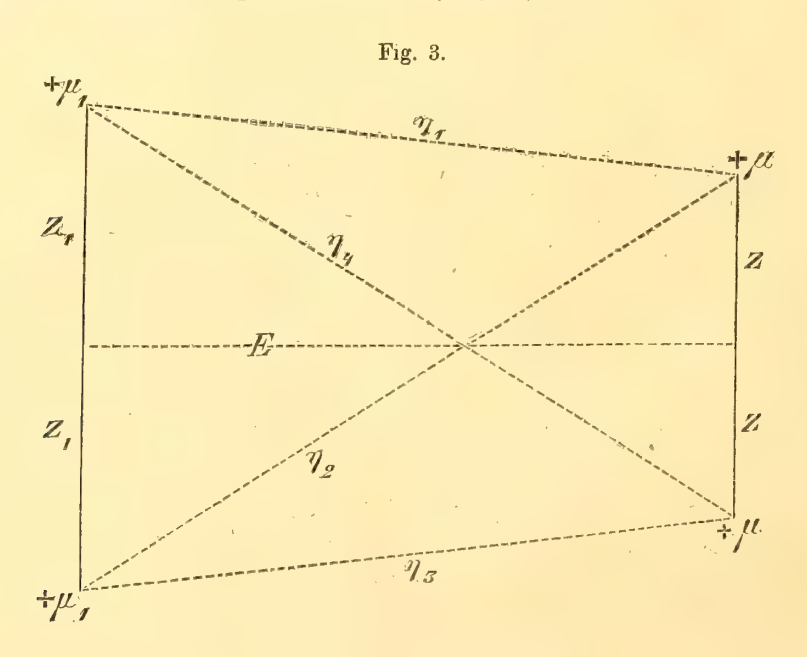
Wir wollen nun vorerst W berechnen, d. h. also das Potential von 8 symmetrisch gelegenen Punkten des einen Magneten auf 8 symmetrisch gelegene Punkte des andern.

Je zwei von diesen Punkten, die vertical unter einander liegen, deren Coordinaten sich also nur durch die Vorzeichen von z (resp. z_1) unterscheiden, wollen wir einen Doppelpunkt nennen.

Je vier von diesen Punkten, die gleiche x (resp. x_1) haben, wollen wir zusammen einen vierpunktigen Pol nennen.

Wir berechnen zuerst das Potential v eines Doppelpunktes $(z, -z)$ auf den andern $(z_1, -z_1)$, wenn ihre Entfernung E ist. Es ist (Fig. 3):

Fig. 3.



$$v = \mu\mu_1 \left\{\frac{1}{\eta_1} + \frac{1}{\eta_2} + \frac{1}{\eta_3} + \frac{1}{\eta_4}\right\} = 2\mu\mu_1 \left\{\frac{1}{\eta_2} + \frac{1}{\eta_1}\right\} =$$

$$= 2\mu\mu_1 \left\{\frac{1}{\sqrt{E^2 + (z_1 - z)^2}} + \frac{1}{\sqrt{E^2 + (z_1 + z)^2}}\right\} = \frac{2\mu\mu_1}{E} \left\{\left(1 + \left(\frac{z_1 - z}{E}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} + \left(1 + \left(\frac{z_1 + z}{E}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right\} =$$

$$= \frac{2\mu\mu_1}{E} \left\{1 - \frac{1}{2}\left(\frac{z_1 - z}{E}\right)^2 + 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{z_1 + z}{E}\right)^2\right\}.$$

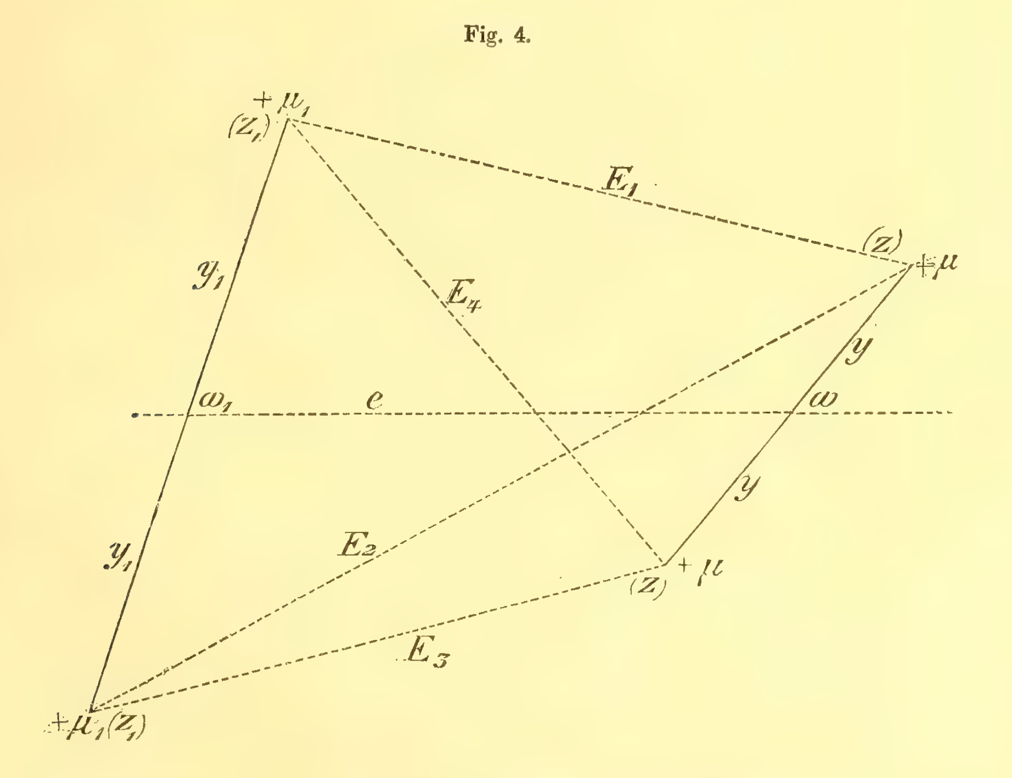
Oder endlich

$$v = \frac{4\mu\mu_1}{E}\left\{1 - \frac{1}{2}\,\frac{z_1^2 + z^2}{E^2}\right\}. \qquad (17)$$

§ 5.

Wir wollen nun das Potential w eines vierpunktigen Poles (y, z) auf den anderen (y_1, z_1) ausrechnen, wenn ihre Centra im Abstande e von einander befindlich sind. Es sei in Fig. 4 die horizontale Projection der beiden vierpunktigen Pole dargestellt. Jeder der

Fig. 4.



vier Punkte μ und μ_1 ist also als Doppelpunkt anzusehen und zwar ist für beide μ die Entfernung (senkrecht zur Ebene der Zeichnung) gleich $2z$, für die beiden μ_1 gleich $2z_1$. Dann besteht w offenbar aus vier Gliedern von der Form (17) und es ist also

$$w = 4\mu\mu_1 \left\{\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} + \frac{1}{E_3} + \frac{1}{E_4} - \frac{1}{2}(z^2 + z_1^2)\left(\frac{1}{E_1^3} + \frac{1}{E_2^3} + \frac{1}{E_3^3} + \frac{1}{E_4^3}\right)\right\} \ldots (18)$$

Nun ist

$$\frac{1}{E_1} = \frac{1}{\sqrt{(e - y_1 \cos\omega_1 + y\cos\omega)^2 + (y_1 \sin\omega_1 - y\sin\omega)^2}} = \frac{1}{\sqrt{e^2 + y_1^2 + y^2 + 2e(y\cos\omega - y_1\cos\omega_1) - 2yy_1\cos(\omega - \omega_1)}} =$$

$$= \frac{1}{e}\left\{1 + \frac{2e(y\cos\omega - y_1\cos\omega_1) + y^2 - 2yy_1\cos(\omega - \omega_1) + y_1^2}{e^2}\right\}^{-\frac{1}{2}}.$$

Setzen wir

$$m_1 = 2e(y\cos\omega - y_1\cos\omega_1) \qquad n_1^2 = y^2 - 2yy_1\cos(\omega - \omega_1) + y_1^2$$

$$m_2 = 2e(-y\cos\omega - y_1\cos\omega_1) \qquad n_2^2 = y^2 + 2yy_1\cos(\omega - \omega_1) + y_1^2$$

$$m_3 = -m_2 \qquad n_3^2 = n_2^2$$

$$m_4 = -m_1 \qquad n_4^2 = n_1^2.$$

Dann ist

$$\frac{1}{E_1} = \frac{1}{e}\left\{1 + \frac{m_1 + n_1^2}{e^2}\right\}^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{e}\left\{1 - \frac{1}{2}\frac{m_1 + n_1^2}{e^2} + \frac{1.3}{2.4}\frac{m_1^2 + 2m_1 n_1^2}{e^4} - \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{m_1^3}{e^6}\right\}.$$

Da nun

$$\Sigma m = 0;\ \Sigma n^2 = 4(y^2 + y_1^2);\ \Sigma m^2 = 16e^2(y^2\cos^2\omega + y_1^2\cos^2\omega_1);\ \Sigma mn^2 = 0;\ \Sigma m^3 = 0,$$

erhalten wir

$$\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} + \frac{1}{E_3} + \frac{1}{E_4} = \left\{4 - \frac{1}{2}\cdot\frac{4(y^2 + y_1^2)}{e^2} + \frac{3}{8}\cdot\frac{16e^2(y^2\cos^2\omega + y_1^2\cos^2\omega_1)}{e^4}\right\}.$$

Ferner ist, mit demselben Grade der Annäherung:

$$\frac{1}{E_1^3} = \frac{1}{e^3}\left\{1 - \frac{3}{2}\frac{m}{e^2}\right\};\ \text{also}\ \frac{1}{E_1^3} + \frac{1}{E_2^3} + \frac{1}{E_3^3} + \frac{1}{E_4^3} = \frac{4}{e^3}.$$

Nun erhalten wir aus (18) endgültig

$$w = \frac{16\mu\mu_1}{e}\left\{1 - \frac{1}{2}\frac{y^2 + y_1^2 + z^2 + z_1^2 - 3y^2\cos^2\omega - 3y_1^2\cos^2\omega_1}{e^2}\right\} \ldots\ldots\ldots (19)$$

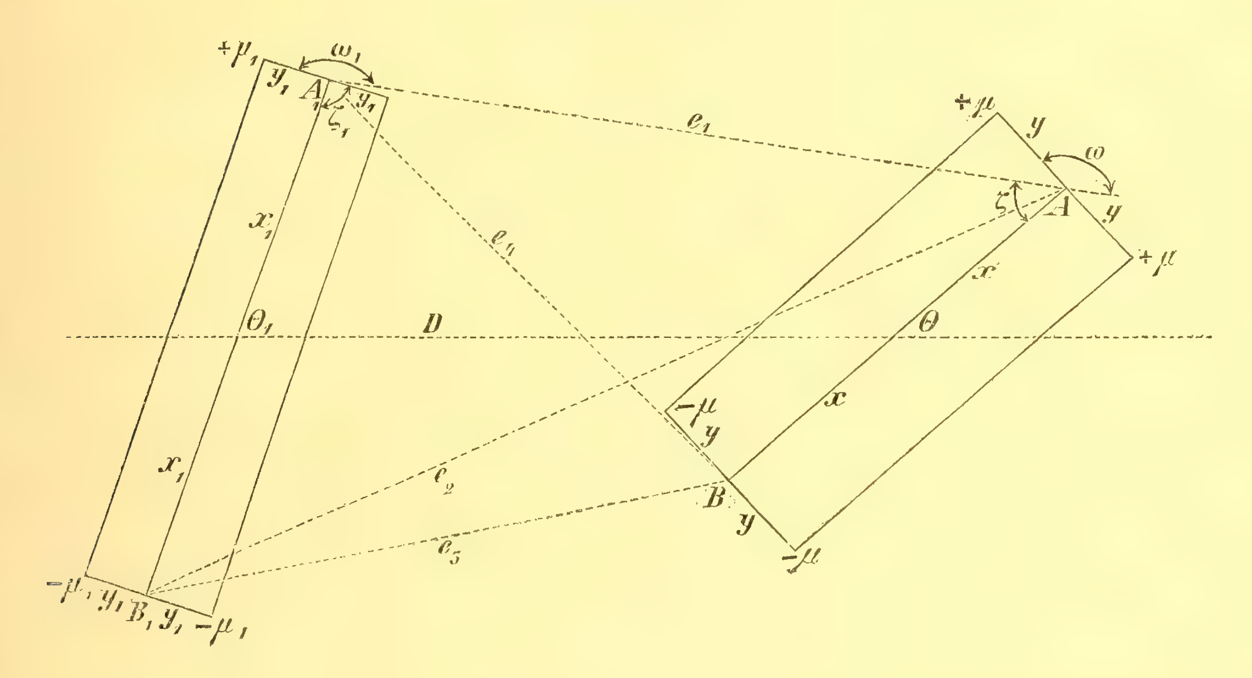
als Potential zweier vierpunktiger Pole auf einander.

§ 6.

Nun können wir endlich das, ursprünglich aus 64 Gliedern bestehende, Potential W von 8 symmetrisch gelegenen Punkten auf 8 andere, eben solche Punkte berechnen; es

kann dies auch als Potential zweier Magnete auf einander aufgefasst werden, deren jeder zwei vierpunktige Pole besitzt. Möge D die Entfernung der Centra dieser Magnete sein und Fig. 5 wiederum eine horizontale Projection derselben darstellen. Genau, wie in der vorhergehenden Zeichnung ist jeder der Punkte μ und μ_1 als Doppelpunkt aufzufassen.

Fig. 5.



Bilden wir die, den vier Entfernungen e_1, e_2, e_3 und e_4 entsprechenden Potentiale w_1, w_2, w_3 und w_4 je zweier vierpunktiger Pole aufeinander, so ist

$$W = w_1 - w_2 + w_3 - w_4, \qquad (20)$$

wo jedes Glied durch einen Ausdruck von der Form (19) bestimmt wird.

Um w_1 zu bilden, hat man in (19) für ω und ω_1 die Werthe der auf Fig. 5 mit diesen Buchstaben bezeichneten Winkel einzuführen. Es ist

$$\cos^2\omega = \sin^2\zeta \quad \text{und} \quad \cos^2\omega_1 = \sin^2\zeta_1.$$

Aus dem Viereck A_1ABB_1 erhält man

$$\left.\begin{aligned} \cos^2\omega &= \sin^2\zeta = \left[\frac{D\sin\theta - x_1\sin(\theta-\theta_1)}{e_1}\right]^2 \\ \cos^2\omega_1 &= \sin^2\zeta_1 = \left[\frac{D\sin\theta_1 - x\sin(\theta-\theta_1)}{e_1}\right]^2 \end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

Für w_2, w_3 und w_4 erhalten wir Ausdrücke, wenn wir entsprechend die Vorzeichen von x oder x_1 abändern. Es ist also

$$w_1 = \frac{16\mu\mu_1}{e_1}\left\{1 - \frac{1}{2}\,\frac{y^2 + y_1^2 + z^2 + z_1^2 - 3y^2\cos^2\omega - 3y_1^2\cos^2\omega_1}{e_1^2}\right\} = \frac{16\mu\mu_1}{e_1}\left\{1 - \frac{1}{2}\,\frac{\lambda_1}{e_1^2}\right\}.$$

Nun ist aber nach (3, a):

$$\frac{1}{e_1} = \frac{1}{D}\left\{1 + \frac{m_1}{D} + \frac{n_1}{D^2} + \cdots\cdots\right\}, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

wo in unserer Zeichnung (Fig. 5):

$$\left.\begin{aligned} m_1 &= x_1\cos\theta_1 - x\cos\theta \\ n_1 &= \tfrac{1}{2}\left[3\left(x_1^2\cos^2\theta_1 + x^2\cos^2\theta - 2xx_1\cos\theta\cos\theta_1\right) - \left(x^2 + x_1^2 - 2xx_1\cos(\theta - \theta_1)\right)\right]. \end{aligned}\right\} \quad (23)$$

Dies giebt

$$w_1 = \frac{16\mu\mu_1}{D}\left\{1 + \frac{m_1}{D} + \frac{n_1}{D^2} + \cdots\right\}\left\{1 - \frac{\lambda_1}{2D^2}\left(1 + \frac{2m_1}{D} + \frac{m_1^2 + 2n_1}{D^2}\right)\right\}$$

oder

$$w_1 = \frac{16\mu\mu_1}{D}\left\{1 + \frac{m_1}{D} + \frac{n_1}{D^2} + \cdots - \frac{1}{2}\,\frac{\lambda_1}{D^2} - \frac{3\lambda_1 m_1}{2D^3} - \frac{3}{2}\,\frac{\lambda_1(m_1^2 + n_1)}{D^4}\right\} \ldots\ldots (24)$$

Wir bilden nun vor Allem λ_1. Es ist

$$\lambda_1 = y^2 + y_1^2 + z^2 + z_1^2 - 3y^2\cos^2\omega - 3y_1^2\cos^2\omega_1.$$

Hier hat man zuerst (21) einzusetzen und dann hierin

$$\frac{1}{e_1^2} = \frac{1}{D^2}\left\{1 + \frac{2m_1}{D} + \frac{m_1^2 + 2n_1}{D^2}\right\}.$$

Dies giebt

$$\begin{aligned} \lambda_1 = {} & y^2 + y_1^2 + z^2 + z_1^2 - 3y^2\left[\sin^2\theta - \frac{2x_1\sin\theta.\sin(\theta - \theta_1) - 2m_1\sin^2\theta}{D} + \frac{x_1^2\sin^2(\theta - \theta_1) - 4x_1 m_1\sin\theta\sin(\theta - \theta_1) + (m_1^2 + 2n_1)\sin^2\theta}{D^2}\right] - \\ & - 3y_1^2\left[\sin^2\theta_1 - \frac{2x\sin\theta_1\sin(\theta - \theta_1) - 2m_1\sin^2\theta_1}{D} + \frac{x^2\sin^2(\theta - \theta_1) - 4xm_1\sin\theta_1\sin(\theta - \theta_1) + (m_1^2 + 2n_1)\sin^2\theta_1}{D^2}\right], \quad (25) \end{aligned}$$

wo m_1 und n_1 in (23) gegeben sind.

Um das gesuchte Potential W zu finden, hat man vier Ausdrücke von der Form (24) zu bilden und in (20) einzusetzen. Da nun (22) sich von (3, a) nur dadurch unterscheidet, dass x und x_1 statt a und a_1 stehen, so ist es klar, dass wir erhalten

$$\left.\begin{aligned} W = \frac{16\mu\mu_1}{D}\Bigg\{ & -4xx_1\left[\frac{\varkappa_0}{D^2} + \frac{\varkappa_2}{D^4} + \frac{\varkappa_4}{D^6}\right] - \frac{1}{2}\,\frac{\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4}{D^2} - \frac{3}{2}\,\frac{(\lambda_1 m_1 - \lambda_2 m_2 + \lambda_3 m_3 - \lambda_4 m_4)}{D^3} - \\ & - \frac{3}{2}\,\frac{\lambda_1(m_1^2 + n_1) - \lambda_2(m_2^2 + n_2) + \lambda_3(m_3^2 + n_3) - \lambda_4(m_4^2 + n_4)}{D^4}\Bigg\}, \end{aligned}\right\} \quad (26)$$

wo $\varkappa_0$, $\varkappa_2$ und $\varkappa_4$ aus k_0, k_2 und k_4, in (4, b), erhalten werden, wenn in diesen Ausdrücken a und a_1 durch x und x_1 ersetzt werden; bei der Berechnung von (4, a) ist nämlich $-4aa_1$ herausgetragen worden, während wir hier noch Nichts entsprechendes gethan haben.

Wir haben nun die drei, in (26) vorkommenden, λ enthaltenden, Combinationen zu bilden. Man hat dabei zu beachten, dass man aus λ_1 erhält: λ_2, wenn x_1 durch $-x_1$; λ_3, wenn x und x_1 durch $-x$ und $-x_1$ und λ_4, wenn x durch $-x$ ersetzt werden. Dasselbe hat man natürlich auch in (23) zu thun, so dass

$$m_3 = -m_1,\ m_4 = -m_2,\ n_3 = n_1 \text{ und } n_4 = n_2 \ldots\ldots\ldots\ldots (27)$$

werden. Auf diese Weise ist es leicht die verschiedenen vorkommenden Combinationen auszurechnen. Es ist erstens

$$\left.\begin{aligned}\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4 = &-3y^2\frac{[2(m_1^2-m_2^2)+4(n_1-n_2)]\sin^2\theta+16xx_1\cos\theta\sin\theta\sin(\theta-\theta_1)}{D^2} - \\ &-3y_1^2\frac{[2(m_1^2-m_2^2)+4(n_1-n_2)]\sin^2\theta_1-16xx_1\cos\theta_1\sin\theta_1\sin(\theta-\theta_1)}{D^2},\end{aligned}\right\} (28)$$

da $$\Sigma x_1 m = -4xx_1\cos\theta \text{ und } \Sigma xm = 4xx_1\cos\theta_1 \text{ ist} \ldots\ldots\ldots\ldots (29)$$

Nun ist ferner

$$m_1^2 - m_2^2 = -4xx_1\cos\theta\cos\theta_1;\ n_1 - n_2 = -6xx_1\cos\theta\cos\theta_1 + 2xx_1\cos(\theta-\theta_1)\ (30)$$

und

$$2(m_1^2 - m_2^2) + 4(n_1 - n_2) = -8xx_1(3\cos\theta\cos\theta_1 - \sin\theta\sin\theta_1) \ldots\ldots (31)$$

Dies giebt

$$\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3-\lambda_4 = 24xx_1\frac{(y^2\sin^2\theta+y_1^2\sin^2\theta_1)(3\cos\theta\cos\theta_1-\sin\theta\sin\theta_1)-2(y^2\sin\theta\cos\theta-y_1^2\sin\theta_1\cos\theta_1)\sin(\theta-\theta_1)}{D^2}.\ (32)$$

Zweitens hat man den Ausdruck

$$\lambda_1 m_1 - \lambda_2 m_2 + \lambda_3 m_3 - \lambda_4 m_4$$

zu bilden.

Aus (23) und 25 erhalten wir

$$\begin{aligned}\lambda_1 m_1 = &(y^2 + y_1^2 + z^2 + z_1^2)\, m_1 - \\ &-3y^2\left[m_1\sin^2\theta - \frac{2x_1m_1\sin\theta\sin(\theta-\theta_1)-2m_1^2\sin^2\theta}{D} + \frac{x_1^2m_1\sin^2(\theta-\theta_1)-4x_1m_1^2\sin\theta\sin(\theta-\theta_1)+(m_1^2+2n_1)m_1\sin^2\theta}{D^2}\right] - \\ &-3y_1^2\left[m_1\sin^2\theta_1 - \frac{2xm_1\sin\theta\sin(\theta-\theta_1)-2m_1^2\sin^2\theta_1}{D} + \frac{x^2m_1^2\sin^2(\theta-\theta_1)-4xm_1^2\sin\theta\sin(\theta-\theta_1)+(m_1^2+2n_1)m_1^2\sin^2\theta_1}{D^2}\right].\end{aligned}$$

Bildet man nun den gesuchten Ausdruck $\lambda_1 m_1 - \lambda_2 m_2 + \lambda_3 m_3 - \lambda_4 m_4$, so hat man 27), (29) und (30) zu beachten. Es zeigt sich, dass viele der zu bildenden Summen gleich

Null sind, nämlich die, welche dem ersten Gliede in $\lambda_1 m_1$ entspricht, ferner den beiden ersten Gliedern in den eckigen Klammern und allen zweimal drei Gliedern, welche den Nennern der beiden Brüche entsprechen, welche D^2 im Zähler haben. So bleibt, bei Berücksichtigung von (30), nur

$$\lambda_1 m_1 - \lambda_2 m_2 + \lambda_3 m_3 - \lambda_4 m_4 = 24 x x_1 \frac{2(y^2 \sin^2\theta + y_1^2 \sin^2\theta_1)\cos\theta\cos\theta_1 - (y^2 \sin\theta\cos\theta - y_1^2 \sin\theta_1 \cos\theta_1)\sin(\theta-\theta_1)}{D}. \quad (33)$$

Die **dritte** und letzte der zu bildenden Combinationen, s. (26), ist

$$\lambda_1 (m_1^2 + n_1) - \lambda_2 (m_2^2 + n_2) - \lambda_3 (m_3^2 + n_3) + \lambda_4 (m_4^2 + n_4).$$

Bildet man aus (25) zuerst $\lambda_1 (m_1^2 + n_1)$, so hat man die letzten Glieder in den beiden eckigen Klammern zu vernachlässigen, da jene Combination in (26) durch D^4 dividirt ist. So erhält man

$$\begin{aligned}\lambda_1 (m_1^2 + n_1) &= (y^2 + y_1^2 + z^2 + z_1^2)(m_1^2 + n_1) - \\ &- 3y^2 \left[(m_1^2 + n_1)\sin^2\theta - \frac{2x_1 (m_1^2 + n_1)\sin\theta\sin(\theta-\theta_1) - 2m_1 (m_1^2 + n_1)\sin^2\theta}{D}\right] - \\ &- 3y_1^2 \left[(m_1^2 + n_1)\sin^2\theta_1 - \frac{2x (m_1^2 + n_1)\sin\theta_1\sin(\theta-\theta_1) - 2m_1 (m_1^2 + n_1)\sin^2\theta_1}{D}\right].\end{aligned}$$

Bildet man die obige Combination, so sind alle Summen, welche den Gliedern der Nenner der beiden Brüche entsprechen, gleich Null und es bleibt, da (s. 27 und 30)

$$\begin{aligned}(m_1^2 + n_1) - (m_2^2 + n_2) + (m_3^2 + n_3) - (m_4^2 + n_4) &= 2(m_1^2 - m_2^2) + 2(n_1 - n_2) = \\ = -20 x x_1 \cos\theta\cos\theta_1 + 4 x x_1 \cos(\theta-\theta_1) &= 4 x x_1 (-4\cos\theta\cos\theta_1 + \sin\theta\sin\theta_1)\end{aligned}$$

ist, zuletzt

$$\left.\begin{aligned}\lambda_1 (m_1^2 + n_1) - \lambda_2 (m_2^2 + n_2) + \lambda_3 (m_3^2 + n_3) - \lambda_4 (m_4^2 + n_4) = \\ = 4 x x_1 [(y^2 + y_1^2 + z^2 + z_1^2) - 3(y^2 \sin^2\theta + y_1^2 \sin^2\theta_1)](\sin\theta\sin\theta_1 - 4\cos\theta\cos\theta_1).\end{aligned}\right\} \quad (34)$$

Wir setzen (32), (33) und (34) in (26) ein und erhalten:

$$\begin{aligned}W = \frac{16\mu\mu_1}{D^3}\Big\{ &-4 x x_1 \left[\varkappa_0 + \frac{\varkappa_2}{D^2} + \frac{\varkappa_4}{D^4}\right] - 12 x x_1 \frac{(y^2 \sin^2\theta + y_1^2 \sin^2\theta_1)(3\cos\theta\cos\theta_1 - \sin\theta\sin\theta_1) - 2(y^2 \sin\theta\cos\theta - y_1^2 \sin\theta_1\cos\theta_1)\sin(\theta-\theta_1)}{D^2} - \\ &- 36 x x_1 \frac{2(y^2 \sin^2\theta + y_1^2 \sin^2\theta_1)\cos\theta\cos\theta_1 - (y^2 \sin\theta\cos\theta - y_1^2 \sin\theta_1\cos\theta_1)\sin(\theta-\theta_1)}{D^2} - \\ &- 6 x x_1 \frac{5[(y^2 + y_1^2 + z^2 + z_1^2) - 3(y^2 \sin^2\theta + y_1^2 \sin^2\theta_1)](\sin\theta\sin\theta_1 - 4\cos\theta\cos\theta_1)}{D^2}\Big\}.\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck kann durch Zusammenziehen gleicher Glieder zu folgender Form gebracht werden:

$$\left.\begin{aligned} W = & -\frac{64\mu\mu_1}{D^3}\Big\{xx_1\left[\varkappa_0+\frac{\varkappa_2}{D^2}+\frac{\varkappa_4}{D^4}\right]+ \\ & +\frac{3}{2}xx_1\frac{(y^2+y_1{}^2+z^2+z_1{}^2)(\sin\theta\,\sin\theta_1-4\cos\theta\cos\theta_1)+5(y^2\sin^2\theta+y_1{}^2\sin^2\theta_1)(6\cos\theta\cos\theta_1-\sin\theta\sin\theta_1)-10(y^2\sin\theta\cos\theta-y_1{}^2\sin\theta_1\cos\theta_1)\sin(\theta-\theta_1)}{D^2}\Big\}.\end{aligned}\right\}\quad(35)$$

Dies ist der vollständige Ausdruck des Potentiales zweier Magnete auf einander, von denen jeder zwei vierpunktige Pole besitzt.

$\varkappa_0$, $\varkappa_2$ und $\varkappa_4$ werden aus k_0, k_2 und k_4 in (4, b) erhalten, indem a und a_1 durch x und x_1 ersetzt werden.

§ 4.

Im Anfange des § 4 war gesagt worden, dass das Potential V zweier Magnete auf einander gleich ΣW ist, s. (16), wo die Summation über je $\frac{1}{8}$ der beiden Magnete, d. h. über alle positiven Werthe der 6 Grössen x, y, z, x_1, y_1, z_1 auszudehnen ist. Hierbei erscheint eine ganze Reihe von neuen Combinationen, für welche wir besondere Zeichen einführen wollen.

Bei der Summation des ersten Gliedes mit dem Factor $\varkappa_0$ erhält man den Factor $64\Sigma\mu\mu_1 xx_1 = mm_1$, da $\varkappa_0$ (vgl. 4, b) nur θ und θ_1 enthält.

Das zweite Glied, mit $\varkappa_2$, welches x^2 und $x_1{}^2$ enthält, giebt Summen von der Form

$$64\Sigma\mu\mu_1 x^3 x_1 = 64\Sigma\mu_1 x_1 \Sigma\mu x\,\frac{\Sigma\mu x^3}{\Sigma\mu x} = mm_1 a^2$$

$$64\Sigma\mu\mu_1 x x_1{}^3 = 64\Sigma\mu x\Sigma\mu_1 x_1\,\frac{\Sigma\mu_1 x_1{}^3}{\Sigma\mu_1 x_1} = mm_1 a_1{}^2.$$

Das dritte Glied, mit $\varkappa_4$ (vgl. 4, b), welches x^4, $x_1{}^4$ und $x^2 x_1{}^2$ enthält, giebt die Summen:

$$64\Sigma\mu\mu_1 x^5 x_1 = 64\Sigma\mu_1 x_1\Sigma\mu x\cdot\frac{\Sigma\mu x^5}{\Sigma\mu x} = \mu\mu_1\bar{a}^4$$

$$64\Sigma\mu\mu_1 x x_1{}^5 = 64\Sigma\mu x\,.\,\Sigma\mu_1 x_1\frac{\Sigma\mu_1 x_1{}^5}{\Sigma\mu_1 x_1} = mm_1\bar{a}_1{}^4$$

$$64\Sigma\mu\mu_1 x^3 x_1{}^3 = 64\Sigma\mu x\Sigma\mu_1 x_1\,\frac{\Sigma\mu x^3}{\Sigma\mu x}\,\frac{\Sigma\mu_1 x_1{}^3}{\Sigma\mu_1 x_1} = mm_1 a^2 a_1{}^2.$$

Hier sind $\bar{a}$ und $\bar{a}_1$ nicht identisch mit a und a_1, denn es ist $\bar{a}^4$ ein Mittelwerth aller x^4, dagegen a^2 ein Mittelwerth aller x^2. Der Unterschied kann aber nur sehr klein sein und ist es nicht schwer für gewisse Annahmen den Fehler zu bestimmen, welchen man macht, wenn man $\bar{a}^4$ und $\bar{a}_1{}^4$ durch a^4 und $a_1{}^4$ ersetzt.

Nimmt man zuerst an, μ und μ_1 seien lineare Functionen von x und x_1, so erhält man

$$\frac{\bar{a}^4}{a^4} = \frac{\int_0^l x^6 dx\cdot\int_0^l x^2 dx}{\left[\int_0^l x^4 dx\right]^2} = \frac{25}{7.3} = \frac{25}{21}.$$

Und ebenso $$\frac{\bar{a}_1^4}{a_1^4} = \frac{25}{21}.$$

Nimmt man dagegen an, μ und μ_1 wüchsen proportional x^2 und x_1^2, so erhält man

$$\frac{\bar{a}^4}{a^4} = \frac{\int_0^l x^7 dx \cdot \int_0^l x^3 dx}{\left[\int_0^l x^5 dx\right]^2} = \frac{36}{8.4} = \frac{9}{8}.$$

Sind μ und μ_1 proportional x^3 und x_1^3, so ist

$$\frac{\bar{a}^4}{a^4} = \frac{49}{9.5} = \frac{49}{45}.$$

Der wahre Werth dürfte wahrscheinlich zwischen den beiden letzteren sich befinden; wir können daher rund annehmen, dass $\bar{a}^4$ und $\bar{a}_1^4$ um ein Zehntel grösser sind als a^4 und a_1^4. Vernachlässigen wir diesen Unterschied, so ergeben die ersten drei Glieder von (35) nach der Summation genau den Ausdruck (4, a) und (4, b).

Das letzte, additive Glied in (35) giebt bei der Summation folgende Grössen:

$$64\Sigma\mu\mu_1 xx_1 y^2 = 64\Sigma\mu_1 x_1 \cdot \Sigma\mu x \cdot \frac{\Sigma\mu x y^2}{\Sigma\mu x} = mm_1 b^2$$

$$64\Sigma\mu\mu_1 xx_1 y_1^2 = 64\Sigma\mu x \cdot \Sigma\mu_1 x_1 \cdot \frac{\Sigma\mu_1 x_1 y_1^2}{\Sigma\mu_1 x_1} = mm_1 b_1^2$$

$$64\Sigma\mu\mu_1 xx_1 z^2 = 64\Sigma\mu_1 x_1 \cdot \Sigma\mu x \cdot \frac{\Sigma\mu x z^2}{\Sigma\mu x} = mm_1 c^2$$

$$64\Sigma\mu\mu_1 xx_1 z_1^2 = 64\Sigma\mu x \cdot \Sigma\mu_1 x_1 \cdot \frac{\Sigma\mu_1 x_1 z_1^2}{\Sigma\mu_1 x_1} = mm_1 c_1^2.$$

Hier sind b und b_1 in demselben Sinne Repräsentanten der halben Breite und c und c_1 der halben Dicken der Magnete, in welchem a und a_1 Repräsentanten der halben Längen sind.

Nach Ausführung der Summation erhalten wir endgültig, entsprechend (4, a):

$$V = -\frac{mm_1}{D^3}\left\{k_0 + \frac{k_2}{D^2} + \frac{k_4}{D^4} + \frac{\sigma}{D^2}\right\} \dots\dots \quad (36)$$

wo

$$\left.\begin{matrix} k_0 \\ k_2 \\ k_4 \end{matrix}\right\} \text{ identisch mit (4, } b\text{) und}$$

$$\sigma = \tfrac{3}{2}[(b^2+c^2+b_1^2+c_1^2)(\sin\theta\sin\theta_1 - 4\cos\theta\cos\theta_1) + 5(b^2\sin^2\theta + b_1^2\sin^2\theta_1)(6\cos\theta\cos\theta_1 - \sin\theta\sin\theta_1) -$$
$$- 10(b^2\sin\theta\cos\theta - b_1^2\sin\theta_1\cos\theta_1)\sin(\theta - \theta_1)] \dots\dots \quad (37)$$

als allgemeinsten Ausdruck des Potentiales zweier Magnete auf einander.

§ 8.

Für die erste Hauptlage (s. § 2) ist $\theta_1 = 0$ und $\theta = 90^\circ - \varphi$, wenn φ den Ablenkungswinkel bedeutet. Dies in (36) eingesetzt, giebt, entsprechend (5, *a*) und (5, *b*):

$$V = -\frac{2mm_1}{D^3}\left\{k_0' + \frac{k_2'}{D^2} + \frac{k_4'}{D^4} + \frac{\sigma'}{D^2}\right\},$$

wo

$$\left.\begin{matrix} k_0' \\ k_2' \\ k_4' \end{matrix}\right\} \text{ identisch mit (5, } b\text{) und}$$

$$\sigma' = -3\,(b^2 + c^2 + b_1^2 + c_1^2)\sin\varphi + 15b^2\cos^2\varphi\sin\varphi.$$

Differenzirt man nach $-\varphi$, so erhält man, entsprechend (7):

$$\frac{2mm_1\cos\varphi}{D^3}\left\{1 + \frac{p_2}{D^2} + \frac{p_4}{D^4} + 3\,\frac{4b^2 - b_1^2 - c^2 - c_1^2 - 15b^2\sin^2\varphi}{D^2}\right\} = mH\sin\varphi, \ldots . \quad (38)$$

wo

$$\left.\begin{matrix} p_2 \\ p_4 \end{matrix}\right\} \text{ identisch mit (7).}$$

Für die zweite Hauptlage ist $\theta_1 = 90^\circ$ und $\theta = -\varphi$, wo φ der Ablenkungswinkel. Diese Werthe ergeben aus (36), entsprechend (8, *a*) und (8, *b*):

$$V = -\frac{mm_1}{D^3}\left\{k_0'' + \frac{k_2''}{D^2} + \frac{k_4''}{D^4} + \frac{\sigma''}{D^2}\right\},$$

wo

$$\left.\begin{matrix} k_0'' \\ k_2'' \\ k_4'' \end{matrix}\right\} \text{ identisch mit (8, } b\text{) und}$$

$$\sigma'' = -\tfrac{3}{2}\,[(b^2 + c^2 + b_1^2 + c_1^2)\sin\varphi - 5\,(b^2\sin^2\varphi + b_1^2)\sin\varphi + 10b^2\sin\varphi\cos^2\varphi].$$

Differenzirt man nach $(-\varphi)$, so erhält man, entsprechend (9):

$$\frac{mm_1\cos\varphi}{D^3}\left\{1 + \frac{r_2}{D^2} + \frac{r_4}{D^4} - \frac{3}{2}\,\frac{11b^2 - 4b_1^2 + c^2 + c_1^2 - 45b^2\sin^2\varphi}{D^2}\right\} = mH\sin\varphi, \ldots \quad (39)$$

wo

$$\left.\begin{matrix} r_2 \\ r_4 \end{matrix}\right\} \text{ identisch mit (9).}$$

Die Formeln (38) und (39) enthalten die vollständige Lösung der zweiten Aufgabe für die beiden Hauptlagen. Bei Einführung von Zahlengrössen zeigte es sich, dass die ad-

ditiven Glieder in (38) und (39), welche von Breite und Dicke abhängen, bis 0,001 ausmachen, also keinesfalls zu vernachlässigen sind.

Die Grössen b, b_1, c und c_1 werden sich wohl nur in seltenen Fällen aus den Breiten- und Dickendimensionen der Magnete berechnen lassen. Sind aber beide Magnete von ähnlicher geometrischer Form und aus derselben Stahlsorte verfertigt, so kann man unbedingt annehmen, dass jene Grössen aliquote Theile der wirklichen Breiten und Dicken der Magnete sind.

Für cylindrische, hohle Röhrenmagnete, vom Radius r, ist

$$b = c = \frac{r}{\sqrt{2}}.$$

§ 9.

Für die erste Hauptlage habe ich, ausser dem in (38) enthaltenen, auch noch das nächste, von Breite und Dicke der Magnete abhängige Correctionsglied ausgerechnet. Ohne auf die ungemein langwierige Rechnung einzugehen, begnüge ich mich, das Resultat niederzuschreiben. Es ist

$$\frac{2mm_1 \cos\varphi}{D^3}\left\{1 + \frac{p_2}{D^2} + \frac{p_4}{D^4} + 3\,\frac{4b^2 - b_1^2 - c^2 - c_1^2 - 15b^2 \sin^2\varphi}{D^2} - \right.$$
$$\left. - 15\,\frac{a_1^2(b^2 + b_1^2 + c^2 + c_1^2) - (\frac{3}{2}a^2 b_1^2 + 5a_1^2 b^2)(1 - 3\sin^2\varphi)}{D^4}\right\}.$$

Es zeigt sich, dass dies letzte Glied, ähnlich wie $\frac{p_6}{D^6}$ in (15), unbedingt zu vernachlässigen ist.

Ouvrages physiques et chimiques publiés dans la VII. Série des Mémoires de l'Académie Impériale des sciences.

T. VI, № 1. **Lenz, E.** Betrachtungen über Ventilation in unseren Klimaten. 1863. Pr. 30 K. = 1 Mk.

T. XV, № 7. **Boutlerow, M.** Sur la structure chimique de quelques hydrocarbures non-saturés. 1870. Pr. 25 K. = 80 Pf.

T. XVII, № 5. **Jacobi, M.** Untersuchungen über die Construction identischer Aräometer und insbesondere metallischer Scalen und Gewichts-Alcoholometer, nebst Anhang über den Einfluss der Capillaritäts-Erscheinungen auf die Angaben der Alcoholometer. 1871. (Mit 2 Kupfertafeln.) Pr. 75 K. = 2 Mk. 50 Pf.

№ 9. **Boutlerow, M.** Sur l'oxydation du triméthylcarbinol et des alcools tertiaires en général. 1871. Pr. 25 K. = 80 Pf.

T. XVIII, № 8. **Wild, H.** Études métrologiques. 1872. Pr. 25 K. = 80 Pf.

T. XXI, № 7. **Boutlerow, M.** Sur les propriétés de l'acide triméthylacétique et sur ses dérivés. 1874. Pr. 25 K. = 80 Pf.

T. XXII, № 6. **Setschenow, J.** Ueber die Absorption der Kohlensäure durch Salzlösungen. 1875. Pr. 50 K. = 1 Mk 70 Pf.

T. XXIII, № 4. **Boutlerow, M.** Condensation des hydrocarbures de la série éthylénique. 2. Sur l'isodibutylène, l'une des variétés isomériques de l'octylène. 1876. Pr 30 K. = 1 Mk.

№ 8. **Wild, H.** Metrologische Studien. 1877. (Avec 4 pl.) Pr. 80 K. = 2 Mk. 70 Pf.

T. XXIV, № 6. **Wischnegradsky, A.** Ueber verschiedene Amylene und Amylalkohole. 1877. Pr. 25 K. = 80 Pf.

T. XXV, № 5. **Menschutkin, N.** Recherches sur l'influence exercée par l'isomérie des alcools et des acides sur la formation des éthers composés. (Avec 2 pl.) 1877. Pr. 50 K. = 1 Mk. 70 Pf.

T. XXVI, № 3. **Lenz, R.** Ueber den galvanischen Widerstand verdünnter Lösungen von Verbindungen des Kalium, Natrium, Ammonium und des Wasserstoffs. 1878. Pr. 45 K. = 1 Mk. 50 Pf.

№ 4. **Hasselberg, B.** Studien auf dem Gebiete der Absorptionsspectralanalyse. 1878. (Avec 4 pl.) Pr. 1 R. = 3 Mk. 30 Pf.

№ 8. **Wild, H.** Ueber die Bestimmung der absoluten Inclination mit dem Inductions-Inclinatorium. 1878. (Avec 3 pl.) Pr. 75 K. = 2 Mk. 50 Pf.

№ 9. **Menschutkin, N.** Recherches sur l'influence exercée par l'isomérie des alcools et des acides sur la formation des éthers composés. Deuxième mémoire. 1879. Pr. 30 K. = 1 Mk.

№ 14. **Chwolson O.** Ueber die Dämpfung von Schwingungen bei grösseren Amplituden. 1879. Pr. 35 K. = 1 Mk. 20 Pf.

T. XXVII, № 1. **Hasselberg, B.** Ueber das durch electrische Erregung erzeugte Leuchten der Gase bei niedriger Temperatur. 1879. Pr. 25 K. = 80 Pf.

№ 3. **Boutlerow, M.** Condensation des hydrocarbures de la série éthylénique. 3. Sur l'isotributylène. 1879. Pr. 25 K. = 80 Pf.

T. XXVIII, № 3. **Chwolson, O.** Allgemeine Theorie der magnetischen Dämpfer. 1880. Pr. 1 R. = 3 Mk. 30 Pf.

T. XXX, № 2. **Beketoff, N.** Recherches sur la formation et les propriétés de l'oxyde de sodium anhydre. 1882. Pr. 15 K. = 50 Pf.

№ 9. **Lenz, R.** Ueber das galvanische Leitungsvermögen alcoholischer Lösungen. 1882. Pr. 50 K. = 1 Mk. 70 Pf.

Imprimé par ordre de l'Académie Impériale des sciences. Octobre, 1883. C. Vessélofsky, Secrétaire perpétuel.

Imprimerie de l'Académie Impériale des sciences. (Vass.-Ostr., 9 ligne, № 12.)

MÉMOIRES
DE
L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES DE ST.-PÉTERSBOURG, VII[E] SÉRIE.
Tome XXXI, N° 11.

SUR
LA GÉNÉRALISATION DES FONCTIONS DE JACQUES BERNOULLI.

PAR

B. Imschenetzky.

(*Lu le 18 Janvier 1883*).

St.-PÉTERSBOURG, 1883.
Commissionnaires de l'Académie Impériale des sciences:
à St -Pétersbourg: MM. Eggers & C[ie] et J. Glasounof;
à Riga: M. N. Kymmel;
à Leipzig: Voss' Sortiment (G. Haessel).

Prix: 50 Kop. = 1 Mrk. 70 Pf.

MÉMOIRES
DE
L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES DE ST.-PÉTERSBOURG, VII[E] SÉRIE.
TOME XXXI, № 11.

SUR
LA GÉNÉRALISATION DES FONCTIONS DE JACQUES BERNOULLI.

PAR

B. Imschenetzky.

(Lu le 18 Janvier 1883).

ST.-PÉTERSBOURG, 1883.
Commissionnaires de l'Académie Impériale des sciences:

à St.-Pétersbourg:	à Riga:	à Leipzig:
MM. Eggers & C[ie] et J. Glasounof;	M. N. Kymmel;	Voss' Sortiment (G. Haessel).

Prix: 50 Kop. = 1 Mrk. 70 Pf.

Imprimé par ordre de l'Académie Impériale des sciences.
Octobre 1883. C. Vessélofsky, Secrétaire perpétuel.

Imprimerie de l'Académie Impériale des sciences.
(Wass.-Ostr., 9 line, № 12.)

§ I.

Les définitions et les propriétés des fonctions de Bernoulli primitives et généralisées.

1. Convenons d'appeler les fonctions de Bernoulli et de les désigner par $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$, ... $\varphi_n(x)$ une suite de polynômes des degrés réspectifs 1, 2, 3, ... n, par rapport à x, définis par les égalités:

$$\varphi_1(x) = x$$

$$\varphi_2(x) = \int_0^x [\varphi_1(x) + A_0]\, dx = \frac{x^2}{\lfloor 2} + A_0 x,$$

$$\varphi_3(x) = \int_0^x [\varphi_2(x) + A_1]\, dx = \frac{x^3}{\lfloor 3} + \frac{A_0 x^2}{\lfloor 2} + A_1 x,$$

. . . .

$$\varphi_n(x) = \int_0^x [\varphi_{n-1}(x) + A_{n-2}]\, dx = \frac{x^n}{\lfloor n} + \frac{A_0 x^{n-1}}{\lfloor n-1} + \frac{A_1 x^{n-2}}{\lfloor n-2} + \ldots + A_{n-2} x \quad (1)$$

et par la condition

$$\varphi_n(1) = 0 \quad (2)$$

qui doit avoir lieu pour $n > 1$ [1]).

Il est presque superflu de dire que nous désignons, pour abréger, par $\lfloor n$ le produit 1. 2. 3. ... n.

---

1) Ces définitions ont été proposées par moi dans un travail déjà ancien, publié en 1870 dans le Recueil des Mémoires scientifiques de l'Université de Kazan (Ученыя Записки Им. Каз. Унив.)

Pour $n = 2, 3, 4, \ldots$ la condition (2) fournit le système suivant d'équations:

$$A_0 + \frac{1}{\lfloor 2} = 0,$$

$$A_1 + \frac{A_0}{\lfloor 2} + \frac{1}{\lfloor 3} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

(3) $$A_{n-2} + \frac{A_{n-3}}{\lfloor 2} + \ldots \frac{A_1}{\lfloor n-2} + \frac{A_0}{\lfloor n-1} + \frac{1}{\lfloor n} = 0,$$

d'où l'on déduit immédiatement, une à une, les valeurs des constantes A_0, A_1, A_2, $\ldots$ A_{n-2}, jusqu'à la valeur quelconque donnée de l'indice n. On trouvera ainsi, par exemple:

$$A_0 = -\tfrac{1}{2}, \qquad A_1 = \frac{1}{12}$$

$$A_2 = 0, \qquad A_3 = -\frac{1}{720}$$

$$A_4 = 0, \qquad A_5 = \frac{1}{30240}$$

$$A_6 = 0, \qquad A_7 = -\frac{1}{1209600}$$

$$A_8 = 0, \qquad A_9 = \frac{1}{47900160}.$$

2. Par cet essai du calcul numérique des valeurs des constantes A_n on voit déjà qu'elles s'annulent, quand l'indice n est pair. Mais pour s'assurer que cette propriété est générale, il est nécessaire de déduire les conséquences immédiates de la définition précédente donnée à la fonction $\varphi_n(x)$.

En la différentiant k fois on trouvera évidemment

$$D^k \varphi_n(x) = \varphi_{n-k}(x) + A_{n-k-1}$$

Donc, en ayant égard à (2), on aura

$$[D^k \varphi_n(x)]_{x=0} = [D^k \varphi_n(x)]_{x=1}$$

toutes les fois, quand $k < n - 1$ ou $k = n$; mais pour $k = n - 1$ on trouve

$$[D^{n-1} \varphi_n(x)]_{x=0} = A_0 = -\tfrac{1}{2}$$

et

$$[D^{n-1} \varphi_n(x)]_{x=1} = 1 + A_0 = \tfrac{1}{2}.$$

En vertu de ces résultats il vient

$$\varphi_n(x) = \varphi_n[1 + (x-1)]$$
$$= A_{n-2}(x-1) + \frac{A_{n-3}}{\lfloor 2}(x-1)^2 + \ldots + \frac{A_1(x-1)^{n-2}}{\lfloor n-2} + \frac{(x-1)^{n-1}}{2\lfloor n-1} + \frac{(x-1)^n}{\lfloor n},$$

d'où, pour $x = 0$, on a

$$-A_{n-2} + \frac{A_{n-3}}{\lfloor 2} + \ldots + (-1)^{n-2}\frac{A_1}{\lfloor n-2} + (-1)^{n-1}\frac{1}{2\lfloor n-1} + (-1)^n\frac{1}{\lfloor n} = 0$$

En soustrayant la dernière équation de la (3), quand on suppose le nombre n pair et égal a $2m+2$, on obtient

$$A_{2m} + \frac{A_{2m-2}}{\lfloor 3} + \ldots + \frac{A_2}{\lfloor 2m} = 0$$

De cette dernière relation, si l'on y fait succesivement $m = 1, 2, 3, \ldots$ on trouvera $A_2 = 0$, $A_4 = 0$, $A_6 = 0$, ... L'idée de cette démonstration élégante est due à Ostrogradsky[1]).

3. Nous allons chercher maintenant pour l'accroissement $\Delta x = 1$ donné à x l'accroissement correspondant $\Delta\varphi_n(x)$ de la fonction $\varphi_n(x)$, en nous appuyant sur sa définition exprimée par (1) et (2). On trouve d'abord

$$\Delta\varphi_n(x) = \Delta\int_0^x [\varphi_{n-1}(z) + A_{n-2}]dz = \int_x^{x+1}[\varphi_{n-1}(z) + A_{n-2}]\,dz,$$

d'où, par la substitution $z = x + y$, il vient

$$\Delta\varphi_n(x) = \int_0^1 [\varphi_{n-1}(x+y) + A_{n-2}]\,dy.$$

Le développement de $\varphi_{n-1}(x+y) + A_{n-2}$ suivant les puissances de x ou de y donne:

$$\varphi_{n-1}(x+y) + A_{n-2}$$
$$= \varphi_{n-1}(y) + A_{n-2} + [\varphi_{n-2}(y) + A_{n-3}]\,x + [\varphi_{n-3}(y) + A_{n-4}]\frac{x^2}{\lfloor 2} + \ldots$$
$$\ldots + [\varphi_1(y) + A_0]\frac{x^{n-2}}{\lfloor n-2} + \frac{x^{n-1}}{\lfloor n-1}$$

et

$$\varphi_{n-1}(x+y) + A_{n-2}$$
$$= \varphi_{n-1}(x) + A_{n-2} + [\varphi_{n-2}(x) + A_{n-3}]\,y + \ldots + \frac{y^{n-1}}{\lfloor n-1}.$$

1) *Mémoire sur les quadratures définies.* Par M. Ostrogradsky, Mém. de l'Ac. Im. des Sc. de S. Pétersb. 1841. 6me série. T. 11.

En employant l'un ou l'autre de ces deux développements, sous le signe de l'intégrale précédente, et ayant égard aux équations (1), (2) et (3), on obtient

$$(5)\qquad \Delta\varphi_n(x) = \frac{x^{n-1}}{\underline{|n-1}}$$

ou bien

$$(6)\qquad \Delta\varphi_n(x) = \varphi_{n-1}(x) + \frac{1}{\underline{|2}}\varphi_{n-2}(x) + \frac{1}{\underline{|3}}\varphi_{n-3}(x) + \ldots + \frac{1}{\underline{|n-1}}\varphi_1(x)$$

Enfin, la comparaison de ces deux expressions de $\Delta\varphi_n(x)$ donne

$$(7)\qquad \frac{x^{n-1}}{\underline{|n-1}} = \varphi_{n-1}(x) + \frac{1}{\underline{|2}}\varphi_{n-2}(x) + \frac{1}{\underline{|3}}\varphi_{n-3}(x) + \ldots + \frac{1}{\underline{|n-1}}\varphi_1(x),$$

la formule qui nous sera très utile par la suite.

4. Avant d'aller plus loin il ne serait pas inutile de faire voir en quoi notre définition de la fonction de Bernoulli diffère de celle qu'on emploie ordinairement. D'après l'équation (5) on a

$$x^n = \underline{|n}\,\{\varphi_{n+1}(x+1) - \varphi_{n+1}(x)\}.$$

En y faisant $x = 0, 1, 2, 3, \ldots m-1$ et en ajoutant les résultats, on obtient

$$1^n + 2^n + 3^n + \ldots + (m-1)^n$$

$$= \frac{m^{n+1}}{n+1} + A_0 m^n + n A_1 m^{n-1} + n(n-1)(n-2) A_3 m^{n-3} + \ldots$$

D'autre part on connait la formule suivante

$$1^n + 2^n + 3^n + \ldots + (m-1)^n$$

$$= \frac{m^{n+1}}{n+1} - \tfrac{1}{2} m^n + \tfrac{1}{2} n B_1 m^{n-1} - \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3.4} B_3 m^{n-3} + \ldots$$

due à Jacques Bernoulli[1]), où les coéfficients B_1, B_3, ... ont reçu le nom des *nombres de Bernoulli* et la fontion de degré $n+1$ de m au second membre fut appelée *la fonction de Jacques Bernoulli* par Raabe[2]). La comparaison des puissances égales de m dans les deux expressions précédentes de la somme $1^n + 2^n + 3^n + \ldots + (m-1)^n$ donne

$$A_0 = -\tfrac{1}{2},\ A_1 = \frac{B_1}{1.2},\ A_3 = -\frac{B_3}{\underline{|4}},\ \ldots$$

et en général

$$A_{2m-1} = \frac{(-1)^{m-1} B_{2m-1}}{\underline{|2m}}.$$

1) Ars conjectandi. Pars secunda, p. 97.

2) Ueber die Bernoulli'sche Function. Crelle Journ. B. 42.

On voit par là qu'il ne faut que multiplier par $\lfloor n$ la fonction $\varphi_n(x)$ pour avoir la fonction de Bernoulli, du même degré, d'après la définition de Raabe. De même, on peut toujours passer des nombres A_{2m-1} aux nombres B_{2m-1} par la relation (8). Mais il nous semble qu'en général l'une et l'autre transformation ne ferait que compliquer les formules.

5. A présent nous avons à expliquer ce que nous entendrons par la généralisation de la fonction de Bernoulli. D'après sa définition nous avons

$$\varphi_n(x) = \frac{x^n}{\lfloor n} + A_0 \frac{x^{n-1}}{\lfloor n-1} + A_1 \frac{x^{n-1}}{\lfloor n-1} + \ldots + A_{n-2}\, x$$

et par la formule (7) on peut écrire

$$\frac{x^n}{\lfloor n} = \varphi_n(x) + a_0 \varphi_{n-1}(x) + a_1 \varphi_{n-2}(x) + \ldots + a_{n-2}\varphi_1(x),$$

si l'on pose pour abréger l'écriture

$$a_0 = \frac{1}{\lfloor 2}, \; a_1 = \frac{1}{\lfloor 3}, \; \ldots \; a_{n-2} = \frac{1}{\lfloor n} \tag{9}$$

En considérant ces deux formules comme deux types différents de la dérivation des fonctions $\varphi_n(x)$ et $\frac{x^n}{\lfloor n}$, de l'une par l'autre, on peut convenir d'appeler *les fonctions généralisées* de Bernoulli deux genres de fonctions entières, définies par deux systèmes d'égalités suivantes:

$$\varphi_{1,n}(x) = \varphi_n(x) + A_0\varphi_{n-1}(x) + A_1\varphi_{n-2}(x) + \ldots + A_{n-2}\varphi_1(x)$$

$$\varphi_{2,n}(x) = \varphi_{1,n}(x) + A_0\varphi_{1,n-1}(x) + A_1\varphi_{1,n-2}(x) + \ldots + A_{n-2}\varphi_{1,1}(x)$$

. . . .

$$\varphi_{\nu,n}(x) = \varphi_{\nu-1,n}(x) + A_0\varphi_{\nu-1,n-1}(x) + A_1\varphi_{\nu-1,n-2}(x) + \ldots + A_{n-2}\varphi_{\nu-1,1}(x) \tag{10}$$

et

$$\psi_n(x) = \frac{x^n}{\lfloor n} + a_0 \frac{x^{n-1}}{\lfloor n-1} + a_1 \frac{x^{n-2}}{\lfloor n-2} + \ldots + a_{n-2}\, x$$

$$\psi_{1,n}(x) = \psi_n(x) + a_0\psi_{n-1}(x) + a_1\psi_{n-2}(x) + \ldots + a_{n-2}\psi_1(x)$$

$$\psi_{2,n}(x) = \psi_{1,n}(x) + a_0\psi_{1,n-1}(x) + a_1\psi_{1,n-2}(x) + \ldots + a_{1,n-2}\psi_{1,1}(x)$$

. . . .

$$\psi_{\nu,n}(x) = \psi_{\nu-1,n}(x) + a_0\psi_{\nu-1,n-1}(x) + a_1\psi_{\nu-1,n-2}(x) + \ldots + a_{n-2,\nu}\psi_{\nu-1,1}(x). \tag{11}$$

Il sera facile à démontrer, comme nous le verrons, que les fonctions $\varphi_{\nu,n}(x)$ et $\psi_{\nu,n}(x)$ ont des propriétés tout-à fait semblables à celles de la fonction $\varphi_n(x)$. Mais pour cela il

est nécessaire d'abord de faire quelques remarques sur leurs coéfficients et sur leurs valeurs particulières pour $x = 0$ et $x = 1$.

6. En ordonnant $\varphi_{\nu, n}(x)$ et $\psi_{\nu, n}(x)$ suivant les puissances de x nous les écrirons ainsi:

(12) $$\varphi_{\nu, n}(x) = \frac{x^n}{\lfloor n} + A_{\nu, 0} \frac{x^{n-1}}{\lfloor n-1} + A_{\nu, 1} \frac{x^{n-2}}{\lfloor n-2} + \dots + A_{\nu, n-2}\, x$$

(13) $$\psi_{\nu, n}(x) = \frac{x^n}{\lfloor n} + a_{\nu, 0} \frac{x^{n-1}}{\lfloor n-1} + a_{\nu, 1} \frac{x^{n-2}}{\lfloor n-2} + \dots + a_{\nu, n-2}\, x$$

Les coéfficients $A_{\nu, n-2}$ et $a_{\nu, n-2}$ de x dans ces deux polynômes doivent être égaux réspectivement aux coéfficients de x dans les expressions (10) et (11) de $\varphi_{\nu, n}(x)$ et de $\psi_{\nu, n}(x)$. Donc on a

(14) $$A_{\nu, n-2} = A_{\nu-1, n-2} + A_0 A_{\nu-1, n-3} + A_1 A_{\nu-1, n-4} + \dots$$
$$\dots + A_{n-4} A_{\nu-1, 1} + A_{n-3} A_{\nu-1, 0} + A_{n-2}$$

(15) $$a_{\nu, n-2} = a_{\nu-1, n-2} + a_0\, a_{\nu-1, n-3} + a_1\, a_{\nu-1, n-4} + \dots$$
$$\dots + a_{n-4}\, a_{\nu-1, 1} + a_{n-3}\, a_{\nu-1, 0} + a_{n-2}$$

Les formules (14) et (15) permettent de calculer tous les coéfficients des fonctions $\varphi_{\nu, n}(x)$ et $\psi_{\nu, n}(x)$, à la condition, il est vrai, d'avoir trouvé préalablement tous les coéfficients de toutes les fonctions $\varphi_n(x)$, $\varphi_{1, n}(x)$, ... $\varphi_{\nu-1, n}(x)$ et $\psi_n(x)$, $\psi_{1, n}(x)$, ... $\psi_{\nu-1, n}(x)$, qui les précèdent. Pour le moment il suffit d'avoir cette méthode de calcul des coéfficients $A_{\nu, n-2}$ et $a_{\nu, n-2}$, quoique peu commode pour l'indice ν un peu élevé. Au cours de cette étude nous rencontrerons naturellement des procédés plus expéditifs et définitivement des formules, qui déterminent les coéfficients $A_{\nu, n}$ et $a_{\nu, n}$ comme des fonctions de leur indices entiers ν et n.

7. Il est évident, par les formules (10) et (11), ou bien par (12) et (13), que

$$\varphi_{\nu, n}(0) = 0 \quad \text{et} \quad \psi_{\nu, n}(0) = 0.$$

Pour avoir les valeurs de $\varphi_{\nu, n}(x)$ et de $\psi_{\nu, n}(x)$ pour $x = 1$, remarquons d'arbord que par la formule (11) on a

$$\varphi_{\nu, n}(1) = \varphi_{\nu-1, n}(1) + A_0 \varphi_{\nu-1, n-1}(1) + A_1 \varphi_{\nu-1, n-2}(1) + \dots + A_{\nu-1, n-2}$$

et d'autre part par la formule (12) on trouve:

$$\varphi_{\nu-1, n}(1) = \frac{1}{\lfloor n} + A_{\nu-1, 0} \frac{1}{\lfloor n-1} + A_{\nu-1, 1} \frac{1}{\lfloor n-2} + \dots + A_{\nu-1, n-3} \frac{1}{\lfloor 2} A_{\nu-1, n-2},$$

$$\varphi_{\nu-1, n-1}(1) = \frac{1}{\lfloor n-1} + A_{\nu-1, 0} \frac{1}{\lfloor n-2} + A_{\nu-1, 1} \frac{1}{\lfloor n-3} + \dots + A_{\nu-1, n-3},$$

. . . .

$$\varphi_{\nu-1,2}(1) = \frac{1}{\lfloor 2} + A_{\nu-1,0},$$

$$\varphi_{\nu-1,1}(1) = 1.$$

Si l'on ajoute les n dernières égalités, après les avoir multipliées réspectivement par 1, A_0, A_1, ... A_{n-2}, en vertu des équations (3) on obtient

$$\varphi_{\nu,n}(1) = A_{\nu-1,n-2} \tag{16}$$

Quant à la valeur de $\psi_{\nu,n}(x)$ pour $x = 1$, on la trouve immédiatement par la formule (13) qui donne

$$\psi_{\nu,n}(1) = \frac{1}{\lfloor n} + a_{\nu,0}\frac{1}{\lfloor n-1} + a_{\nu,1}\frac{1}{\lfloor n-2} + \ldots + a_{\nu,n-2},$$

ou, d'après les formules (9),

$$\psi_{\nu,n}(1) = a_{n-2} + a_{\nu,0}\,a_{n-3} + a_{\nu,1}\,a_{n-4} + \ldots + a_{\nu,n-2}$$

ou, enfin, en vertu de (15),

$$\psi_{\nu,n}(1) = a_{\nu+1,n-2} \tag{17}$$

On voit par les formules (16) et (17) que les fonctions $\varphi_{\nu,n}(x)$ et $\psi_{\nu,n}(x)$ ne s'annulent pas, comme $\varphi_n(x)$, pour $x = 1$, car $A_{\nu-1,n-2}$ et $a_{\nu+1,n-2}$ généralement sont différents de zéro.

8. Les résultats qu'on vient d'obtenir facilitent la recherche des propriétés des fonctions $\varphi_{\nu,n}(x)$ et $\psi_{\nu,n}(x)$ qu'elles ont en commun avec $\varphi_n(x)$.

Commencons par différentier, par rapport à x, les expressions (12) et (13). On a

$$D_x \cdot \varphi_{\nu,n}(x) = \varphi_{\nu,n-1}(x) + A_{\nu,n-2} \text{ et } D_x \cdot \psi_{\nu,n}(x) = \psi_{\nu,n-1}(x) + a_{\nu,n-2} \tag{18}$$

Donc après k différentiations on obtiendra

$$D^k{}_x \cdot \varphi_{\nu,n}(x) = \varphi_{\nu,n-k}(x) + A_{\nu,n-k-1} \text{ et } D^k{}_x \cdot \psi_{\nu,n}(x) = \psi_{\nu,n-k}(x) + a_{\nu,n-k-1}$$

En multipliant les équations (18) par dx et en les intégrant depuis $x = 0$, on aura

$$\left.\begin{aligned} \int_0^x [\varphi_{\nu,n-1}(x) + A_{\nu,n-2}]\,dx &= \varphi_{\nu,n}(x), \\ \int_0^x [\psi_{\nu,n-1}(x) + a_{\nu,n-2}]\,dx &= \psi_{\nu,n}(x), \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

les équations de la même forme que les (1), que nous avons prises pour la définition de $\varphi_n(x)$.

En partant des (19) on passe facilement aux expressions de $\Delta\varphi_{\nu,n}(x)$ et de $\Delta\psi_{\nu,n}(x)$ des différences finies de $\varphi_{\nu,n}(x)$ et de $\psi_{\nu,n}(x)$ pour $\Delta x = 1$.

En effet comme au n° 3 on trouve

$$\Delta\varphi_{\nu,n}(x) = \int_0^1 [\varphi_{\nu,n-1}(x+y) + A_{\nu,n-2}]\,dy$$

$$\Delta\psi_{\nu,n}(x) = \int_0^1 [\psi_{\nu,n-1}(x+y) + a_{\nu,n-2}]\,dy$$

Après avoir développé la fonction $\varphi_{\nu,n-1}(x+y) + A_{\nu,n-2}$ de deux manières différentes: suivant les puissances de x ou de y, on l'intègre depuis $y = 0$ jusqu'à $y = 1$, alors en vertu de (16) on obtient, comme au n° 3,

(20)
$$\Delta\varphi_{\nu,n}(x) = \varphi_{\nu-1,n-1}(x) + A_{\nu-1,n-2}$$
$$= \varphi_{\nu,n-1}(x) + \frac{1}{\lfloor 2}\varphi_{\nu,n-2}(x) + \frac{1}{\lfloor 3}\varphi_{\nu,n-3}(x) + \ldots + \frac{1}{\lfloor n-1}\varphi_{\nu,1}(x) + A_{\nu-1,n-2}$$

et, par conséquent,

(21) $$\varphi_{\nu-1,n-1}(x) = \varphi_{\nu,n-1}(x) + \frac{1}{\lfloor 2}\varphi_{\nu,n-2}(x) + \frac{1}{\lfloor 3}\varphi_{\nu,n-3}(x) + \ldots + \frac{1}{\lfloor n-1}\varphi_{\nu,1}(x)$$

On trouve de même

(22)
$$\Delta\psi_{\nu,n}(x) = \psi_{\nu+1,n-1}(x) + a_{\nu+1,n-2}$$
$$= \psi_{\nu,n-1}(x) + \frac{1}{\lfloor 2}\psi_{\nu,n-2}(x) + \frac{1}{\lfloor 3}\psi_{\nu,n-3}(x) + \ldots + \frac{1}{\lfloor n-1}\psi_{\nu,1}(x) + a_{\nu+1,n-2}$$

et

(23) $$\psi_{\nu+1,n-1}(x) = \psi_{\nu,n-1}(x) + \frac{1}{\lfloor 2}\psi_{\nu,n-2}(x) + \frac{1}{\lfloor 3}\psi_{\nu,n-3}(x) + \ldots + \psi_{\nu,1}(x)$$

La dernière formule n'est que la définition même de la fonction $\psi_{\nu+1,n-1}(x)$, d'après le n° 4.

L'analogie de (20) et (22) avec (5) et (6), ainsi que de (21) et (23) avec (7) est évidente.

De l'égalité (23) il est facile de tirer celle-ci

(24) $$\psi_{\nu,n-1}(x) = \psi_{\nu+1,n-1}(x) + A_0\psi_{\nu+1,n-2}(x) + A_1\psi_{\nu+1,n-3}(x) + \ldots + A_{n-3}\psi_{\nu+1,1}(x)$$

Il suffit pour cela de changer $n-1$ dans la formule (23) successivement en $n-2$, $n-3$, ... 2, 1 et en multipliant les résultats réspectivement par A_0, A_1, ... A_{n-3} de les ajouter à l'égalité (23); alors, en vertu des (3), on aura la formule (24).

Remarquons encore une conséquence des résultats, que nous venons d'obtenir.

En multipliant l'équation (20) par dx et en l'intégrant depuis $x = 0$, on trouve

$$\int_0^x dx\, \Delta\varphi_{\nu,n}(x) = \int_0^x [\varphi_{\nu-1,n-1}(x) + A_{\nu-1,n-2}]\, dx = \varphi_{\nu-1,n}(x).$$

Pour plus de concision on peut désigner par D_x^{-1} l'opération de l'intégration par rapport à x, depuis $x = 0$; alors l'équation précédente peut s'écrire

$$D_x^{-1}\Delta\varphi_{\nu,n}(x) = \varphi_{\nu-1,n}(x).$$

et l'on voit par là que l'opération composée $D_x^{-1}\Delta$, appliquée à la fonction $\varphi_{\nu,n}(x)$ ne fait que diminuer d'une unité son premier indice ν. Donc, en l'appliquant ν fois de suite à la fonction $\varphi_{\nu,n}(x)$, on trouvera

$$(D_x^{-1}\Delta)^2\varphi_{\nu,n}(x) = \varphi_{\nu-2,n}(x),\ (D_x^{-1}\Delta)^3\varphi_{\nu,n}(x) = \varphi_{\nu-3,n}(x), \ldots$$

$$(D_x^{-1}\Delta)^r\varphi_{\nu,n}(x) = \varphi_n(x) \tag{25}$$

La formule (25) indique la suite d'opérations conduisant de la fonction $\varphi_{\nu,n}(x)$ à la fonction $\varphi_n(x)$; tandis que les équations (10) montrent comment, inversement, on passe de la dernière de ces fonctions à la première.

§ II.

La transformation de la série exponentielle au moyen des fonctions de Bernoulli.

9. L'équation (7) donne une suite indéfinie d'égalités suivantes:

$$x = \varphi_1(x)$$

$$\frac{x^2}{\lfloor 2} = \varphi_2(x) + \frac{1}{\lfloor 2}\varphi_1(x)$$

$$\frac{x^3}{\lfloor 3} = \varphi_3(x) + \frac{1}{\lfloor 2}\varphi_2(x) + \frac{1}{\lfloor 3}\varphi_1(x)$$

. . . .

$$\frac{x^n}{\lfloor n} = \varphi_n(x) + \frac{1}{\lfloor 2}\varphi_{n-1}(x) + \frac{1}{\lfloor 3}\varphi_{n-2}(x) + \ldots + \frac{1}{\lfloor n}\varphi_1(x).$$

. . . .

Multiplions les réspectivement par $z, z^2, z^3, \ldots z^n, \ldots$ et faisons leur somme. En ajoutant les seconds membres on mettra en facteur commun z dans la somme des premiers termes, $\frac{z^2}{\lfloor 2}$ dans la somme des seconds, $\frac{z^3}{\lfloor 3}$ dans la somme des troisièmes et ainsi de suite. On aura de cette manière

$$xz + \frac{x^2z^2}{\lfloor 2} + \frac{x^3z^3}{\lfloor 3} + \ldots + \frac{x^nz^n}{\lfloor n} + \ldots$$

$$= \left(z + \frac{z^2}{\lfloor 2} + \frac{z^3}{\lfloor 3} + \ldots + \frac{z^n}{\lfloor n} + \ldots\right)$$

$$\times (\varphi_1(x) + z\varphi_2(x) + z^2\varphi_3(x) + \ldots + z^{n-1}\varphi_n(x) + \ldots),$$

ou, par la série exponentielle,

$$e^{xz} - 1 = (e^z - 1)\,[\varphi_1(x) + z\varphi_2(x) + z^2\varphi_3(x) + \ldots + z^{n-1}\varphi_n(x) + \ldots]$$

Il est évident, par la dernière égalité, que le module de la série

$$\varphi_1(x) + z\varphi_2(x) + z^2\varphi_3(x) + \ldots + z^{n-1}\varphi_n(x) + \ldots$$

reste fini, tant que, le module de $e^{xz} - 1$ restant fini, le module de $e^z - 1$ ne tend pas vers zéro. Donc le développement

$$\frac{e^{xz}-1}{e^z-1} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \varphi_{n+1}(x)$$

est toujours convergent pour toutes les valeurs réelles ou complèxes de x, tant que le *mod.* $z < 2\pi$.

Maintenant la formule (21), du § I, nous fournira une suite indéfinie d'égalités suivantes:

$$\varphi_1(x) = \varphi_{1,1}(x)$$

$$\varphi_2(x) = \varphi_{1,2}(x) + \frac{1}{\lfloor 2}\varphi_{1,1}(x)$$

$$\varphi_3(x) = \varphi_{1,3}(x) + \frac{1}{\lfloor 2}\varphi_{1,2}(x) + \frac{1}{\lfloor 3}\varphi_{1,1}(x)$$

. . . .

$$\varphi_n(x) = \varphi_{1,n}(x) + \frac{1}{\lfloor 2}\varphi_{1,n-1}(x) + \frac{1}{\lfloor 3}\varphi_{1,n-2}(x) + \ldots + \frac{1}{\lfloor n}\varphi_{1,1}(x)$$

. . . .

En les multipliant réspectivement par z, z^2, z^3, ... z^n, ... et en faisant leur somme, comme ci-dessus, on trouve

$$\frac{z(e^{xz}-1)}{e^z-1} = (e^z-1)\left[\varphi_{1,1}(x) + z\varphi_{1,2}(x) + z^2\varphi_{1,3}(x) + \ldots\right]$$

et de là on conclu un développement

$$\frac{z(e^{xz}-1)}{(e^z-1)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \varphi_{1,n+1}(x)$$

toujours convergent, tant que le *mod.* $z < 2\pi$.

En continuant ainsi on obtiendra, évidémment, pour un entier quelconque ν le développement

$$\frac{z^\nu(e^{xz}-1)}{(e^z-1)^{\nu+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \varphi_{\nu,n+1}(x) \tag{1}$$

convergent, si le *mod.* $z < 2\pi$.

En différentiant la série (1) par rapport à x, on obtient une autre série

$$\frac{z^{\nu+1}e^{xz}}{(e^z-1)^{\nu+1}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \{\varphi_{\nu,n}(x) + A_{\nu,n-1}\} z^n \tag{2}$$

aussi convergente, tant que le *mod.* $z < 2\pi$.

10. On obtient d'autres séries analogues à (1) et à (2) en considérant les fonctions $\psi_{\nu,n}(x)$ au lieu des $\varphi_{\nu,n}(x)$.

En effet, de la première des équations (11) on a:

$$\psi_1(x) = x$$

$$\psi_2(x) = \frac{x^2}{\lfloor 2} + \frac{1}{\lfloor 2}\, x$$

$$\psi_3(x) = \frac{x^3}{\lfloor 3} + \frac{1}{\lfloor 2}\,\frac{x^2}{\lfloor 2} + \frac{1}{\lfloor 3}\,\frac{x}{1}$$

....

$$\psi_n(x) = \frac{x^n}{\lfloor n} + \frac{1}{\lfloor 2}\,\frac{x^{n-1}}{\lfloor n-1} + \frac{1}{\lfloor 3}\,\frac{x^{n-2}}{\lfloor n-2} + \ldots + \frac{1}{\lfloor n}\,\frac{x}{1}$$

....

une suite indéfinie d'égalités qui, multipliées réspectivement par z^2, z^3, z^4, ... z^{n+1}, ... et ajoutées, donnent

$$z^2\psi_1(x) + z^3\psi_2(x) + z^4\psi_3(x) + \ldots + z^{n+1}\psi_n(x) + \ldots = (e^z-1)(e^{xz}-1)$$

un développement toujours convergent. Il s'en suit

$$\frac{(e^z-1)(e^{xz}-1)}{z^2} = \psi_1(x) + z\psi_2(x) + z^2\psi_3(x) + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \psi_{n+1}(x).$$

De même, la deuxième des équations (11) donne

$$\psi_{1,1}(x) = \psi_1(x)$$

$$\psi_{1,2}(x) = \psi_2(x) + \frac{1}{\lfloor 2}\psi_1(x)$$

$$\psi_{1,3}(x) = \psi_3(x) + \frac{1}{\lfloor 2}\psi_2(x) + \frac{1}{\lfloor 3}\psi_1(x)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\psi_{1,n}(x) = \psi_n(x) + \frac{1}{\lfloor 2}\psi_{n-1}(x) + \frac{1}{\lfloor 3}\psi_{n-2}(x) + \ldots + \frac{1}{\lfloor n}\psi_1(x)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

En multipliant ces égalités réspectivement par z, z^2, z^3, ..., z^n, ... et en les ajoutant on obtient

$$z\psi_{1,1}(x) + z^2\psi_{1,2}(x) + z^3\psi_{1,3}(x) + \ldots + z^n\psi_{1,n}(x) + \ldots$$

$$= [\psi_1(x) + z\psi_2(x) + z^2\psi_3(x) + \ldots + z^{n-1}\psi_n(x) + \ldots]$$

$$\times \left(z + \frac{z^2}{\lfloor 2} + \frac{z^3}{\lfloor 3} + \ldots + \frac{z^n}{\lfloor n} + \ldots\right)$$

l'égalité, d'où au moyen du développement précédent on déduit une nouvelle série toujours convergente

$$\frac{(e^z-1)^2(e^{xz}-1)}{z^3} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \psi_{1,n+1}(x).$$

En continuant de cette manière on trouvera évidemment, pour un entier quelconque ν, une série

$$\text{(3)} \qquad \frac{(e^z-1)^\nu(e^{xz}-1)}{z^{\nu+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \psi_{\nu-1,n+1}(x),$$

avec sa derivée par rapport à x

$$\text{(4)} \qquad \frac{(e^z-1)^\nu e^{xz}}{z^\nu} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \{\psi_{\nu-1,n}(x) + a_{\nu-1,n-1}\} z^n,$$

qui seront toujours convergentes.

11. Remarquons cependant qu'on peut obtenir le développement (4) beaucoup plus simplement.

En effet, si l'on prend ν fois la différence finie des deux membres de l'égalité

$$e^{xz} = 1 + xz + \frac{x^2 z^2}{\lfloor 2} + \ldots + \frac{x^\nu z^\nu}{\lfloor \nu} + \ldots$$

pour les accroissements $\Delta x = 1$ de x, on obtient la serie

$$e^{xz}(e^z - 1)^\nu = z^\nu + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Delta^\nu x^{\nu+n}}{\lfloor \nu+n} z^{\nu+n},$$

ou

$$\frac{e^{xz}(e^z-1)^\nu}{z^\nu} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Delta^\nu x^{\nu+n}}{\lfloor \nu+n} z^n$$

qui doit être identique avec la série (4). Il est nécessaire, pour cela, que

$$\frac{\Delta^\nu x^{\nu+n}}{\lfloor \nu+n} = \psi_{\nu-1,n}(x) + a_{\nu-1,n-1}$$

Mais il est évident que

$$\Delta x^{\nu+n} = (x+1)^{\nu+n} - x^{\nu+n}$$

$$= (\nu+n)\, x^{\nu+n-1} + \frac{(\nu+n)(\nu+n-1)}{1\,.\,2} x^{\nu+n-2} + \frac{(\nu+n)\,(\nu+n-1)\,(\nu+n-2)}{1\,.\,2\,.\,3} x^{\nu+n-3} + \ldots$$

d'où, en divisant par $\lfloor \nu+n$, on a

$$\frac{\Delta x^{\nu+n}}{\lfloor \nu+n} = \frac{x^{\nu+n-1}}{\lfloor \nu+n-1} + a_0 \frac{x^{\nu+n-2}}{\lfloor \nu+n-2} + a_1 \frac{x^{\nu+n-3}}{\lfloor \nu+n-3} + \ldots + a_{\nu+n-3}\, x + a_{\nu+n-2}$$

ou bien

$$\frac{\Delta x^{\nu+n}}{\lfloor \nu+n} = \psi_{\nu+n-1}(x) + a_{\nu+n-2}$$

Si l'on applique à deux membres de cette égalité $\nu - 1$ fois l'opération Δ, alors, d'après la formule (22) du § I, on aura

$$\frac{\Delta^\nu x^{\nu+n}}{\lfloor \nu+n} = \psi_{\nu-1,n}(x) + a_{\nu-1,n-1} \tag{5}$$

ce qu'il fallait démontrer.

Pour $x = 0$ la formule (5) donne

$$a_{\nu-1,n-1} = \frac{(\Delta^\nu x^{\nu+n})_0}{\lfloor \nu+n} = \frac{\Delta^\nu 0^{\nu+n}}{\lfloor \nu+n}; \tag{6}$$

donc l'expression générale de $\psi_{\nu-1,n}(x)$ est

$$\psi_{\nu-1,n}(x) = \frac{\Delta^\nu x^{\nu+n} - \Delta^\nu 0^{\nu+n}}{\underline{|\nu+n}}$$

On peut remarquer encore que si l'on fait $u_x = x^{\nu+n}$, dans la formule connue du calcul des différences finies

$$\Delta^\nu u_x = u_{x+\nu} - \nu\, u_{x+\nu-1} + \frac{\nu(\nu-1)}{1.2} u_{x+\nu-2} - \ldots + (-1)^\nu u_x,$$

on trouve l'expression générale de $\Delta^\nu x^{\nu+n}$ qui se réduit à $\Delta^\nu 0^{\nu+n}$ pour $x=0$. En substituant ces expressions dans les formules précédentes on aura

(7) $$\psi_{\nu-1,n}(x) + a_{\nu-1,n-1}$$

$$= \frac{1}{\underline{|\nu+n}} \left\{ (x+\nu)^{\nu+n} - \nu(x+\nu-1)^{\nu+n} + \frac{\nu(\nu-1)}{1.2}(x+\nu-2)^{\nu+n} - \ldots + (-1)^\nu x^{\nu+n} \right\}$$

(8) $$a_{\nu-1,n-1} = \frac{\Delta^\nu 0^{\nu+n}}{\underline{|\nu+n}}$$

$$= \frac{1}{\underline{|\nu+n}} \left\{ \nu^{\nu+n} - \nu(\nu-1)^{\nu+n} + \frac{\nu(\nu-1)}{1.2}(\nu-2)^{\nu+n} - \ldots + (-1)^{\nu-1} \nu \right\}$$

Le coéfficient $a_{\nu-1,n-1}$ se trouve ainsi déjà déterminé comme fonction de ses deux indices (n° 6).

Pour faciliter les applications de la formule (8) on peut composer une table des valeurs numériques des $\Delta^\nu 0^{\nu+n}$.

En vue des applications, qui peuvent se présenter ultérieurement, nous donnons ici une petite table de cette éspèce, calculée par de Morgan, et que nous empruntons de l'ouvrage de Bool sur les différences finies. (A Treatise on the Calculus of finite Differences, Ch. II, p. 20.)

	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4	Δ^5	Δ^6	Δ^7	Δ^8	Δ^9	Δ^{10}
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0^2	1	2	0	0	0	0	0	0	0	0
0^3	1	6	6	0	0	0	0	0	0	0
0^4	1	14	36	24	0	0	0	0	0	0
0^5	1	30	150	240	120	0	0	0	0	0
0^6	1	62	540	1560	1800	720	0	0	0	0
0^7	1	126	1806	8400	16800	15120	5040	0	0	0
0^8	1	254	5796	40824	126000	191520	141120	40320	0	0
0^9	1	510	18150	186480	834120	1905120	2328480	1451520	362880	0
0^{10}	1	1022	55080	818520	5103000	16435440	29635200	30240000	16329600	3628800

§ III.

Propriétés diverses des fonctions $\varphi_{\nu,n}(x)$ et $\psi_{\nu,n}(x)$ et de leurs coéfficients.

12. Nous allons profiter des séries obtenues, dans le § précédent, pour en déduire quelques propriétés nouvelles des fonctions $\varphi_{\nu,n}(x)$ et $\psi_{\nu,n}(x)$.

On peut écrire le développement (2), du § II, comme il suit

$$\frac{z^{\nu+1}\, e^{\left(x-\frac{\nu+1}{2}\right)z}}{\left(e^{\frac{z}{2}}-e^{-\frac{z}{2}}\right)^{\nu+1}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{\varphi_{\nu,n}(x) + A_{\nu,n-1}\right\} z^n \tag{1}$$

Si l'on y substitue $z = 2y\sqrt{-1}$, en supposant x et y réelles, alors, en égalant entre eux les parties réelles et les coéfficients de $\sqrt{-1}$, on trouve

$$\frac{y^{\nu+1} \operatorname{Cos}\,[2x-(\nu+1)]\,y}{(\operatorname{Sin} y)^{\nu+1}} = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m\, 2^m \left\{\varphi_{\nu,2m}(x) + A_{\nu,2m-1}\right\} y^{2m} \tag{2}$$

et

$$\frac{y^{\nu+1} \operatorname{Sin}\,[2x-(\nu+1)]\,y}{(\operatorname{Sin} y)^{\nu+1}} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m\, 2^{2m+1} \left\{\varphi_{\nu,2m+1}(x) + A_{\nu,2m}\right\} y^{2m+1} \tag{3}$$

deux séries convergentes pour $y < \pi$.

En posant maintenant $2x-(\nu+1) = 2\xi$ et $2x-(\nu+1) = -2\xi$, on obtiendra, évidemment, les mêmes résultats de ces deux substitutions dans le premier membre de (2), mais—les résultats égaux avec des signes contraires dans le premier membre de (3). Comme il doit en être de même dans leurs seconds membres, on en conclut que

$$\varphi_{\nu,2m}\left(\frac{\nu+1}{2}-\xi\right) = \varphi_{\nu,2m}\left(\frac{\nu+1}{2}+\xi\right) \tag{4}$$

et

$$\varphi_{\nu,2m+1}\left(\frac{\nu+1}{2}-\xi\right) + A_{\nu,2m} = -\left[\varphi_{\nu,2m+1}\left(\frac{\nu+1}{2}+\xi\right) + A_{\nu,2m}\right] \tag{5}$$

On peut obtenir des équations (4) et (5) les conséquences suivantes:

1) Pour $\xi = \pm\frac{\nu+1}{2}$ on trouve les égalités:

$$\varphi_{\nu,2m}(\nu+1) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi_{\nu,2m+1}(\nu+1) + 2A_{\nu,2m} = 0 \tag{6}$$

c'est à dire, que les équations

$$\varphi_{\nu, 2m}(x) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi_{\nu, 2m+1}(x) + 2A_{\nu, 2m} = 0$$

ont une racine $\nu + 1$ positive et entière, égale au nombre ν, indiquant l'ordre des fonctions $\varphi_{\nu, 2m}(x)$ et $\varphi_{\nu, 2m+1}(x)$, augmenté d'une unité.

2) Pour $\xi = 0$ l'équation (4) devient identique et de l'équation (5) on a

$$\varphi_{\nu, 2m+1}\left(\frac{\nu+1}{2}\right) + A_{\nu, 2m} = 0 \tag{7}$$

c'est à dire l'équation $\varphi_{\nu, 2m+1}(x) + A_{\nu, 2m} = 0$ a une racine $\frac{1}{2}(\nu + 1)$, ce qui montre que la fonction $\varphi_{\nu, 2m+2}(x)$ peut avoir la valeur maximum ou minimum pour $x = \frac{1}{2}(\nu+1)$.

3) En posant $m = 0$ dans l'égalité (7), on a

$$A_{\nu, 0} = -\frac{\nu+1}{2}. \tag{8}$$

13. On obtient les propriétés analogues de la fonction $\psi_{\nu, n}(x)$ par la série (4), du § II, qu'on peut présenter sous la forme suivante

$$\frac{\left(e^{\frac{1}{2}z} - e^{-\frac{1}{2}z}\right)^{\nu+1} e^{\left(x + \frac{\nu+1}{2}\right)z}}{z^{\nu+1}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{\psi_{\nu, n}(x) + a_{\nu, n-1}\right\} z^n \tag{9}$$

Par la substitution $z = 2y\sqrt{-1}$ et en supposant x et y réelles, on déduit de là

$$\frac{(\operatorname{Sin} y)^{\nu+1} \operatorname{Cos}[2x+\nu+1]y}{y^{\nu+1}} = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m 2^{2m} \left\{\psi_{\nu, 2m}(x) + a_{\nu, 2m-1}\right\} y^{2m} \tag{10}$$

$$\frac{(\operatorname{Sin} y)^{\nu+1} \operatorname{Sin}[2x+\nu+1]y}{y^{\nu+1}} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m 2^{2m+1} \left\{\psi_{\nu, 2m+1}(x) + a_{\nu, 2m}\right\} y^{2m+1} \tag{11}$$

deux séries toujours convergentes. Si l'on y substitue

$$2x + \nu + 1 = 2\xi \quad \text{ou} \quad 2x + \nu + 1 = -2\xi$$

on voit, en considérant les premiers membres de (10) et (11), que les résultats de ces deux substitutions doivent être les mêmes pour (10), — les mêmes, mais avec des signes contraires, pour (11).

Donc

$$\psi_{\nu, 2m}\left(-\frac{\nu+1}{2} + \xi\right) = \psi_{\nu, 2m+1}\left(-\frac{\nu+1}{2} - \xi\right) \tag{12}$$

et

$$\psi_{\nu,2m+1}\left(-\frac{\nu+1}{2}+\xi\right)+a_{\nu,2m}=-\left[\psi_{\nu,2m+1}\left(-\frac{\nu+1}{2}-\xi\right)+a_{\nu,2m}\right] \quad (13)$$

d'où il résulte: 1) pour $\xi=\pm\frac{\nu+1}{2}$,

$$\psi_{\nu,2m}(-(\nu+1))=0,\ \psi_{\nu,2m+1}(-(\nu+1))+2a_{\nu,2m}=0; \quad (14)$$

2) pour $\xi=0$,

$$\psi_{\nu,2m+1}\left(-\frac{\nu+1}{2}\right)+a_{\nu,2m}=0 \quad (15)$$

et 3) si l'on fait $m=0$, dans la dernière égalité,

$$a_{\nu,0}=\frac{\nu+1}{2}. \quad (16)$$

14. Nous avons vu plus haut (n° 6), qu'on peut calculer, par la formule (14) du § I, les coéfficients de la fonction $\varphi_{\nu,n}(x)$, après avoir trouvé ceux des fonctions $\varphi_n(x)$,, $\varphi_{1,n}(x)$, ... $\varphi_{\nu-1,n}(x)$. A l'aide des séries précédentes on trouve facilement d'autres formules plus commodes, permettant de calculer les coéfficients $A_{\nu,0}$, $A_{\nu,1}$, $A_{\nu,2}$, ... ne sachant que les valeurs numériques de $a_{\nu,0}$, $a_{\nu,1}$ $a_{\nu,2}$, ... qu'on peut trouver dans la table analogue à celle du n° 11.

En éffet, il suffit pour celà de prendre les cas particuliers, pour $x=0$, des séries (2) et (4) du § II, à savoir:

$$\frac{z^{\nu+1}}{(e^z-1)^{\nu+1}}=1+A_{\nu,0}z+A_{\nu,1}z^2+\ldots+A_{\nu,n-1}z^n+\ldots,$$

$$\frac{(e^z-1)^{\nu+1}}{z^{\nu+1}}=1+a_{\nu,0}z+a_{\nu,1}z^2+\ldots+a_{\nu,n-1}z^n+\ldots$$

et de les multiplier l'une par l'autre. On aura

$$1=1+(A_{\nu,0}+a_{\nu,0})z+(A_{\nu,1}+a_{\nu,0}A_{\nu,0}+a_{\nu,1})z^2+\ldots$$

$$\ldots+(A_{\nu,n-1}+a_{\nu,0}A_{\nu,n-2}+a_{\nu,1}A_{\nu,n-3}+\ldots+a_{\nu,n-2}A_{\nu,0}+a_{\nu,n-1})z^n+\ldots$$

une série équivalente à une suite indéfinie d'équations:

$$A_{\nu,0}+a_{\nu,0}=0 \quad (17)$$

$$A_{\nu,1}+a_{\nu,0}A_{\nu,0}+a_{\nu,1}=0$$

. . . .

$$A_{\nu,n-1} + a_{\nu,0}A_{\nu,n-2} + a_{\nu,1}A_{\nu,n-3} + \ldots + a_{\nu,n-2}A_{\nu,0} + a_{\nu,n-1} = 0$$

. . . .

d'où l'on déduit un à un tous les coéfficients $A_{\nu,0}$, $A_{\nu,1}$, $A_{\nu,2}$, ... si l'on a à sa disposition la table des valeurs numériques de $\Delta^\nu 0^{\nu+n}$. Dans le cas particulier $\nu = 0$ les équations (17) deviennent

$$A_0 + \frac{1}{\lfloor 2} = 0,\ A_1 + \frac{1}{\lfloor 2} A_0 + \frac{1}{\lfloor 3} = 0,\ \ldots$$

$$A_{n-1} + \frac{1}{\lfloor 2} A_{n-2} + \frac{1}{\lfloor 3} A_{n-3} + \ldots + \frac{1}{\lfloor n} A_0 + \frac{1}{\lfloor n+1} = 0,\ \ldots$$

les conditions (2) du § I, que nous avons admises dans la définition même des fonctions $\varphi_n(x)$.

15. Comme on sait, une propriété très générale des fonctions primitives de Bernoulli, $\varphi_n(x)$, s'exprime par un théorème dû à Raabe[1]). Un théorème analogue existe, comme nous allons le faire voir, pour les fonctions généralisées de Bernoulli, $\varphi_{\nu,n}(x)$.

Si, en supposant k entier, on prend l'égalité

$$\frac{e^z-1}{e^{\frac{z}{k}}-1} = e^{\frac{z}{k}(k-1)} + e^{\frac{z}{k}(k-2)} + \ldots + e^{\frac{z}{k}} + 1,$$

et qu'on l'éleve à la puissance entière et positive ν, on aura

$$\left(\frac{e^z-1}{e^{\frac{z}{k}}-1}\right)^\nu = \sum_p \frac{\lfloor \nu}{\lfloor p_1 \cdot \lfloor p_2 \ldots \lfloor p_\nu} e^{\frac{z}{k}[(k-1)p_1 + (k-2)p_2 + \ldots + 2p_{\nu-2} + p_{\nu-1}]}$$

le signe $\sum\limits_p$ se rapportant à toutes les valeurs des p_1, p_2, ... $p_{\nu-1}$, p_ν nulles ou positives, au plus égales à ν, et vérifiant la condition

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_{\nu-1} + p_\nu = \nu.$$

Par la multiplication des deux membres de la dernière égalité par $\frac{z^\nu e^{xz}}{(e^z-1)^\nu}$ on obtient

$$\frac{z^\nu e^{xz}}{(e^{\frac{z}{k}}-1)^\nu} = \sum \frac{\lfloor \nu}{\lfloor p_1 \lfloor p_2 \ldots \lfloor p_\nu} \frac{z^\nu . e^{\left[x + \frac{(k-1)p_1 + (k-2)p_2 + \ldots + p_{\nu-1}}{k}\right] z}}{(e^z-1)^\nu}$$

1) Crelle Journ. 42 B. 356 S.

l'égalité, dont on peut développer les deux membres par la formule (2) du § II en séries suivant les puissances de z.

En effet, en posant, pour abréger,

$$(k-1)p_1 + (k-2)p_2 + \ldots + 2p_{n-2} + p_{\nu-1} = s_p,$$

on aura ainsi

$$k^\nu \left\{1 + \sum_{n=1}^{\infty} [\varphi_{\nu-1,n}(kx) + A_{\nu-1,n-1}] \left(\tfrac{z}{k}\right)^n\right\}$$

$$= \sum_p \frac{\lfloor\nu}{\lfloor p_1 \lfloor p_2 \ldots \lfloor p_\nu} \left\{1 + \sum_{n=1}^{\infty} [\varphi_{\nu-1,n}(x + \tfrac{s_p}{k}) + A_{\nu-1,n-1}] z^n\right\}$$

$$= k^\nu + \sum_{n=1}^{\infty} z^n \left\{k^\nu A_{\nu-1,n-1} + \sum_p \frac{\lfloor\nu}{\lfloor p_1 \lfloor p_2 \ldots \lfloor p_\nu} \varphi_{\nu-1,n}(x + \tfrac{s_p}{k})\right\}$$

Enfin, en comparant les coéfficients de z^n dans les deux séries égales, on trouve

$$\frac{1}{k^{n-\nu}} [\varphi_{\nu-1,n}(kx) + (1-k^n) A_{\nu-1,n-1}] = \sum_p \frac{\lfloor\nu}{\lfloor p_1 \lfloor p_2 \ldots \lfloor p_\nu} \varphi_{\nu-1,n}(x + \tfrac{s_p}{k}) \quad (18)$$

l'expression d'un théorème général qu'il fallait démontrer.

Ce théorème contient, comme cas particulier, celui de Raabe. En effet, si $\nu = 1$, pour satisfaire à la condition

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_\nu = \nu = 1,$$

il faut successivement égaler à zéro toutes les quantités $p_1, p_2, \ldots p_\nu$, à l'éxception d'une seule, qu'on fait égale à l'unité. De cette manière on obtient l'équation

$$\frac{1}{k^{n-1}} [\varphi_n(kx) + (1-k^n) A_{n-1}]$$

$$= \varphi_n(x) + \varphi_n(x + \tfrac{1}{k}) + \varphi_n(x + \tfrac{2}{k}) + \ldots + \varphi_n(x + \tfrac{k-1}{k}) \quad (19)$$

exprimant le théorème de Raabe, démontré par lui d'une manière différente.

Remarquons encore un cas particulier de la formule (18). Quand $k = 2$, on a

$$\frac{1}{2^{n-\nu}} [\varphi_{\nu-1,n}(2x) + (1-2^n) A_{\nu-1,n-1}] = \sum_{p=0}^{p=\nu} \frac{\lfloor\nu}{\lfloor p \lfloor \nu-p} \varphi_{\nu-1,n}(x + \tfrac{p}{2}) \quad (20)$$

ce qui pour $x = 0$ devient

$$(21) \quad \frac{1-2^n}{2^{n-\nu}} A_{\nu-1, n-1} = \nu \varphi_{\nu-1, n}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{\nu(\nu-1)}{1.2} \varphi_{\nu-1, n}(1) + \ldots + \nu \varphi_{\nu-1, n}\left(\frac{\nu-1}{2}\right) + \varphi_{\nu-1, n}\left(\frac{\nu}{2}\right)$$

Appliquons la formule (21) au calcul des valeurs

$$\varphi_n\left(\tfrac{1}{2}\right), \varphi_{1,n}\left(\tfrac{1}{2}\right) \text{ et } \varphi_{2,n}\left(\tfrac{1}{2}\right).$$

En posant dans (21) $\nu = 1$, on trouve

$$\varphi_n\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1-2^n}{2^{n-1}} A_{n-1},$$

d'où

$$\varphi_{2m}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1-2^{2m}}{2^{2m-1}} A_{2m-1} \quad \text{et} \quad \varphi_{2m+1}\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \text{ car } A_{2m} = 0.$$

Ces résultats sont connus depuis longtemps.

Pour $\nu = 2$ la formule (21) donne

$$\varphi_{1,n}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1-2^n}{2^{n-1}} A_{1,n-1} - \frac{1}{2} A_{n-2}$$

Si n est pair et égal à $2m$, alors

$$\varphi_{1,2m}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1-2^{2m}}{2^{2m-1}} A_{1,2m-1},$$

car $A_{2m-2} = 0$ à l'exeption du cas $m = 1$, pour lequel on aura

$$\varphi_{1,2}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left[(1-2^2) A_{1,1} - A_0\right].$$

Si le nombre n est impair et égal à $2m + 1$, alors

$$\varphi_{1,2m+1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1-2^{2m+1}}{2^{2m-1}} A_{1,2m} - A_{2m-1}\right).$$

De même, pour $\nu = 3$, après quelques transformations et réductions on trouvera

$$\varphi_{2,n}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1-2^n}{2^{n-1}} A_{2,n-1} - \left(\frac{1-2^{n-1}}{2^n} + 1\right) A_{1,n-2} + \frac{1}{2^3} A_{n-3}.$$

§ IV.

Les développements en séries des puissances entières positives ou negatives des fonctions principales trigonométriques et hyperboliques.

16. Nous n'avons employé jusqu'à présent les séries (1), (2), (3) et (4) du § II que comme un moyen commode de démonstration de certaines propriétés des fonctions $\varphi_{\nu,n}(x)$ et $\psi_{\nu,n}(x)$; maintenant nous nous proposons de nous occuper des transformations et des cas particuliers, les plus remarquables de ces séries.

La série (2) du § II:

$$\frac{z^{\nu+1}e^{xz}}{(e^z-1)^{\nu+1}} = \frac{z^{\nu+1}e^{\left(x-\frac{\nu+1}{2}\right)z}}{\left(e^{\frac{z}{2}}-e^{-\frac{z}{2}}\right)^{\nu+1}} = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\{\varphi_{\nu,n}(x)+A_{\nu,n-1}\}z^n$$

présente des cas particuliers remarquables correspondant aux suppositions: 1) $x=0$, 2) $x=1$, 3) $x=\nu+1$, 4) $x=\frac{\nu+1}{2}$.

Dans les cas 1) et 2) on a:

$$\frac{z^{\nu+1}}{(e^z-1)^{\nu+1}} = 1+A_{\nu,0}\,z+A_{\nu,1}\,z^2+\ldots+A_{\nu,n-1}\,z^n+\ldots \tag{1}$$

$$\frac{z^{\nu+1}e^z}{(e^z-1)^{\nu+1}} = 1+(1+A_{\nu,0})\,z+(A_{\nu-1,0}+A_{\nu,1})\,z^2+\ldots$$

$$\ldots+(A_{\nu-1,n-2}+A_{\nu,n-1})\,z^n+\ldots \tag{2}$$

De là pour $\nu=0$ on retrouve deux séries connues:

$$\frac{z}{e^z-1} = 1+A_0\,z+A_1\,z^2+A_3\,z^4+A_5\,z^6+\ldots,$$

$$\frac{z\,e^z}{e^z-1} = 1+(1+A_0)z+A_1z^2+A_3z^4+A_5z^6+\ldots;$$

mais pour $\nu>0$ on aura des séries nouvelles. Ainsi par exemple pour $\nu=1$ on obtient

$$\frac{z^2}{(e^z-1)^2} = 1+A_{1,0}\,z+A_{1,1}\,z^2+A_{1,2}\,z^3+\ldots$$

$$\frac{z^2 e^z}{(e^z-1)^2} = 1 + (1 + A_{1,0})\, z + (A_0 + A_{1,1})\, z^2 + \dots$$
$$\dots + A_{1,2m-1}\, z^{2m} + (A_{2m-1} + A_{1,2m})\, z^{2m+1} + \dots$$

La fonction $\frac{z^2 e^z}{(e^z-1)^2}$ étant paire, la dernière série ne doit pas contenir des termes avec les puissances impaires de z. Donc on aura généralement $A_{2m-1} + A_{1,2m} = 0$, ce qui est facile à vérifier au moyen de la formule (14) du n° 6 laquelle donne: $A_{1,0} = 2A_0 = -1$, $A_{1,2m} = 2A_0 A_{2m-1} = -A_{2m-1}$.

Par conséquent définitivement on aura

$$\frac{z^2 e^z}{(e^z-1)^2} = 1 + (A_{1,1} - \tfrac{1}{2})\, z^2 + A_{1,3}\, z^4 + A_{1,5}\, z^6 + \dots$$

Dans le cas 3) $x = \nu + 1$, à cause des formules (6) du § III, on a

$$\text{(3)} \qquad \left(\frac{z e^z}{e^z - 1}\right)^{\nu+1} = 1 - A_{\nu,0}\, z + A_{\nu,1}\, z^2 - A_{\nu,2}\, z^3 + A_{\nu,3}\, z^4 - \dots$$

Par l'addition et la soustraction des séries (1) et (3) il vient

$$\text{(4)} \qquad \frac{z^{\nu+1}(e^{(\nu+1)z} + 1)}{2(e^z-1)^{\nu+1}} = 1 + A_{\nu,1}\, z^2 + A_{\nu,3}\, z^4 + \dots + A_{\nu,2m-1}\, z^{2m} + \dots$$

$$\text{(5)} \qquad \frac{z^{\nu+1}(e^{(\nu+1)z} - 1)}{2(e^z-1)^{\nu+1}} = A_{\nu,0}\, z + A_{\nu,2}\, z^3 + A_{\nu,4}\, z^5 + \dots + A_{\nu,2m}\, z^{2m+1} + \dots$$

De même les formules (2) et (3) du § III pour $x = \nu + 1$ deviennent:

$$\text{(6)} \qquad \frac{y^{\nu+1}\,\mathrm{Cos}\,(\nu+1)\,y}{(\mathrm{Sin}\,y)^{\nu+1}} = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m\, 2^{2m}\, A_{\nu,2m-1}\, y^{2m}$$

$$\text{(7)} \qquad \frac{y^{\nu+1}\,\mathrm{Sin}\,(\nu+1)\,y}{(\mathrm{Sin}\,y)^{\nu+1}} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m+1}\, 2^{2m+1}\, A_{\nu,2m}\, y^{2m+1}$$

Il est presque superflu de dire que, les conditions de convergence étant indépendantes des valeurs particulières de x, les séries particulières précédentes sont convergentes en même temps que les séries générales dont elles sont déduites.

Enfin dans le cas 4) $x = \frac{\nu+1}{2}$ la formule (2) du § II, à cause de la formule (7) du § III, donne

$$\text{(8)} \qquad \frac{z^{\nu+1}}{\left(e^{\frac{z}{2}} - e^{-\frac{z}{2}}\right)^{\nu+1}} = \left(\frac{z}{2\,sh\,\frac{z}{2}}\right)^{\nu+1} = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{\varphi_{\nu,2m}\left(\frac{\nu+1}{2}\right) + A_{\nu,2m-1}\right\} z^{2m}$$

une série convergente pour *mod.* $z < 2\pi$.

Si l'on y change z en $2z\sqrt{-1}$, on aura

$$\left(\frac{z}{\operatorname{Sin} z}\right)^{\nu+1} = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m\, 2^{2m} \left\{\varphi_{\nu,\,2m}\left(\frac{\nu+1}{2}\right) + A_{\nu,\,2m-1}\right\} z^{2m} \tag{9}$$

une série convergente pour *mod.* $z < \pi$.

Pour $\nu = 0$ on déduit de (9) la série connue

$$\frac{z}{\operatorname{Sin} z} = 1 + 2\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m\,(1-2^{2m-1})\, A_{2m-1}\, z^{2m};$$

car d'après le n° 15 on a

$$2^{2m}\left\{\varphi_{2m}\left(\frac{1}{2}\right) + A_{2m-1}\right\} = 2^{2m}\left(\frac{1-2^{2m}}{2^{2m-1}} + 1\right) A_{2m-1} = 2\,(1 - 2^{2m-1})\, A_{2m-1}.$$

Pour avoir un cas nouveau il suffit de prendre $\nu = 1$, alors nous avons

$$2^{2m}\left\{\varphi_{1,\,2m}(1) + A_{1,\,2m-1}\right\} = 2^{2m}\left\{A_{2m-2} + A_{1,\,2m-1}\right\},$$

où $A_{2m-2} = \begin{cases} 0, \text{ pour } m > 1 \\ -\frac{1}{2}, \text{ pour } m = 1 \end{cases}$; donc

$$\frac{z^2}{\operatorname{Sin}^2 z} = 1 - 2^2\left(A_{1,1} - \tfrac{1}{2}\right) z^2 + 2^4 A_{1,3}\, z^4 - \ldots + (-1)^m\, 2^{2m} A_{1,\,2m-1}\, z^{2m} + \ldots$$

On peut aussi obtenir cette série de celle qui a été donnée ci-dessus pour le développement de $\frac{z^2 e^z}{(e^z-1)^2}$.

A l'aide de l'expression de $\varphi_{2,n}\left(\frac{1}{2}\right)$ donnée au n° 15 on trouvera, pour $\nu = 2$,

$$\frac{z^3}{\operatorname{Sin}^3 z} = 1 - \left\{2\,(1-2)\, A_{2,1} + \tfrac{3}{2}\right\} z^2 + \left\{2\,(1-2^3)\, A_{2,3} + 3\,(2^2 + 2 - 1)\, A_1\right\} z^4 +$$
$$\ldots + (-1)^m \left\{2\,(1 - 2^{2m-1})\, A_{2,\,2m-1} + 3\,(2^{2m-2} + 2^{2m-3} - 1)\, A_{2m-3}\right\} z^{2m} + \ldots$$

17. Les développements de $(z \operatorname{Coth} z)^\nu$ et de $(z \operatorname{Cotg} z)^\nu$.

En multipliant par $\frac{z^\nu}{(e^z-1)^\nu}$ les deux membres de l'égalité

$$(e^z + 1)^\nu = \sum_{p=0}^{p=\nu} \frac{\lfloor\nu}{\lfloor p\, \lfloor\nu-p}\, e^{pz}$$

on a

$$\frac{z^\nu (e^z+1)^\nu}{(e^z-1)^\nu} = \sum_{p=0}^{p=\nu} \frac{\lfloor\nu}{\lfloor p\, \lfloor\nu-p}\, \frac{z^\nu e^{pz}}{(e^z-1)^\nu}$$

De là, par la formule (2) du § II, il vient

$$\frac{z^\nu (e^z + 1)^\nu}{(e^z - 1)^\nu} = \sum_{p=0}^{p=\nu} \frac{\underline{|\nu}}{\underline{|p}\,\underline{|\nu-p}} \left\{1 + \sum_{n=1}^{\infty} [\varphi_{\nu-1,n}(p) + A_{\nu-1,n-1}]\, z^n\right\}$$

$$= 2^\nu + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{2^\nu A_{\nu-1,n-1} + \sum_{p=0}^{p=\nu} \frac{\underline{|\nu}}{\underline{|p}\,\underline{|\nu-p}}\, \varphi_{\nu-1,n}(p)\right\} z^n$$

une série convergente pour *mod.* $z < 2\pi$. En y changeant z en $2z$ on aura

$$(z \operatorname{Coth} z)^\nu = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{2^\nu A_{\nu-1,n-1} + \sum_{p=0}^{p=\nu} \frac{\underline{|\nu}}{\underline{|p}\,\underline{|\nu-p}}\, \varphi_{\nu-1,n}(p)\right\} 2^{\nu-n} z^n$$

une série convergente pour *mod.* $z < \pi$.

Mais le premier membre de cette égalité étant la fonction paire de z, le second ne doit pas contenir des puissances impaires de z. Donc il est nécessaire que pour chaque valeur impaire de $n = 2m + 1$, il existe des égalités:

$$2^\nu A_{\nu-1,2m} + \sum_{n=0}^{p=\nu} \frac{\underline{|\nu}}{\underline{|p}\,\underline{|\nu-p}}\, \varphi_{\nu-1,2m+1}(p) = 0$$

Cela posé, la série précédente prendra la forme

$$\textbf{(10)}\quad (z \operatorname{Coth} z)^\nu = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{2^\nu A_{\nu-1,2m-1} + \sum_{p=0}^{p=\nu} \frac{\underline{|\nu}}{\underline{|p}\,\underline{|\nu-p}}\, \varphi_{\nu,2m}(p)\right\} 2^{2m-\nu} z^{2m}$$

et par changement de z en $z\sqrt{-1}$ elle deviendra

$$\textbf{(11)}\quad (z \operatorname{Cotg} z)^\nu = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \left\{2^\nu A_{\nu-1,2m-1} + \sum_{p=0}^{p=\nu} \frac{\underline{|\nu}}{\underline{|p}\,\underline{|\nu-p}}\, \varphi_{\nu,2m}(p)\right\} 2^{2m-\nu} z^{2m}$$

Pour $\nu = 1$ le coéfficient du terme général est

$$2A_{2m-1} + \varphi_{2m}(1) = 2A_{2m-1}$$

donc on obtient une série connue

$$z \operatorname{Cotg} z = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m\, 2^{2m} A_{2m-1}\, z^{2m}$$

Pour $\nu = 2$ on a $2^2 A_{1,2m-1} + 2\,\varphi_{1,2m}(1) + \varphi_{1,2m}(2)$ le coéfficient du terme général; mais nous avons $\varphi_{1,2m}(2) = 0$ et $\varphi_{1,2m}(1) = A_{2m-2} = \begin{cases} 0, \text{ pour } m > 1 \\ -\frac{1}{2}, \text{ pour } m = 1 \end{cases}$; donc

$$(z \operatorname{Cotg} z)^2 = 1 - (2^2 A_{1,1} - 1) z^2 + 2^4 A_{1,3} z^4 - 2^6 A_{1,5} z^6 + \ldots$$

Cette série s'accorde parfaitement avec celle que nous avons donnée pour le développement de $\frac{z^2}{\operatorname{Sin}^2 z}$.

Pour $\nu = 3$ on trouve tout aussi facilement

$$(z \operatorname{Cotg} z)^3 = 1 - (4 A_{2,1} - 3) z^2 + 2^2 (4 A_{2,3} - 3 A_1) z^4 - \ldots$$

$$\ldots + (-1)^m\, 2^{2m-2} (4 A_{2,2m-1} - 3 A_{2m-3}) z^{2m} + \ldots$$

18. Passons à d'autres développements du même genre et en particulier à celui de la puissance entière et négative de Cos z.

On commencera par l'égalité

$$\left(e^{\frac{1}{2}z} - 1\right)^\nu = \sum_{p=0}^{p=\nu} (-1)^p \frac{\lfloor \nu}{\lfloor p \lfloor \nu - p} e^{\frac{1}{2}(\nu - p) z}$$

qui, multipliée par $\frac{z^\nu e^{xz}}{(e^z - 1)^\nu}$, devient

$$\frac{z^\nu e^{xz}}{\left(e^{\frac{1}{2}z} + 1\right)^\nu} = \sum_{p=0}^{p=\nu} (-1)^p \frac{\lfloor \nu}{\lfloor p \lfloor \nu - p} \frac{z^\nu e^{\left(x + \frac{\nu - p}{2}\right) z}}{(e^z - 1)^\nu}.$$

En développant le terme général de la somme par la série

$$\frac{z^\nu e^{\left(x + \frac{\nu - p}{2}\right) z}}{(e^z - 1)^\nu} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \varphi_{\nu-1,n}\left(x + \frac{\nu - p}{2}\right) + A_{\nu-1,n-1} \right\} z^n,$$

qui est convergente pour *mod.* $z < 2\pi$, et remarquant que

$$\sum_{p=0}^{p=\nu} (-1)^p \frac{\lfloor \nu}{\lfloor p \lfloor \nu - p} = 0,$$

on obtient

$$\frac{z^\nu e^{xz}}{\left(e^{\frac{z}{2}}+1\right)^\nu} = \sum_{p=0}^{p=\nu} (-1)^p \frac{\lfloor \nu}{\lfloor p \lfloor \nu-p} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{\nu-1,n}\left(x+\frac{\nu-p}{2}\right) z^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} z^n \sum_{p=0}^{p=\nu} \frac{(-1)^p \lfloor \nu}{\lfloor p \lfloor \nu-p} \varphi_{\nu,n}\left(x+\frac{\nu-p}{2}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{\nu-1,n}(x) z^n,$$

si l'on pose, pour abréger,

$$\Phi_{\nu-1,n}(x) = \varphi_{\nu-1,n}\left(x+\frac{\nu}{2}\right) - \nu\,\varphi_{\nu-1,n}\left(x+\frac{\nu-1}{2}\right) + \frac{\nu(\nu-1)}{1.2}\varphi_{\nu-1,n}\left(x+\frac{\nu-2}{2}\right) -$$

(12) $$\ldots + (-1)^{\nu-1}\nu\,\varphi_{\nu-1,n}\left(x+\frac{1}{2}\right) + (-1)^\nu \varphi_{\nu-1,n}(x).$$

Le développement précédent doit avoir lieu pour toutes les valeurs de z satisfaisant à la condition *mod.* $z < 2\pi$, y compris la valeur $z=0$. Mais si l'on divise les deux membres de l'égalité par z^ν et si l'on y fait ensuite $z=0$, son premier membre sera égal à $\frac{1}{2^\nu}$, tandis que les premiers $\nu - 1$ termes du second membre deviendraient infiniment grands, si leurs coéfficients ne seraient pas égaux à zéro. De là on peut conclure l'éxistence nécessaire des identités

$$\Phi_{\nu-1,n}(x) = 0,$$

pour $n = 1, 2, 3, \ldots \nu - 1$, et

$$\Phi_{\nu-1,n}(x) = \frac{1}{2^\nu}.$$

En vertu de ces identités on aura

$$\frac{e^{xz}}{\left(e^{\frac{1}{2}z}+1\right)^\nu} = \frac{1}{2^\nu} + \sum_{n=\nu+1}^{\infty} \Phi_{\nu-1,n}(x) z^{n-\nu} = \frac{1}{2^\nu} + \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_{\nu-1,\nu+k}(x) z^k$$

d'où, par changement de z en $2z$, il vient

(13) $$\frac{e^{2xz}}{(e^z+1)^\nu} = \frac{1}{2^\nu} + \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \Phi_{\nu-1,\nu+k}(x) z^k.$$

Pour $x = 0$ le développement précédent est

$$(14)\qquad \frac{1}{(e^z+1)^\nu} = \frac{1}{2^\nu} + \sum_{k=1}^{\infty} 2^k\, \Phi_{\nu-1,\nu+k}(0)\, z^k$$

où d'après la formule (12) il faut poser

$$(15)\qquad \Phi_{\nu-1,\nu+k}(0) = \varphi_{\nu-1,\nu+k}\left(\frac{\nu}{2}\right) - \nu\, \varphi_{\nu-1,\nu+k}\left(\frac{\nu-1}{2}\right) + \frac{\nu(\nu-1)}{1.2}\, \varphi_{\nu-1,\nu+k}\left(\frac{\nu-2}{2}\right) - \ldots + (-1)^\nu\, \varphi_{\nu-1,\nu+k}\left(\frac{1}{2}\right).$$

Les séries (13) et (14) sont convergentes pour *mod.* $z < \pi$. Sans entrer dans les détails du calcul, d'ailleurs faciles, donnons des exemples, les plus simples, de l'application de la formule (14). Pour $\nu = 1$ on aura le développement connu

$$\frac{1}{e^z+1} = \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} 2^{2m-1}\, \varphi_{2m}\left(\frac{1}{2}\right) z^{2m-1}$$

$$= \frac{1}{2} + (1-2^2)\, A_1 z + (1-2^4)\, A_3 z^3 + \ldots + (1-2^{2m})\, A_{2m-1}\, z^{2m} + \ldots$$

Pour $z = 2$ on trouve

$$\frac{1}{(e^z+1)^2} = \frac{1}{2^2} - (2^2-1)\, A_1 z + (2^4-1)\, A_{1,3} z^2 - (2^4-1)\, A_3 z^3 +$$
$$\ldots + (2^{2m}-1)\, A_{1,2m-1}\, z^{2m-2} - (2^{2m}-1)\, A_{2m-1}\, z^{2m-1} + \ldots$$

Enfin, par la soustraction de la dernière série de l'avant dernière on aura

$$\frac{e^z}{(1+e^z)^2} = \frac{1}{2^2} + (1-2^4)\, A_{1,3}\, z^2 + \ldots + (1-2^{2m})\, A_{1,2m-1}\, z^{2m-2} + \ldots$$

19. On peut écrire la formule (13) comme il suit

$$(16)\qquad \frac{e^{(2x-\frac{1}{2}\nu)z}}{(2\,\mathrm{Ch}\,\frac{z}{2})^\nu} = \frac{1}{2^\nu} + \sum_{k=1}^{\infty} 2^k\, \Phi_{\nu-1,\nu+k}(x)\, z^k$$

Si l'on y fait $x = \frac{1}{4}\nu$, en changeant en même temps z en $2z$, il vient

$$\frac{1}{(\mathrm{Ch}\,z)^\nu} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} 2^{\nu+2k}\, \Phi_{\nu-1,\nu+k}\left(\frac{1}{4}\nu\right) z^k$$

Or la fonction dans le premier membre étant paire, les coéfficients des puissances impaires de z dans le second membre doivent disparaître, il s'en suit que

$$\Phi_{\nu-1,\,\nu+k}\left(\frac{1}{4}\,\nu\right)=0$$

pour toutes les valeurs impaires de k. Par conséquent

(17) $$\frac{1}{(\mathrm{Ch}\,z)^\nu}=1+\sum_{m=1}^{\infty}2^{\nu+4m}\,\Phi_{\nu-1,\,\nu+2m}\left(\frac{1}{4}\,\nu\right)z^{2m}$$

et en y changeant z en $z\sqrt{-1}$, on aura

(18) $$\frac{1}{(\mathrm{Cos}\,z)^\nu}=1+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\,2^{\nu+4m}\,\Phi_{\nu-1,\,\nu+2m}\left(\frac{1}{4}\,\nu\right)z^{2m}$$

deux séries convergentes pour *mod.* $z<\frac{\pi}{2}$.

Pour $\nu=1$ et $\nu=2$ on en déduit

$$\frac{1}{\mathrm{Cos}\,z}=1+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\,2^{4m+2}\,\varphi_{2m+1}\left(\frac{1}{4}\right)z^{2m},$$

$$\frac{1}{\mathrm{Cos}^2 z}=1+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\,(1-2^{2m+2})\,2^{2m+2}\,A_{1,\,2m+1}\,z^{2m}.$$

Remarque. De la formule (16) on obtiendra deux séries plus générales en y substituant $z=2y\sqrt{-1}$ et en supposant x et y réelles. De cette manière on aura:

(19) $$\frac{\mathrm{Cos}\,(4x-\nu)y}{(\mathrm{Cos}\,y)^\nu}=1+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\,2^{4m+\nu}\,\Phi_{\nu-1,\,\nu+2m}(x)\,y^{2m}$$

(20) $$\frac{\mathrm{Sin}\,(4x-\nu)\,y}{(\mathrm{Cos}\,y)^\nu}=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\,2^{4m+\nu+2}\,\Phi_{\nu-1,\,\nu+2m+1}(x)\,y^{2m+1}$$

Si l'on y fait $4x-\nu=4\xi$ et $4x-\nu=-4\xi$ on voit tout de suite, par les propriétés de cosinus et de sinus, qu'il doit y avoir lieu les rélations

$$\Phi_{\nu-1,\,\nu+2m}\left(\frac{1}{4}\,\nu+\xi\right)=\Phi_{\nu-1,\,\nu+2m}\left(\frac{1}{4}\,\nu-\xi\right)$$

et

$$\Phi_{\nu-1,\,\nu+2m+1}\left(\frac{1}{4}\nu+\xi\right)=-\Phi_{\nu-1,\,\nu+2m+1}\left(\frac{1}{4}\nu-\xi\right)$$

Donc 1) pour $\xi=0$ on obtiendra la série (18) de (19) et en même temps les identités

$$\Phi_{\nu-1,\,\nu+2m+1}\left(\frac{1}{4}\nu\right)=0,$$

comme ci-dessus;

2) pour $\xi=\frac{1}{4}\nu$ on trouvera

$$\Phi_{\nu-1,\,\nu+2m}\left(\frac{1}{2}\nu\right)=\Phi_{\nu-1,\,\nu+2m}(0)\quad\text{et}\quad\Phi_{\nu-1,\,\nu+2m+1}\left(\frac{1}{2}\nu\right)=\Phi_{\nu-1,\,\nu+2m+1}(0);$$

3) enfin pour $x=0$ les formules (19) et (20) donnent

$$\frac{\operatorname{Cos}\nu y}{(\operatorname{Cos}y)^{\nu}}=1+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m}\,2^{4m+\nu}\,\Phi_{\nu-1,\,\nu+2m}(0)\,y^{2m}\tag{21}$$

$$\frac{\operatorname{Sin}\nu y}{(\operatorname{Cos}y)^{\nu}}=\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\,2^{4m+\nu+2}\,\Phi_{\nu-1,\,\nu+2m+1}(0)\,y^{2m+1}\tag{22}$$

20. Occupons nous enfin des développements de $(\operatorname{th}z)^{\nu}$ et de $(\operatorname{tg}z)^{\nu}$. En partant de l'égalité

$$\left(\frac{e^{z}-1}{e^{z}+1}\right)^{\nu}=\sum_{p=0}^{p=\nu}(-1)^{p}\,\frac{\lfloor\nu}{\lfloor p\,\lfloor\nu-p}\,\frac{e^{(\nu-p)z}}{(e^{z}+1)^{\nu}}$$

et en développant le terme général de la somme par la formule (13), on a

$$\left(\frac{e^{z}-1}{e^{z}+1}\right)^{\nu}=\sum_{k=1}^{\infty}2^{k}z^{k}\sum_{p=0}^{p=\nu}(-1)^{p}\,\frac{\lfloor\nu}{\lfloor p\,\lfloor\nu-p}\,\Phi_{\nu-1,\,\nu+k}\left(\frac{\nu-p}{2}\right)$$

ou, si l'on pose, pour abréger,

$$\Psi_{\nu-1,\,\nu+k}\left(\frac{\nu-p}{2}\right)=\sum_{p=0}^{p=\nu}(-1)^{p}\,\frac{\lfloor\nu}{\lfloor p\,\lfloor\nu-p}\,\Phi_{\nu-1,\,\nu+k}\left(\frac{\nu-p}{2}\right),\tag{23}$$

$$\left(\frac{e^{z}-1}{e^{z}+1}\right)^{\nu}=\sum_{k=1}^{\infty}2^{k}\,\Psi_{\nu-1,\,\nu+k}\left(\frac{\nu-p}{2}\right)z^{k}\tag{24}$$

Cette série, covergente pour *mod.* $z < \pi$, donne lieu à des remarques analogues à celles que nous avons faites dans le n° précédent. Notamment, si l'on divise les deux membres de (24) par z^ν et que l'on y fait ensuite $z = 0$, le premier membre sera égal à $\frac{1}{2^\nu}$ et les $\nu - 1$ premiers termes du second membre deviendraient infiniment grands si leurs coéfficients ne seraient pas nulles. On en conclut que

$$\Psi_{\nu-1,\,\nu+k}\left(\frac{\nu-p}{2}\right) = 0$$

pour $k = 1, 2, 3, \ldots \nu - 1$ et que pour $k = \nu$ nous aurons

$$\Psi_{\nu-1,\,2\nu}\left(\frac{\nu-p}{2}\right) = \frac{1}{2^{2\nu}}.$$

Par conséquent la formule (24) devient

$$\left(\frac{e^{\frac{z}{2}} - e^{-\frac{z}{2}}}{e^{\frac{z}{2}} + e^{-\frac{z}{2}}}\right)^\nu = \left(\mathrm{th}\,\frac{z}{2}\right)^\nu = \frac{z^\nu}{2^\nu} + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{\nu+n}\, \Psi_{\nu-1,\,2\nu+n}\left(\frac{\nu-p}{2}\right) z^{\nu+n}$$

ou, par changement de z en $2z$,

$$\left(\frac{\mathrm{th}\,z}{z}\right)^\nu = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{2(\nu+n)}\, \Psi_{\nu-1,\,2\nu+n}\left(\frac{\nu-p}{2}\right) z^n.$$

Par la propriété du premier membre de cette égalité il est évident que dans le second membre disparaissent tous les termes avec les puissances impaires de z, c'est à dire que généralement

$$\Psi_{\nu-1,\,2\nu+2m-1}\left(\frac{\nu-p}{2}\right) = 0$$

Par conséquent la série précédente et celle qu'on en déduit en chengeant z en $z\sqrt{-1}$ seront de la forme

$$(25)\qquad (\mathrm{th}\,z)^\nu = z^\nu + \sum_{m=1}^{\infty} 2^{2\nu+4m}\, \Psi_{\nu-1,\,2(\nu+m)}\left(\frac{\nu-p}{2}\right) z^{2m+\nu}$$

$$(26)\qquad (\mathrm{tg}\,z)^\nu = z^\nu + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m\, 2^{2\nu+4m}\, \Psi_{\nu-1,\,2(\nu+m)}\left(\frac{\nu-p}{2}\right) z^{2m+\nu}$$

et resteront convergentes pour *mod.* $z < \frac{\pi}{2}$.

Le facteur $\Psi_{\nu-1,2(\nu+m)}\left(\frac{\nu-p}{2}\right)$ du terme général parait un peu trop compliqué; cependant son calcul dans les cas particuliers ne présente pas de grandes difficultés, comme on le voit par les exemples suivants.

Si $\nu = 1$, alors par les formules (23) et (12) on a:

$$\Psi_{0,2(m+1)}\left(\frac{1-p}{2}\right) = \sum_{p=0}^{p=1}(-1)^p \frac{\lfloor 1}{\lfloor p \lfloor 1-p} \left\{\varphi_{2(m+1)}\left(1-\frac{p}{2}\right) - \varphi_{2,(m+1)}\left(1-\frac{p+1}{2}\right)\right\}$$

$$= \left[\varphi_{2(m+1)}(1) - \varphi_{2(m+1)}\left(\frac{1}{2}\right)\right] - \left[\varphi_{2(m+1)}\left(\frac{1}{2}\right) - \varphi_{2(m+1)}(0)\right]$$

$$= -2\,\varphi_{2(m+1)}\left(\frac{1}{2}\right) = -2\,\frac{1-2^{2m+2}}{2^{2m+1}}\,A_{2m+1} = \frac{2^{2m+2}-1}{2^{2m}}\,A_{2m+1}.$$ Donc

$$(\operatorname{tg} z) = z + \sum_{m=1} (-1)^m\, 2^{2m+2}\,(2^{2m+2}-1)\,A_{2m+1}\,z^{2m+1} = z - 2^4\,(2^4-1)\,A_3\,z^3$$

$$+ 2^6\,(2^6-1)\,A_5\,z^5 - \ldots$$

Pour $\nu = 2$ on trouve

$$\Psi_{1,2(m+2)}\left(\frac{2-p}{2}\right) = \sum_{p=0}^{p=2}(-1)^p \frac{\lfloor 2}{\lfloor p \lfloor 2-p}$$

$$\left\{\varphi_{1,2(m+2)}\left(2-\frac{p}{2}\right) - 2\,\varphi_{1,2(m+2)}\left(2-\frac{p+1}{2}\right) + \varphi_{1,2(m+2)}\left(2-\frac{p+2}{2}\right)\right\}$$

$$= \varphi(2) - 4\,\varphi\left(1+\frac{1}{2}\right) + 6\,\varphi(1) - 4\,\varphi\left(\frac{1}{2}\right) + \varphi(0).$$

En rétablissant les indices 1 et $2(m+2)$ qui doivent affecter φ et qui ont été omis pour plus de simplicité, on aura

$$\varphi_{1,2(m+2)}(0) = 0,\ \varphi_{1,2(m+2)}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1-2^{4m+4}}{2^{2m+3}}\,A_{1,2m+3},\ \varphi_{1,2(m+2)}(1) = A_{2m+2} = 0,$$

$$\varphi_{1,2(m+2)}\left(1+\frac{1}{2}\right) = \varphi_{1,2(m+2)}\left(\frac{1}{2}\right) + \varphi_{2m+3}\left(\frac{1}{2}\right) + A_{2m+2} = \varphi_{1,2(m+2)}\left(\frac{1}{2}\right),\ \varphi_{1,2(m+1)}(2) = 0.$$

Donc

$$\Psi_{1,2(m+2)}\left(\frac{2-p}{2}\right) = -2^3\,\frac{1-2^{4m+4}}{2^{2m+3}}\,A_{1,2m+3} = \frac{2^{2m+4}-1}{2^{2m}}\,A_{1,2m+3}.$$

Par conséquent la formule (26) donne

$$(\operatorname{tg} z)^2 = z^2 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1}\, 2^{4m+7}\,\varphi_{1,2(m+2)}\left(\frac{1}{2}\right) z^{2m+2}$$

ou

$$(\operatorname{tg} z)^2 = z^2 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \, 2^{2m+4} (2^{2m+4} - 1) A_{1,\,2m+3} \, z^{2m+2}$$

$$= z^2 - 2^6 (2^6 - 1) A_{1,5} \, z^4 + 2^8 (2^8 - 1) A_{1,7} \, z^6 - 2^{10} (2^{10} - 1) A_{1,9} \, z^8 + \ldots$$

21. En terminant ce § il nous reste encore à indiquer, en peu de mots, les applications analogues aux précédentes des séries (3) et (4) du § II. Ces applications sont moins variées et il suffit d'en mentionner les suivantes.

En vertu des équations (14) du n° 13, pour $x = -\nu$, les séries ci-dessus mentionnées deviennent:

(27) $$\frac{(1-e^{-\nu z})(e^z-1)^\nu}{2\,z^{\nu+1}} = a_{\nu-1,0} + a_{\nu-1,2} \, z^2 + a_{\nu-1,4} \, z^4 + \ldots$$

(28) $$\left(\frac{e^z-1}{z\,e^z}\right)^\nu = 1 - a_{\nu-1,0} \, z + a_{\nu-1,1} \, z^2 - a_{\nu-1,2} \, z^3 + \ldots$$

De même, des séries (10) et (11) du n° 13 pour $x = -(\nu + 1)$, on déduit:

(29) $$\frac{(\operatorname{Sin} y)^{\nu+1} \operatorname{Cos} (\nu+1)\, y}{y^{\nu+1}} = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \, 2^{2m} \, a_{\nu,\,2m-1} \, y^{2m}$$

(30) $$\frac{(\operatorname{Sin} y)^{\nu+1} \operatorname{Sin} (\nu+1)\, y}{y^{\nu+1}} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \, 2^{2m+1} \, a_{\nu,\,2m} \, y^{2m+1}$$

Pour $x = -\frac{\nu+1}{2}$ la série (10) du n° 13 donne

(31) $$\left(\frac{\operatorname{Sin} y}{y}\right)^{\nu+1} = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \, 2^{2m} \left\{ \psi_{\nu,\,2m} \left(-\frac{\nu+1}{2}\right) + a_{\nu,\,2m-1} \right\} y^{2m}$$

Toutes les séries (27) ... (31) sont toujours convergentes. En appliquant la formule (31) il faut se rappeler que

$$\psi_{\nu,\,2m} \left(-\frac{\nu+1}{2}\right) + a_{\nu,\,2m-1}$$

$$= \frac{1}{\lfloor 2m+\nu+1} \left\{ \left(\frac{\nu+1}{2}\right)^{2m+\nu+1} - (\nu+1)\left(\frac{\nu+1}{2} - 1\right)^{2m+\nu+1} + \frac{(\nu+1)\,\nu}{1.2}\left(\frac{\nu+1}{2} - 2\right)^{2m+\nu+1} - \ldots \right\}$$

De là pour $\nu = 1$ et $\nu = 2$, par exemple, on trouvera

$$\psi_{1,\,2m}(-1) + a_{1,\,2m-1} = \frac{2}{\lfloor 2m+2},$$

$$\psi_{2,\,2m}\left(-\frac{3}{2}\right)+a_{2,2m-1}=\frac{3\,(3^{2m+2}-1)}{2^{2m+2}\,\lfloor\underline{2m+3}}$$

et, par conséquent,

$$\frac{\operatorname{Sin}^2 y}{y^2}=1-\frac{2^3\,y^2}{\lfloor\underline{4}}+\frac{2^5\,y^4}{\lfloor\underline{6}}-\frac{2^7\,y^6}{\lfloor\underline{8}}+\ldots,$$

$$\frac{\operatorname{Sin}^3 y}{y^3}=1-\frac{3}{4}\left[\frac{3^4-1}{\lfloor\underline{5}}\,y^2-\frac{3^6-1}{\lfloor\underline{7}}\,y^4+\frac{3^8-1}{\lfloor\underline{9}}\,y^6-\ldots\right].$$

Remarque. En recapitulant les résultats démontrés dans ce §, on voit que nous avons obtenu, à l'aide des fonctions généralisées de Bernoulli, comme nous nous le sommes proposé, les développements des puissances entières quelconques positives ou négatives de toutes les fonctions principales hyperboliques ou trigonomètriques, à l'éxception de la puissance entière et positive de Cos z. Mais il est très facile de suppléer à ce défaut de différentes manières. Par exemple en multipliant par e^{xz} l'égalité

$$(e^z+1)^\nu=\sum_{p=0}^{p=\nu}\frac{\lfloor\underline{\nu}}{\lfloor\underline{p}\,\lfloor\underline{\nu-p}}\,e^{pz}$$

et en développant en série son second membre, on a

$$e^{(2x+\nu)\frac{z}{2}}\left(e^{\frac{z}{2}}+e^{-\frac{z}{2}}\right)^\nu=\sum_{p=0}^{p=\nu}\frac{\lfloor\underline{\nu}}{\lfloor\underline{p}\,\lfloor\underline{\nu-p}}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+p)^n}{\lfloor\underline{n}}\,z^n\right)$$

$$=2^\nu+\sum_{n=1}^{\infty}\theta_{\nu,n}(x)\,\frac{z^n}{\lfloor\underline{n}},$$

où

$$\theta_{\nu,n}(x)=\sum_{p=0}^{p=\nu}\frac{\lfloor\underline{\nu}}{\lfloor\underline{p}\,\lfloor\underline{\nu-p}}\,(x+p)^n.$$

Si l'on fait $z=2y\sqrt{-1}$, en supposant x et y reelles, on aura

$$\operatorname{Cos}\,(2x+\nu)y\,\operatorname{Cos}^\nu y=1+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\,2^{2m-\nu}\,\theta_{\nu,\,2m}(x).\frac{y^{2m}}{\lfloor\underline{2m}}$$

$$\operatorname{Sin}\,(2x+\nu)y\,\operatorname{Cos}^\nu y=\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\,2^{2m-\nu-1}\,\theta_{\nu,\,2m-1}(x)\,\frac{y^{2m-1}}{2m-1}.$$

Pour $x = -\frac{\nu}{2}$ la dernière série donne

$$\theta_{\nu,\,2m-1}\left(-\frac{\nu}{2}\right) = 0$$

et de l'avant dernière on déduit

$$\operatorname{Cos}^{\nu} y = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \, 2^{2m-\nu} \, \theta_{\nu,\,2m}\left(-\frac{\nu}{2}\right) \frac{y^{2m}}{\underline{|2m}},$$

où

$$\theta_{\nu,\,2m}\left(-\frac{\nu}{2}\right) = \sum_{p=0}^{p=\nu} \frac{\underline{|\nu}}{\underline{|p}\;\underline{|\nu-p}} \left(p - \frac{\nu}{2}\right)^{2m}.$$

En supposant $\nu = 2$, $\nu = 3$ on trouve

$$\theta_{2,\,2m}(-1) = 2, \quad \theta_{3,\,2m}\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{3\,(3^{2m-1}+1)}{2^{2m-1}}$$

et par conséquent,

$$\operatorname{Cos}^2 y = 1 - \frac{2\,y^2}{\underline{|2}} + \frac{2^3\,y^4}{\underline{|4}} - \frac{2^5\,y^6}{\underline{|6}} + \ldots$$

$$\operatorname{Cos}^3 y = 1 - \frac{3}{4}\left[(3+1)\frac{y^2}{\underline{|2}} - (3^3+1)\frac{y^4}{\underline{|4}} + (3^5+1)\frac{y^6}{\underline{|6}} - \ldots\right].$$

§ V.

Les relations entre les fonctions $\varphi_{\nu,\,n}(x)$ et les fonctions factorielles entières.

22. Convenons de désigner par C^{ν}_k la somme de tous les produits, qu'on peut faire des k facteurs différents, pris dans la suite naturelle des nombres $1, 2, 3, \ldots \nu$ et posons

$$(1) \qquad \alpha_{\nu,\,k-1} = \frac{(-1)^k\, C^{\nu}_k}{\nu\,(\nu-1)\,(\nu-2)\ldots(\nu-k+1)}.$$

D'après cette définition il est évident que le nombre k est plus petit ou au plus égal au nombre ν, et, par suite, que le premier indice ν de la quantité $\alpha_{\nu,\,k-1}$ doit être plus grand que son second indice $k-1$.

Cela posé, on aura les polynômes de la forme

$$f_{\nu,n}(x) = \frac{x^n}{\lfloor n} + \frac{\alpha_{\nu,0}\, x^{n-1}}{\lfloor n-1} + \frac{\alpha_{\nu,1}\, x^{n-2}}{\lfloor n-2} + \ldots + \frac{\alpha_{\nu,n-3}\, x^2}{\lfloor 2} + \alpha_{\nu,n-2}\, x \tag{2}$$

complétement définis, tant que ν est plus grand, égal ou plus petit d'une unité que n.

Ces polynômes sont très commodes pour exprimer une fonction factorielle entière, ainsi que ses derivées de l'ordre quelconque, son intégrale et ses différences finies. En effet, d'après la définition des nombres C^ν_k on a

$$(x-1)(x-2)(x-3)\ldots(x-\nu)$$

$$= x^\nu - C_1^\nu x^{\nu-1} + C_2^\nu x^{\nu-2} - \ldots + (-1)^k C_k^\nu x^{\nu-k} + \ldots (-1)^{\nu-1} C'_{\nu-1} x + (-1)^\nu C_\nu^\nu.$$

Mais d'après la formule (1) nous avons:

$$(-1)\ C_1^\nu = \nu\alpha_{\nu,0},$$

$$(-1)^2\, C_2^\nu = \nu(\nu-1)\,\alpha_{\nu,1},$$

$$(-1)^3\, C_3^\nu = \nu(\nu-1)(\nu-2)\,\alpha_{\nu,2},\ \ldots$$

$$(-1)^k\, C_k^\nu = \nu(\nu-1)(\nu-2)\ldots(\nu-k+1)\,\alpha_{\nu,k-1},\ \ldots$$

$$(-1)^\nu\, C_\nu^\nu = \nu(\nu-1)(\nu-2)\ldots 2.1.\ \alpha_{\nu,\nu-1}.$$

Donc, en substituant ces valeurs dans l'égalité précédente et en la divisant par $\lfloor\nu$, on aura

$$\frac{1}{\lfloor\nu}(x-1)(x-2)(x-3)\ldots + (x-\nu) = \frac{x^\nu}{\lfloor\nu} + \frac{\alpha_{\nu,0}\, x^{\nu-1}}{\lfloor\nu-1}$$

$$+ \frac{\alpha_{\nu,1}\, x^{\nu-2}}{\lfloor\nu-2} + \ldots + \frac{\alpha_{\nu,k-1}\, x^{\nu-k}}{\lfloor\nu-k} + \ldots + \alpha_{\nu,\nu-2}\, x + \alpha_{\nu,\nu-1}$$

ou

$$\frac{1}{\lfloor\nu}(x-1)(x-2)(x-3)\ldots(x-\nu) = f_{\nu,\nu}(x) + \alpha_{\nu,\nu-1}. \tag{3}$$

De là, par changement de x en $x+1$, il vient

$$\frac{1}{\lfloor\nu}\, x(x-1)(x-2)\ldots(x-\nu+1) = f_{\nu,\nu}(x+1) + \alpha_{\nu,\nu-1} \tag{4}$$

Par changement de ν en $\nu-1$ dans l'égalité (3) et en la multipliant par $\frac{x}{\nu}$, on a

$$\frac{1}{\lfloor\nu}\, x(x-1)(x-2)\ldots(x-\nu+1) = \frac{x}{\nu}\left[f_{\nu-1,\nu-1}(x) + \alpha_{\nu-1,\nu-2}\right] \tag{5}$$

et, en comparant les formules (4) et (5), on obtient

(6) $$\nu\,[f_{\nu,\nu}(x+1)+\alpha_{\nu,\nu-1}] = x\,[f_{\nu-1,\nu-1}(x)+\alpha_{\nu-1,\nu-2}]$$

Il faut remarquer encore que

$$C_\nu^\nu = 1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,\nu$$

et, par suite,

(7) $$\alpha_{\nu,\,\nu-1} = \frac{(-1)^\nu\,C_\nu^\nu}{\nu\,(\nu-1)\ldots 2.1} = (-1)^\nu$$

Donc, si l'on multiplie l'égalité (4) par $(-1)^\nu$, après y avoir substitué $-x$ au lieu de x, on aura

(8) $$\frac{1}{\underline{|\nu}}\,x\,(x+1)\,(x+2)\ldots(x+\nu-1) = (-1)^\nu\,f_{\nu,\nu}(1-x)+1$$

23. Appliquons maintenant les expressions que nous venons d'obtenir des fonctions factorielles entières à leur différentiation et intégration.

En différentiant, par rapport à x, l'égalité (2) on a

(9) $$D_x\,f_{\nu,n}(x) = f_{\nu,n-1}(x)+\alpha_{\nu,n-2};$$

en la différentiant k fois de suite on trouvera

(10) $$D^k_x\,f_{\nu,n}(x) = f_{\nu,n-k}(x)+\alpha_{\nu,\,n-k-1}.$$

Donc, des formules (3), (4) et (8), on obtiendra:

(11) $$D^k_x\,\frac{(x-1)\,(x-2)\ldots(x-\nu)}{\underline{|\nu}} = f_{\nu,\,\nu-k}(x)+\alpha_{\nu,\,\nu-k-1},$$

(12) $$D^k_x\,\frac{x\,(x-1)\ldots(x-\nu+1)}{\underline{|\nu}} = f_{\nu,\,\nu-k}(x+1)+\alpha_{\nu,\,\nu-k-1}],$$

(13) $$D^k_x\,\frac{x\,(x+1)\,(x+2)\ldots(x+\nu-1)}{\underline{|\nu}} = (-1)^{\nu+k}\,[f_{\nu,\,\nu-k}(1-x)+\alpha_{\nu,\,\nu-k+1}].$$

Enfin en intégrant par rapport à x l'égalité (4), depuis $x=0$, on a

(14) $$\int_0^x \frac{(x-1)\,(x-2)\ldots(x-\nu)}{\underline{|\nu}}\,dx = f_{\nu,\,\nu+1}(x).$$

Cherchons enfin l'expression des différences finies de $f_{\nu,n}(x)$ pour l'accroissement $\Delta x = 1$ de x.

Le cas le plus simple est celui de $n = \nu$, alors on a

$$\Delta f_{\nu,\nu}(x) = \Delta\,(f_{\nu,\nu}(x) + \alpha_{\nu,\nu-1}) = \Delta\,\frac{(x-1)(x-2)\ldots(x-\nu)}{\lfloor\underline{\nu}}, \text{ par (3)},$$

$$= \frac{(x-1)(x-2)\ldots(x-\nu+1)}{\lfloor\underline{\nu-1}};$$

donc, par la formule (3)

$$\Delta f_{\nu,\nu}(x) = f_{\nu-1,\nu-1}(x) + \alpha_{\nu-1,\nu-2} \tag{15}$$

On peut réduire au cas précédent celui, où $\nu > n$. En effet si $\nu = n + k$, nous aurons

$$\Delta f_{\nu,n}(x) = \Delta f_{n+k,n}(x) = \Delta\, D^k_x\,[f_{n+k,n+k}(x) + \alpha_{n+k,n+k-1}],$$

par la formule (10). Mais les opérations Δ et D^k_x étant indépendantes l'une de l'autre, on peut intervertir leur ordre, de sorte que

$$\Delta f_{\nu,n}(x) = D^k_x\,\Delta\,[f_{n+k,n+k}(x) + \alpha_{n+k,n+k-1}] = D^k_x\,[f_{n+k-1,n+k-1}(x) + \alpha_{n+k-1,n+k-2}]$$

$$= f_{n+k-1,n-1}(x) + \alpha_{n+k-1,n-2}$$

ou

$$\Delta f_{\nu,n}(x) = f_{\nu-1,n-1}(x) + \alpha_{\nu-1,n-2}. \tag{16}$$

En appliquant k fois l'opération Δ à $f_{\nu,n}(x)$ on trouvera

$$\Delta^k f_{\nu,n}(x) = f_{\nu-k,n-k}(x) + \alpha_{\nu-k,n-k+1} \tag{17}$$

24. Il est impossible de ne pas reconnaître l'identité des règles de différentiation des fonctions $f_{\nu,n}(x)$ et $\varphi_{\nu,n}(x)$ et nous pouvons poursuivre un peu plus loin l'analogie de leurs propriétés.

Ainsi, si l'on fait $x = 0$ dans l'égalité (16) on trouve

$$f_{\nu,n}(1) = \alpha_{\nu-1,n-2}. \tag{18}$$

Si l'on développe le premier membre de l'égalité (16), par la formule de Taylor, on obtient

$$f_{\nu,n}(x+1) - f_{\nu,n}(x) = [f_{\nu,n-1}(x) + \alpha_{\nu,n-2}] + \frac{1}{\lfloor\underline{2}}[f_{\nu,n-2}(x) + \alpha_{\nu,n-3}] +$$

$$+ \frac{1}{\lfloor\underline{3}}[f_{\nu,n-3}(x) + \alpha_{\nu,n-4}] + \ldots + \frac{1}{\lfloor\underline{n-1}}[f_{\nu,1}(x) + \alpha_{\nu,0}] + \frac{1}{\lfloor\underline{n}};$$

mais on a

$$\alpha_{\nu, n-2} + \frac{\alpha_{\nu\, n-2}}{\lfloor 2} + \frac{\alpha_{\nu, n-n}}{\lfloor 3} + \ldots + \frac{\alpha_{\nu, 0}}{\lfloor n-1} + \frac{1}{\lfloor n} = f_{\nu, n}(1) = \alpha_{\nu-1, n-2}$$

Donc l'égalité (16) devient

$$(19) \quad f_{\nu-1, n-1}(x) = f_{\nu, n-1}(x) + \frac{1}{\lfloor 2} f_{\nu, n-2}(x) + \frac{1}{\lfloor 3} f_{\nu, n-3}(x) + \ldots + \frac{1}{\lfloor n-1} f_{\nu, 1}(x)$$

et si l'on y change $n-1$ en $n-2$, $n-3$, ... 2, 1 on trouve:

$$f_{\nu-1, n-2}(x) = f_{\nu, n-2}(x) + \frac{1}{\lfloor 2} f_{\nu, n-3}(x) + \ldots + \frac{1}{\lfloor n-2} f_{\nu, 1}(x)$$

$$f_{\nu-1, n-3}(x) = f_{\nu, n-3}(x) + \ldots + \frac{1}{\lfloor n-3} f_{\nu, 1}(x)$$

. . . .

$$f_{\nu-1, 1}(x) = f_{\nu, 1}(x)$$

En multipliant les $n-1$ dernières égalités réspectivement par

$$1, A_0, A_1, \ldots A_{n-3}$$

et en les ajoutant, nous aurons

$$(20) \quad f_{\nu, n-1}(x) = f_{\nu-1, n-1}(x) + A_0 f_{\nu-1, n-2}(x) + A_1 f_{\nu-1, n-3}(x) + \ldots + A_{n-3} f_{\nu-1, 1}(x)$$

et de là, pour $x = 1$

$$\alpha_{\nu-1, n-3} = \alpha_{\nu-2, n-3} + A_0 \alpha_{\nu-2, n-4} + A_1 \alpha_{\nu-2, n-5} + \ldots + A_{n-3}$$

25. Avant de rechercher la cause de la similitude des propriétés des fonctions $f_{\nu, n}(x)$ et $\varphi_{\nu, n}(x)$, nous allons d'abord utiliser les expressions précédentes des dérivées des fonctions factorielles entières.

Prenons pour cela la formule du binôme de Newton

$$(1+z)^x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{\lfloor n} z^n$$

où l'on suppose que x est une variable réelle et que

$$-1 < z < 1.$$

D'après les formules (4) et (7) cette série peut s'écrire

$$(1+z)^x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \{f_{n,n}(1+x) + (-1)^n\} z^n$$

Mais on a

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \ldots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n z^n;$$

donc

$$(1+z)^x = \frac{1}{1+z} + \sum_{n=1}^{\infty} f_{n,n}(1+x)\cdot z^n \tag{21}$$

$$= \frac{1}{1+z} + f_{1,1}(1+x) z + f_{2,2}(1+x) z^2 + f_{3,3}(1+x) z^3 + \ldots$$

d'où, par différentiation par rapport à x, on déduit

$$(1+z)^x \log(1+z) = z + [f_{2,1}(1+x) + \alpha_{2,0}] z^2 + [f_{3,2}(1+x) + \alpha_{3,1}] z^3 + \ldots \tag{22}$$

$$\ldots + [f_{n,n-1}(1+x) + \alpha_{n,n-2}] z^n + \ldots$$

Dans le cas particulier $x = 0$ la dernière série doit être identique avec la série connue

$$\log(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{z^n}{\lfloor n} + \ldots$$

En effet elle devient d'abord

$$\log(1+z) = z + [1 + \alpha_{2,0}] z^2 + [\alpha_{2,0} + \alpha_{3,1}] z^3 + \ldots$$

$$\ldots + [\alpha_{n-1,n-3} + \alpha_{n,n-2}] z^n + \ldots$$

Mais, par la formule (6),

$$n[f_{n,n}(1+x) + \alpha_{n,n-1}] = x[f_{n-1,n-1}(x) + \alpha_{n-1,n-2}].$$

Si l'on différentie cette égalité et que l'on y fait ensuite $x = 0$, on trouve

$$\alpha_{n-1,\,n-3} + \alpha_{n,\,n-2} = \frac{\alpha_{n-1,\,n-2}}{n} = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

ce qui démontre l'identité des deux séries précédentes. Maintenant en différentiant, par rapport à x, ν fois de suite la série (21), on a

$$(1+z)^x \{\log(1+z)\}^\nu =$$

$$= z^\nu + [f_{\nu+1,\,1}(1+x) + \alpha_{\nu+1,\,0}]\, z^{\nu+1} + [f_{\nu+2,\,2}(1+x) + \alpha_{\nu+2,\,1}]\, z^{\nu+2} + \dots$$

(23) $$\dots + [f_{\nu+n,\,n}(1+x) + \alpha_{\nu+n,\,n-1}]\, z^{\nu+n} + \dots$$

d'où, pour $x = 0$, il vient

$$\{\log(1+z)\}^\nu =$$

$$= z^\nu + [1 + \alpha_{\nu+1,\,0}]\, z^{\nu+1} + [\alpha_{\nu+1,\,0} + \alpha_{\nu+2,\,1}]\, z^{\nu+2} + \dots$$

$$\dots + [\alpha_{\nu+n-1,\,n-2} + \alpha_{\nu+n,\,n-1}]\, z^{\nu+n} + \dots$$

Cette dernière série peut être simplifiée, car par la formule (6) on a l'égalité

$$(\nu+n)\,[f_{\nu+n,\,\nu+n}(1+x) + \alpha_{\nu+n,\,\nu+n-1}] = x\,[f_{\nu+n-1,\,\nu+n-1}(x) + \alpha_{\nu+n-1,\,\nu+n-2}]$$

et en la différentiant ν fois on trouve

$$(\nu+n)\,[f_{\nu+n,\,n}(1+x) + \alpha_{\nu+n,\,n-1}] = x\,[f_{\nu+n-1,\,n-1}(x) + \alpha_{\nu+n-1,\,\nu+n-2}]$$

$$+ \nu\,[f_{\nu+n-1,\,n}(x) + \alpha_{\nu+n-1,\,n-1}]$$

d'où, pour $x = 0$, on déduit

$$\alpha_{\nu+n-1,\,n-2} + \alpha_{\nu+n,\,n-1} = \frac{\nu}{\nu+n}\,\alpha_{\nu+n-1,\,n-1}$$

En outre, par la formule (1) il est facile de vérifier que

$$1 + \alpha_{\nu+1,\,0} = \frac{\nu}{\nu+1}\,\alpha_{\nu,\,0}$$

La série précédente prendra donc la forme

$$\{\log (1+z)\}^\nu =$$

$$= z^\nu + \frac{\nu\, \alpha_{\nu,0}}{\nu+1} z^{\nu+1} + \frac{\nu\, \alpha_{\nu+1,1}}{\nu+2} z^{\nu+2} + \ldots + \frac{\nu\, \alpha_{\nu+n-1,n-1}}{\nu+n} z^{\nu+n} + \ldots \quad (24)$$

qui, au moyen de la relation (1), s'accorde parfaitement avec la série connue[1])

$$\{\log (1+z)\}^\nu =$$

$$= z^\nu - \frac{C_1^{\,\nu}}{\nu+1} z^{\nu+1} + \frac{C_2^{\,\nu+1}}{(\nu+1)(\nu+2)} z^{\nu+2} + \ldots + (-1)^n \frac{C_n^{\,\nu+n-1}}{(\nu+1)(\nu+2)\ldots(\nu+n)} z^{\nu+n} + \ldots$$

26. Par une transformation presque évidente la série (24) obtient la forme éminemment propre, pour en déduire immédiatement les expressions remarquables de la fonction $\varphi_{\nu,n}(x)$ et de ses coefficients.

En effet, si l'on multiplie cette série par

$$\frac{e^{ux}}{(e^u-1)^\nu},$$

après y avoir posé $z = e^u - 1$, elle devient

$$\frac{u^\nu e^{ux}}{(e^u-1)^\nu} = 1 + \nu \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_{\nu+n-1,n-1}}{\nu+n} e^{ux} (e^u - 1)^n$$

Et il est évident que, pour des valeurs de x quelconques et pour celles de u suffisamment petites, cette série, développée suivant les puissances de u, deviendra identique avec la série [(2), § II]

$$\frac{u^\nu e^{ux}}{(e^u-1)^\nu} = 1 + \nu \sum_{n=1}^{\infty} \{\varphi_{\nu-1,n}(x) + A_{\nu-1,n-1}\} u^n.$$

Il s'en suit que les coéfficients de u^n, dans les deux séries, sont egaux. On les trouve d'une manière ordinaire, en différentiant les séries n fois par rapport a u et en posant ensuite $u = 0$.

---

1) Schlömilch, Recherches sur les coéfficients des facultés analytyques (Crelle, Jour. 44 B. 353 S.), ainsi que son Compendium (II B. 13 S.).

De cette manière, d'après les formules (7) et (8) du n° 11 du § II, on obtient aisement les expressions ci-dessus mentionnées, dont la première est

$$(25)\qquad \varphi_{\nu-1,n}(x) + A_{\nu-1,n-1}$$

$$= \frac{1}{\lfloor n} \left\{ x^n + \frac{\nu\,\alpha_{\nu,0}}{\nu+1}\,\Delta x^n + \frac{\nu\,\alpha_{\nu+1,1}}{\nu+2}\,\Delta^2 x^n + \ldots + \frac{\nu\,\alpha_{\nu+n-1,n-1}}{\nu+n}\,\Delta^n x^n \right\}$$

$$= \frac{x^n}{\lfloor n} - \frac{C^\nu_1}{\nu+1}\left(\psi_{n-1}(x) + a_{n-2}\right) + \frac{C_2^{\nu+1}}{(\nu+1)(\nu+2)}\left(\psi_{1,n-2}(x) + \alpha_{1,n-3}\right) + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{n-1}\frac{C^{\nu+n-2}}{(\nu+1)(\nu+2)\ldots(\nu+n-1)}\left(\psi_{n-2,1}(x) + a_{n-2,0}\right) + (-1)^n \frac{C^{\nu+n-1}}{(\nu+1)(\nu+2)\ldots(\nu+n)};$$

et la seconde, s'obtenant de la précédente comme cas particulier pour $x = 0$, sera

$$(26)\qquad A_{\nu-1,n-1}$$

$$= \frac{\nu}{\lfloor n}\left\{\frac{\alpha_{\nu,0}}{\nu+1}(\Delta x^n)_0 + \frac{\alpha_{\nu+1\,1}}{\nu+2}(\Delta^2 x^n)_0 + \ldots + \frac{\alpha_{\nu+n-1,n-1}}{\nu+n}(\Delta^n x^n)_0\right\}$$

$$= -\frac{a_{n-2}\,C_1{}^\nu}{\nu+1} + \frac{a_{1,n-3}\,C_2{}^{\nu+1}}{(\nu+1)(\nu+2)} - \ldots$$

$$\ldots + \frac{(-1)^{n-1}a_{n-2,0}\,C_{n-1}{}^{\nu+n-2}}{(\nu+1)(\nu+2)\ldots(\nu+n-1)} + \frac{(-1)^n C_n{}^{\nu+n-1}}{(\nu+1)(\nu+2)\ldots(\nu+n)}.$$

Enfin, des deux dernières égalités, par soustraction, on obtient la suivante

$$(27)\qquad \varphi_{\nu,n}(x)$$

$$= \frac{x^n}{\lfloor n} + \frac{\nu\,\alpha_{\nu,0}\,\psi_{n-1}(x)}{\nu+1} + \frac{\nu\,\alpha_{\nu+1,1}\,\psi_{1,n-2}(x)}{\nu+2} + \ldots + \frac{\nu\,\alpha_{\nu+n-2,n-2}\,\psi_{n-2,1}(x)}{\nu+n-1}$$

$$= \frac{x^n}{\lfloor n} - \frac{C_1{}^\nu\,\psi_{n-1}(x)}{\nu+1} + \frac{C_2{}^{\nu+2}\,\psi_{1,n-2}(x)}{(\nu+1)(\nu+2)} - \ldots$$

$$+ (-1)^{n-1}\frac{C_{n-1}{}^{\nu+n-2}\,\psi_{n-2,1}(x)}{(\nu+1)(\nu+2)\ldots(\nu+n-1)}.$$

Les formules analogues relatives soit à des fonctions, soit aux nombres de Bernoulli, selon leurs définitions ordinaires, se renferment, bien entendu, dans les fourmules génerales, comme un cas particulier correspondant à la supposition $\nu = 1$.

Dans ce cas, en se rappelant que $\alpha_{k,k-1} = (-1)^k$, d'après les formules (25) et (26) on a immédiatement

$$\varphi_n(x) + A_{n-1}$$

$$= \frac{1}{\underline{|n}} \left\{ x^n - \frac{1}{2} \Delta x^n + \frac{1}{3} \Delta^2 x^n - \ldots + \frac{(-1)^n}{n+1} \Delta^n x^n \right\}$$

et

$$A_{n-1} = \frac{-1}{\underline{|n}} \left\{ \frac{1}{2} (\Delta x^n)_0 - \frac{1}{3} (\Delta^2 x^n)_0 + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n+1} (\Delta^n x^n)_0 \right\}$$

La dernière expression s'annule, comme on sait, pour des valeurs impaires du nombre n, tandis qu'en cas des valeurs paires de ce nombre, en posant $n = 2m$, on obtient la formule connue

$$(-1)^m B_{2m-1} = \frac{1}{2} (\Delta x^{2m})_0 - \frac{1}{3} (\Delta^2 x^{2m})_0 + \ldots - \frac{\Delta^{2m} x^{2m}}{2m+1},$$

où B_{2m-1} designe un nombre de Bernoulli, lié avec A_{2m-1} par la relation

$$\underline{|2m} \cdot A_{2m-1} = (-1)^m B_{2m-1}.$$

On voit, par ces diverses formules, qu'il suffit d'avoir à sa disposition une table auxiliaire des nombres $(\Delta^k x^{2m})_0$, pareilles à celle qui est donnée au § II, pour pouvoir calculer immédiatement une valeur particulière du nombre A_{2m-1} ou B_{2m-1}, pour une valeur donnée de m. Mais, en passant au calcul immédiat des valeurs des nombres plus généraux $A_{\nu,n}$, à deux indices donnés ν et n, on aurait besoin, en outre, d'une table des valeurs des coéfficients factoriels C^ν_n. A cet éffet on a joint ici une petite table de cette dernière espèce, empruntée à l'ouvrage de Mr Schlömilch (p. 31), cité plus haut.

ν	1	2	3	4	5	6	7	8
C^ν_1	1	3	6	10	15	21	28	36
C^ν_2		2	11	35	85	175	322	546
C^ν_3			6	50	225	735	1960	4536
C^ν_4				24	274	1624	6769	22449
C^ν_5					120	1764	13132	67284
C^ν_6						720	13068	118124
C^ν_7							5040	109584
C^ν_8								40320

27. En calculant, au moyen des tables auxiliaires ci-dessus mentionnées, ou par des formules données plus haut [(14), § I, (17), § III], les valeurs numériques des coéfficients

$$A_{1,0},\ A_{2,1},\ A_{3,2},\ A_{4,3},$$

dont le premier indice ne surpasse que d'une unité le second indice, on trouve, aisement, des résultats remarquables, à savoir que

(28) $$A_{1,0} = -1,\ A_{2,1} = +1,\ A_{3,2} = -1,\ A_{4,3} = +1$$

En généralisant ce fait, c'est à dire en supposant qu'on a

(29) $$A_{n,n-1} = (-1)^n$$

pour un nombre n quelconque, on trouve, tout de suite, l'explication de l'analogie des propriétés des fonctions $f_{\nu,n}(x)$ et $\varphi_{\nu,n}(x)$, qui a été signalée plus haut (n° 25); et en même temps on aperçait la possibilité du rapprochement remarquable entre les fonctions factorielles de la forme

$$\frac{1}{\lfloor n}(x-1)(x-2)\ldots(x-n)$$

et les fonctions généralisées de Bernoulli. En effet, d'après la formule d'interpolation

$$u_x = u_0 + \frac{x}{1}\Delta u_0 + \frac{x(x-1)}{\lfloor 2}\Delta^2 u_0 + \ldots + \frac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{\lfloor n}\Delta^n u_0,$$

appliquée successivement à deux fonctions du degré n

$$\varphi_{n,n}(x) + A_{n,n-1} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\lfloor n}(x-1)(x-2)\ldots(x-n),$$

on trouve, par soustraction, que

(30) $$\varphi_{n,n}(x) + A_{n,n-1} - \frac{1}{\lfloor n}(x-1)(x-2)\ldots(x-n)$$
$$= [A_{n,n-1} - (-1)^n] + \frac{x}{1}[A_{n-1,n-2} - (-1)^{n-1}] + \ldots$$
$$\ldots + \frac{x(x-1)\ldots(x-n+2)}{\lfloor n-1}[A_{1,0} + 1]$$

De cette égalité on pourrait conclure tout de suite, que

(31) $$\varphi_{n,n}(x) + A_{n,n-1} = \frac{1}{\lfloor n}(x-1)(x-2)\ldots(x-n)$$

si le théorème (29) était vrai généralement.

On peut essayer d'abord de tirer sa demonstration de l'égalité (30) même, par voie d'induction, en s'appuyant sur les resultats (28).

Supposons donc, que jusqu'à une certaine valeur déterminée de n on a

$$A_{1,0} = -1,\ A_{2,1} = +1, \ldots A_{n-1,n-2} = (-1)^{n-1} \tag{32}$$

et qu'il faut en conclure que

$$A_{n,n-1} = (-1)^n.$$

Si la valeur de n est impaire la démonstration réussit parfaitement. Car d'après la formule (7) du § III on a

$$\varphi_{n,n}\left(\frac{n+1}{2}\right) + A_{n,n-1} = 0,$$

si le nombre n est impair. Donc, si l'on fait $x = \frac{n+1}{2}$ dans l'égalité (30), elle se réduit à

$$A_{n,n-1} - (-1)^n = 0,$$

en vertu des hypothèses (32).

C'est ainsi, par exemple, qu'en se fondant sur les résultats (28), que l'étendue de nos tables auxiliaires a permis de calculer, on peut conclure que

$$A_{5,4} = -1.$$

Mais il parait qu'il est impossible de démontrer, par cette voie d'induction, l'autre cas du théorème, quand le nombre n est pair. De quelque manière qu'on modifie cette démonstration on rencontre toujours le même obstacle, dépendant évidément de ce qu'on ne sait pas, si l'équation

$$\varphi_{n,n}(x) + A_{n,n-1} = 0$$

a pour racine un des nombres $1, 2, 3, \ldots n$, si le nombre n est pair. Dans ce cas, tout ce qu'on peut tirer de l'égalité (30), en vertu des conditions (32), c'est que

$$\varphi_{n,n}(x) + 1 = \frac{1}{n}(x-1)(x-2)\ldots(x-n).$$

Ainsi, quoique nous ayons déjà trouvé que

$$A_{1,6} = -1,\ A_{2,1} = +1,\ A_{3,2} = -1,\ A_{4,5} = +1,\ A_{5,4} = -1;$$

la conclusion, sans calcul direct, si $A_{6,4} = +1$, reste encore indécise.

28. Il est donc nécessaire de choisir un autre mode de démonstration du théorème (29). En prenant pour cela, d'après la formule (1) du § II la série

$$\frac{z^\nu (e^{xz}-1)}{(e^z-1)^{\nu+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \varphi_{\nu, n+1}(x),$$

par le théorème de Cauchy on obtient

$$(33) \qquad \varphi_{\nu, n+1}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(c)} \frac{z^\nu (e^{xz}-1)}{(e^z-1)^{\nu+1}} \frac{dz}{z^{n+1}},$$

où la variable z est suposée complexe et l'intégrale prise, comme à l'ordinaire, suivant une courbe fermée (c) quelconque, n'entourant qu'une seule fois, sur le plan de la variable z, le point $z = 0$ et de manière que les rayons vecteurs menés de ce point soyent tous moindres que 2π.

Pour $\nu = n + 1$ l'égalité (33) devient

$$\varphi_{n+1, n+1}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(c)} \frac{e^{xz}-1}{(e^z-1)^{n+2}} dz$$

et cette dernière, pour $x = 1$, donne

$$A_{n, n-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{(c)} \frac{dz}{(e^z-1)^{n+1}}.$$

Ainsi la démonstration du théorème (29) est réduite à la recherche de la valeur de la dernière intégrale.

Il suffit pour cela de changer la variable, en posant

$$e^z - 1 = u.$$

Les valeurs $z = 0$ et $u = 0$ se correspondant, l'intégrale donnée et sa transformée sont égales pour des contours élementaires d'intégration (c) et (c^1).

Donc on aura

$$\begin{aligned} A_{n, n-1} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{(c)} \frac{dz}{(e^z-1)^{n+1}} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{(c^1)} \frac{1}{1+u} \frac{du}{u^{n+1}} \\ &= \frac{1}{\lfloor n} D^n_{u=0} \frac{1}{1+u} \\ &= (-1)^n. \end{aligned}$$

La conséquence immédiate du théorème qu'on vient de démontrer est, comme nous l'avons déjà prouvé, l'égalité

$$\varphi_{n,n}(x) + A_{n,n-1} = \frac{(x-1)(x-2)\dots(x-n)}{\underline{|n}},$$

établissant une liaison intime entre les fonctions factorielles et nos fonctions généralisées de Bernoulli.

D'après la formule (3) on peut l'écrire ainsi

$$\varphi_{n,n}(x) = f_{n,n}(x)$$

d'où, en comparant les coéfficients des puissances égales de x, il suit que

$$A_{n,0} = \alpha_{n,0},\ A_{n,1} = \alpha_{n,1},\ A_{n,2} = \alpha_{n,2},\ \dots$$

et en général

$$A_{n,k-1} = \alpha_{n,k-1} \tag{34}$$

Donc, dans tout ce qui precède on peut remplacer les nombres α par les nombres A avec les mêmes indices.

L'égalité (34) d'après la formule (1) prend encore la forme

$$A_{n,k-1} = \frac{(-1)^k C_k^n}{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)} \tag{35}$$

Cette formule est beaucoup plus simple que la formule (26); mais cette dernière a lieu pour des valeurs entières et positives quelconques de deux indices n et $k-1$ du nombre $A_{n,k-1}$, tandis que la formule (35) n'a de signification que pour $k \leq n$.

Il faut remarquer que c'est M[r] Schlömilch qui le premier a donné une formule équivalente à la (35), dans son Mémoire cité [p. 350, (7)]. Avec nos notations elle peut s'écrire

$$C_k^n = (-1)^k \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{\underline{|k}} D^k_{z=0} \frac{z^{n+1}}{(e^z-1)^{n+1}}$$

et se réduit à l'égalité (29) dans le cas particulier de $k = n$. Mais nous n'avons pas cru de trop d'en donner une démonstration idependante et assez simple, en vue des consequences que nous en déduirons plus loin.

D'après la formule (31) la fonction

$$\varphi_{n,n}(x) + A_{n,n-1},$$

pour un entier n quelconque, ayant toutes ses racines égales à des nombres $1, 2, 3, \dots n$, on en conclut, par le théorème de Rolle, que toutes ses derivées

$$\varphi_{n,n-1}(x) + A_{n,n-2},\ \varphi_{n,n-2}(x) + A_{n,n-3},\ \dots\ \varphi_{n,1}(x) + A_{n,0}$$

ont aussi des racines réelles et positives, comprises dans l'intervale de 1 à n, de manière que les racines de chaque fonction sont separées par celles de la fonction précédente.

On voit, en même temps, que la fonction généralisée de Bernoulli de la forme

$$\varphi_{n,k}(x) + A_{n,k-1},$$

pour $k < n$, n'est qu'une derivée de l'ordre $n - k$ de la fonction factorielle

$$\frac{1}{\lfloor n}(x-1)(x-2)\ldots(x-n).$$

Et il est facile de remarquer, que $\varphi_{\nu,k}(x)$ pour $k > n$ peut être dérivée de la même fonction factorielle par voie d'intégration.

En éffet, en intégrant l'égalité (31) entre 0 et x, on a

$$\varphi_{n,n+1}(x) = \frac{1}{\lfloor n}\int_0^x (x-1)(x-2)\ldots(x-n)\,dx$$

Remarquons, en passant, qu'on peut exprimer la valeur de cette intégrale par la formule (27). En ajoutant $A_{n,n}$ aux deux membres de l'égalité précédente et en l'intégrant de nouveau entre 0 et x, on aura

$$\varphi_{n,n+2}(x) = A_{n,n}\,x + \frac{1}{\lfloor n}\int_0^{x\,(2)} (x-1)(x-2)\ldots(x-n)\,dx.$$

En continuant ainsi on trouve généralement

$$\varphi_{n,n+m}(x) = A_{n,n+m-2}\,x + A_{n,n+m-3}\frac{x^2}{\lfloor 2} + \ldots + A_{n,n}\frac{x^{m-1}}{\lfloor m-1}$$
$$+ \frac{1}{\lfloor n}\int_0^{x\,(m)} (x-1)(x-2)\ldots(x-n)\,dx, \qquad (36)$$

où par $\int_0^{x\,(m)}$ est designé, pour abreger, m intégrations successives par rapport à x, depuis 0 jusqu'à x.

Il est démontré, de cette manière, que toutes les fonctions généralisées de Bernoulli

$$\varphi_{n,1}(x),\ \varphi_{n,2}(x),\ \ldots\ \varphi_{n,n}(x),\ \varphi_{n,n+1}(x),\ \ldots\ \varphi_{n,n+m}(x)$$

peuvent être derivées d'une seule d'entre elles $\varphi_{n,n}(x)$, ou d'une fonction factorielle

$$\frac{1}{\lfloor n}(x-1)(x-2)\ldots(x-n),$$

par différentiations ou intégrations successives.

La fonction de Bernoulli primitive $\varphi_n(x)$, dont le premier indice est zero, fait exception a cette règle générale. Cependant on peut la dériver aussi de la même fonction factorielle en combinant les operations des différences finies et des intégrations; car d'après la formule (25) du § I on a

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\lfloor n}(D_x^{-1})^n (x-1)(x-2)\ldots(x-n),$$

où, par notre convention (§ I n° 8), D_x^{-1} designe l'intégration par rapport à x entre 0 et x.

28. Les nombres

$$A_{0,0} (= A_0),\ A_{1,1},\ A_{2,2},\ A_{3,3},\ \ldots\ A_{n-1,n-1}$$

à deux indices égaux, se distinguent des autres nombres $A_{\nu,n}$ par la propriété d'avoir entre eux seuls une rélation recurrente, s'obtenant immédiatement à l'aide de l'égalité

$$A_{n,n-1} = (-1)^n.$$

Il suffit, pour l'obtenir, de poser

$$u_x = \varphi_{n,n+1}(x)$$

dans la formule

$$u_x = u_0 + \frac{x}{1}\Delta u_0 + \frac{x(x-1)}{\lfloor 2}\Delta^2 u_0 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{x(x-1)\ldots(x-n)}{\lfloor n+1}\Delta^{n+1} u_0$$

et, en la divisant par x, de supposer $x = 0$.

On aura ainsi

$$(-1)^n = A_{n-1,n-1} - \frac{1}{2}A_{n-2,n-2} + \frac{1}{3}A_{n-3,n-3} - \ldots$$

$$+ \frac{(-1)^{n-1}}{n}A_0 + \frac{(-1)^n}{n+1} \qquad (37)$$

la relation recurrente dont il s'agit.

En posant successivement $n = 1, 2, 3, \ldots$ on en déduit:

$$A_0 = -\frac{1}{2}, \quad A_{1,1} = \frac{5}{12}$$

$$A_{2,2} = -\frac{3}{8}, \quad A_{3,3} = \frac{251}{720}$$

(38) $$A_{4,4} = -\frac{95}{288}, \quad A_{5,5} = \frac{19087}{60480}$$

$$A_{6,6} = -\frac{5257}{17280}, \quad A_{7,7} = \frac{1070017}{3628800}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

On peut donner les exemples suivants, où ces coéfficients numériques se présentent d'eux mêmes.

Reprenons d'abord la série du binôme qui, d'après ce qui a été démontré, peut s'écrire ainsi

$$(1+z)^{x-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi_{n,n}(x) + A_{n,n-1})\, z^n$$

$$(-1 < z < +1).$$

En la multipliant par dx et en l'intégrant entre 0 et x, on a

$$\frac{(1+z)^x - 1}{(1+z)\log(1+z)} = x + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{n,n+1}(x)\, z^n, \; (-1 < z < 1).$$

En posant $x = 1$, la série précédente devient

(39) $$\frac{z}{(1+z)\log(1+z)} = 1 + A_0 z + A_{1,1} z^2 + A_{2,2} z^3 + \ldots + A_{n-1,n-1} z^n + \ldots,$$

ou, en multipliant les deux membres par $(1+z)$,

$$\frac{z}{\log(1+z)} = 1 + (1+A_0)\, z + (A_0 + A_{1,1})\, z^2 + \ldots + (A_{n-2,n-2} + A_{n-1,n-1})\, z^n + \ldots$$

Remarquons qu'on peut retrouver la formule (37) en multipliant la série (39) par

$$\log(1+z) = z - \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{3} z^3 - \ldots$$

et en comparant les coéfficients de z^{n+1} dans le produit et dans la série

$$\frac{z}{1+z} = z - z^2 + z^3 - \dots$$

Soit, pour second exemple, on demande la valeur approchée de l'intégrale $\int_0^1 u_x dx$, en supposant la fonction u_x de x donnée seulement par ses valeurs $u_1, u_2, u_3, \dots u_{n+1}$, correspondantes à des valeurs 1, 2, 3, ... $n+1$ de la variable x.

On commencera par la formule

$$u_x = u_1 + \frac{x-1}{1}\Delta u_1 + \frac{(x-1)(x-2)}{\lfloor 2}\Delta^2 u_1 + \dots$$
$$\dots + \frac{(x-1)(x-2)\dots(x-n)}{\lfloor n}\Delta^n u_1,$$

qui d'après l'égalité (31) s'écrira sous cette forme

$$u_x = u_1 + [\varphi_{1,1}(x) + A_{1,0}]\Delta u_1 + [\varphi_{2,2}(x) + A_{2,1}]\Delta^2 u_1 + \dots$$
$$\dots + [\varphi_{n,n}(x) + A_{n,n-1}]\Delta^n u_1 \qquad (40)$$

et en l'intégrant on aura

$$\int_0^x u_x dx = u_1 x + \varphi_{1,2}(x)\cdot\Delta u_1 + \varphi_{2,3}(x)\cdot\Delta^2 u_1 + \dots + \varphi_{n,n+1}(x)\cdot\Delta^n u_1;$$

enfin, pour $x = 1$, on trouvera

$$\int_0^1 u\,dx = u_1 + A_0\Delta u_1 + A_{1,1}\Delta^2 u_1 + \dots + A_{n-1,n-1}\Delta^n u_1$$
$$= u_1 - \frac{1}{2}\Delta u_1 + \frac{5}{12}\Delta^2 u_1 - \frac{3}{8}\Delta^3 u_1 + \frac{251}{720}\Delta^4 u_1 - \dots$$

On peut remarquer encore ici que la formule d'interpolation, sous la forme (40), se prêtant aussi bien à la différentiation qu'à l'intégration, donne, par exemple,

$$\frac{du_x}{dx} = \Delta u_1 + [\varphi_{2,1}(x) + A_{2,0}]\Delta^2 u_1 + \dots + [\varphi_{n,n-1}(x) + A_{n,n-2}]\Delta^n u_1$$

d'où, en supposant succèssivement $x = 0$ et $x = 1$, on a

$$\left(\frac{du_x}{dx}\right)_0 = \Delta u_1 + A_{2,0}\Delta^2 u_1 + \dots + A_{n,n-2}\Delta^n u_1$$

$$\left(\frac{du_x}{dx}\right)_1 = \Delta u_1 + [1 + A_{2,0}]\Delta^2 u_1 + [A_{2,0} + A_{3,1}]\Delta^3 u_1 + \dots$$
$$\dots + [A_{n-1,n-3} + A_{n,n-2}]\Delta^n u_1,$$

et les valeurs numériques des coéfficients, qui figurent ici, se déterminent par une formule générale bien simple

$$A_{n,n-2} = (-1)^{n-1}\left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right],$$

qui resulte de l'égalité (31).

30. Jusqu'à présent nous avons obtenu les développements de plusieures fonctions de deux variables x et z, suivant les puissances ascendantes de z, dont les coéfficients sont des fonctions entières de x, appartenant à une des quatres éspèces:

$$\psi_{\nu,n}(x),\ \frac{x^n}{\underline{|n}},\ \varphi_n(x),\ \varphi_{\nu,n}(x).$$

Pour compléter l'analyse des propriétés de ces fonctions, il nous reste encore à déduire une série, du même genre, mais contenant, comme coéfficients des diverses puissances de z, les fonctions entières de toutes ces quatres formes à la fois.

On aura obtenu ainsi la preuve directe que ces fonctions proviennent de la même fonction génératrice et, par suite, — la justification de leur dénomination commune fonctions de Bernoulli, par laquelle nous les avons désignées.

Le développement, dont il s'agit, se déduit le plus facilement de celui du binôme. Il ne faut pour cela qu'appliquer plusieures fois la même méthode qui nous a servie pour obtenir la série

$$\frac{1}{1+z}\,\frac{(1+z)^x - 1}{\lg(1+z)} = x + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{n,n+1}(x)\, z^n$$

avec son cas particulier

$$\frac{1}{1+z}\,\frac{z}{\lg(1+z)} = 1 + A_0 z + \sum_{n=1}^{\infty} A_{n,n}\, z^{n+1}$$

pour $x = 1$.

En ajoutant la dernière série à l'avant dernière, multipliée par z, on a

$$\frac{1}{1+z}\,\frac{(1+z)^x}{\lg(1+z)} = 1 + (x + A_0)\, z + \sum_{n=1}^{\infty} \{\varphi_{n,n+1}(x) + A_{n,n-1}\}\, z^{n+1}$$

d'où, par l'intégration par rapport à x depuis 0 jusqu'à x, on obtient la série

$$\frac{z}{1+z}\,\frac{(1+z)^x - 1}{[\lg(1+z)]^2} = x + \varphi_2(x)\, z + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{n,n+2}(x)\, z^{n+1}$$

avec son cas particulier, pour $x = 1$,

$$\frac{z}{1+z} \frac{z}{[\log(1+z)]^2} = 1 + A_1 z^2 + \sum_{n=1}^{\infty} A_{n,\, n+1} z^{n+2}.$$

En ajoutant de nouveau la dernière série à la précédente, multipliée par z, on a

$$\frac{z^2}{1+z} \frac{(1+z)^x}{[\lg(1+z)]^2} = 1 + xz + [\varphi_2(x) + A_1] z^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \{\varphi_{n,\, n+2}(x) + A_{n,\, n+1}\} z^{n+2}$$

d'où par l'intégration par rapport à x, comme ci-dessus, on obtient

$$\frac{z^2}{1+z} \frac{(1+z)^x - 1}{[\lg(1+z)]^3} = x + \frac{x^2}{\lfloor 2} z + \varphi_3(x) z^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{n,\, n+3}(x) z^{n+2} \qquad \text{(a)}$$

En continuant toujours de la même manière on trouve:

$$\frac{z^3}{1+z} \frac{(1+z)^x - 1}{[\lg(1+z)]^4} = x + \frac{1}{2}(x + x^2) z + \frac{x^3}{\lfloor 3} z^2 + \varphi_4(x) z^3$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{n,\, n+4}(x) z^{n+3}, \qquad \text{(b)}$$

$$\frac{z^4}{1+z} \frac{(1+z)^x - 1}{[\lg(1+z)]^5} = x + \left(x + \frac{x^2}{2}\right) z + \left(\frac{x}{6} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{6}\right) z^2 + \frac{x^4}{\lfloor 4} z^3 +$$
$$+ \varphi_5(x) z^4 + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{n,\, n+5}(x) z^{n+4} \qquad \text{(c)}$$

et ainsi de suite.

La loi du développement n'est pas évidente seulement pour les termes où les exposants des puissances de z sont inferieurs à l'exposant, diminué de trois unités, de la puissance du logarithme. Mais, avec quelque attention il n'est pas difficile de remarquer que, même dans ces termes, les coéfficients des diverses puissances de z ne sont autre chose que la fonction $\psi_{\nu,\, n}(x)$, pour des valeurs convenablement choisies de ν et de n.

Ainsi, en tenant compte des valeurs des coéfficients $a_{\nu,\, n}$ (§ II), on peut écrire les termes, dont il s'agit, des séries (a), (b) et (c), comme il suit:

$$\psi_1(x);$$

$$\psi_{1,1}(x) + \psi_2(x) z;$$

$$\psi_{2,1}(x) + \psi_{1,2}(x) z + \psi_3(x) z^2.$$

Après avoir fait cette observation, on peut passer à la démonstration générale, en vérifiant que si la formule est vraie pour une certaine valeur entière p de l'exposant du logarithme il en sera de même pour la valeur $p+1$ de cet exposant.

Supposons donc que

$$\frac{z^{p-1}}{1+z}\,\frac{(1+z)^x-1}{[\lg(1+z)]^p}$$

$$= \psi_{p-3,1}(x) + \psi_{p-4,2}(x)\,z + \psi_{p-5,3}(x)\,z^2 + \ldots + \psi_{1,p-3}(x)\,z^{p-4} + \psi_{p-2}(x)\,z^{p-3}$$

$$(41)\qquad + \frac{x^{p-1}}{\underline{|p-1}}\,z^{p-2} + \varphi_p(x)\,z^{p-1} + \sum_{n=1}^{\infty}\varphi_{n,p+n}(x)\,z^{p+n-1}.$$

En y faisant $x=1$, d'après les formules (2), (16) et 17) du § I, on a

$$\frac{z^{p-1}}{1+z}\cdot\frac{z}{[\lg(1+z)]^p}$$

$$= 1 + a_{p-3,0}\,z + a_{p-4,1}\,z^2 + \ldots + a_{2,p-5}\,z^{p-4} + a_{1,p-4}\,z^{p-3}$$

$$(42)\qquad + a_{p-3}\,z^{p-2} + A_{p-1}\,z^p + \sum_{n=1}^{\infty}A_{n,p+n-1}\,z^{p+n}.$$

Par l'addition de la dernière série à la précédente, multipliée par z, on obtient la série

$$(43)\qquad \frac{z^p}{1+z}\,\frac{(1+z)^x}{[\lg(1+z)]^p}$$

$$= 1 + [\psi_{p-3,1}(x) + a_{p-3,0}]\,z + [\psi_{p-4,2}(x) + a_{p-4,1}]\,z^2 + \ldots$$

$$\ldots + [\psi_{1,p-3}(x) + a_{1,p-4}]\,z^{p-3} + [\psi_{p-2}(x) + a_{p-3}]\,z^{p-2}$$

$$+ [\varphi_p(x) + A_{p-1}]\,z^p + \sum\{\varphi_{n,p-n}(x) + A_{n,p+n-1}]\,z^{p+n}$$

En l'intégrant par rapport à x, depuis 0 jusqu'à x, en vertu des formules (18) et (7) du § I on aura

$$\frac{z^p}{1+z}\,\frac{(1+z)^x-1}{[\lg(1+z)]^{p+1}}$$

$$= \psi_{p-2,1}(x) + \psi_{p-3,2}(x)\,z + \psi_{p-4,3}(x)\,z^2 + \ldots + \psi_{1,p-2}(x)\,z^{p-3} + \psi_{p-1}(x)\,z^{p-2}$$

$$+ \frac{x^p}{\underline{|p}}\,z^{p-1} + \varphi_{p+1}(x)\,z^p + \sum_{n=1}^{\infty}\varphi_{n,p+n+1}(x)\,z^{p+n},$$

la série s'obtenant de celle que nous avons admise par le changement de p en $p+1$.

Donc la formule (41) étant vraie pour $p = 1, 2, 3, 4$ est maintenant démontrée généralement, pour $-1 < z < 1$, x étant une variable réelle quelconque et p un nombre entier et positif.

Par la dernière série, que nous croyons nouvelle, la fonction génératrice commune à quatre fonctions $\frac{x^n}{\lfloor n}$, $\varphi_n(x)$, $\varphi_{\nu,n}(x)$, $\psi_{\nu,n}(x)$ devient évidente.

En effet, d'après les formules de Maclaurin et de Cauchy on en déduit:

$$\frac{x^p}{\lfloor p} = \frac{1}{\lfloor p-1} D^{p-1}{}_{z=0} \frac{z^p}{1+z} \frac{(1+z)^x - 1}{[\lg(1+z)]^{p+1}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{(0)} \frac{(1+z)^x - 1}{[\lg(1+z)]^{p+1}},$$

$$\varphi_{p+1}(x) = \frac{1}{\lfloor p} D^p{}_{z=0} \frac{z^p}{1+z} \frac{(1+z)^x - 1}{[\lg(1+z)]^{p+1}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{(0)} \frac{(1+z)^x - 1}{[\lg(1+z)]^{p+1}} \frac{dz}{z(1+z)},$$

$$\varphi_{n,p+n+1}(x) = \frac{1}{\lfloor p+n} D^{p+n}{}_{z=0} \frac{z}{1+z} \frac{(1+z)^x - 1}{[\lg(1+z)]^{p+1}}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{(0)} \frac{(1+z)^x - 1}{[\lg(1+z)]^{p+1}} \frac{dz}{z^{n+1}(1+z)},$$

$$\psi_{p-k,k-1}(x) = \frac{1}{\lfloor k-2} D^{k-2}{}_{z=0} \frac{z^p}{1+z} \frac{(1+z)^x - 1}{[\lg(1+z)]^{p+1}}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{(0)} \frac{(1+z)^x - 1}{[\lg(1+z)]^{p+1}} \frac{z^{p-k+1}\,dz}{1+z}, \quad (k \leqq p),$$

où le signe (0) indique que les intégrales sont prises suivant le contour élémentaire fermé autour du point $z = 0$.

Il est facile de vérifier les valeurs des quatres intégrales précédentes à l'aide des séries données plus haut.

En effet, en posant

$$\log(1+z) = u,$$

pour changer la variable z en u, on trouve:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{(0)} \frac{(1+z)^x - 1}{[\lg(1+z)]^{p+1}} \frac{1}{1+z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{(0)} (e^{ux} - 1) \frac{du}{u^{p+1}}$$

$$= \frac{1}{\lfloor p} D^p{}_{u=0} (e^{ux} - 1) = \frac{x^p}{\lfloor p};$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{(0)} \frac{(1+z)^x - 1}{[\lg(1+z)]^{p+1}} \frac{dz}{z(1+z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{(0)} \frac{e^{ux} - 1}{e^u - 1} \frac{du}{u^{p+1}} = \varphi_{p+1}(x),$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{(0)} \frac{(1+z)^x - 1}{[\lg(1+z)]^{p+1}} \frac{dz}{z^{n+1}(1+z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{(0)} \frac{z^n(e^{ux} - 1)}{(e^u - 1)^{n+1}} \frac{dz}{z^{p+n+1}} = \varphi_{n,p+n+1}(x),$$

d'après la formule (1) du § II;

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(0)} \frac{(1+z)^x-1}{[\lg(1+z)]^{p+1}} \frac{z^{p-k+1}\,dz}{1+z} = \frac{1}{2\pi i}\int_{(0)} \frac{(e^{ux}-1)(e^u-1)^{p-k+2}}{u^{p-k+2}} \frac{du}{u^{k-1}}$$

$$= \psi_{p-k,\,k-1}(x),\ (k \overline{\overline{<}}\ p),$$

d'après la formule (4) du § II.

En même temps on a obtenu, de cette manière, encore une seconde démonstration de la série précédente.

En terminant, nous allons ajouter encore les remarques qui suivent.

1) Dans la série (41) il manque le terme avec z^{p-1}; donc

$$D^{p-1}_{z=0} \frac{z^p}{(1+z)[\lg(1+z)]^p} = 0,$$

ou

$$\int_{(0)} \frac{dz}{(1+z)[\lg(1+z)]^p} = 0.$$

En posant $\log(1+z) = u$, la dernière égalité se transforme en

$$\int_{(0)} \frac{du}{u^p} = 0$$

et devient évidente.

2) En multipliant la série (42) par la série (24)

$$\left(\frac{\lg(1+z)}{z}\right)^p = 1 + \frac{p\,A_{p,0}}{p+1} z + \frac{p\,A_{p+1,1}}{p+2} z^2 + \ldots + \frac{p\,A_{p+n,\,n}}{p+n+1} z^{n+1} + \ldots$$

on obtient l'égalité des deux séries; la comparaison de leurs termes contenant des puissances égales de z donne, entre les nombres $a_{\nu,\,n}$, $A_{\nu,\,n}$, des relations identiques nouvelles que nous nous dispensons d'écrire.

3) En multipliant, de même, la série (43) par la suivante

$$(1+z)^{-x} = 1 - \frac{x}{1} z + \frac{x(x+1)}{\lfloor\underline{2}} z^2 - \ldots + (-1)^n \frac{x(x+1)\ldots(x+n-1)}{\lfloor\underline{n}} z^n + \ldots$$

et en comparant le résultat obtenu avec la série (42) on trouve:

$$\varphi_p(x) = -\frac{x(x+1)}{\lfloor\underline{2}}[\psi_{p-2}(x) + a_{p-3}] + \frac{x(x+1)(x+2)}{\lfloor\underline{3}}[\psi_{1,\,p-3}(x) + a_{1,\,p-4}] - \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{p-2}\frac{x(x+1)\ldots(x+p-2)}{\lfloor\underline{p-1}}[\psi_{p-3,\,1}(x) + a_{p-3,\,0}] + (-1)^{p-1}\frac{x(x+1)\ldots(x+p-1)}{\lfloor\underline{p}};$$

en égalant les coéfficients de z^p, et

$$\varphi_{n,\,p+n}(x)$$

$$= \frac{x}{1}\left[\varphi_{n-1,\,p+n-1}(x) + A_{n-1,\,p+n-2}\right] - \frac{x(x+1)}{\lfloor\underline{2}}\left[\varphi_{n-2,\,p+n-2}(x) + A_{n-2,\,p+n-3}\right] + \ldots$$

$$+ (-1)^{n-2}\frac{x(x+1)\ldots(x+n-2)}{\lfloor\underline{n-1}}\left[\varphi_{1,\,p+1}(x) + A_{1,\,p}\right] +$$

$$+ (-1)^{n-1}\frac{x(x+1)\ldots(x+n-1)}{\lfloor\underline{n}}\left[\varphi_{p}(x) + A_{p-1}\right] +$$

$$+ (-1)^{n+1}\frac{x(x+1)\ldots(x+n-1)}{\lfloor\underline{n+2}}\left[\psi_{p-2}(x) + a_{p-3}\right] +$$

$$+ (-1)^{n+2}\frac{x(x+1)\ldots(x+n+2)}{\lfloor\underline{n+3}}\left[\psi_{1,\,p-3}(x) + a_{1,\,p-4}\right] + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{p+n-2}\frac{x(x+1)\ldots(x+p+n-2)}{\lfloor\underline{p+n-1}}\left[\psi_{p-3,\,1}(x) + a_{p-3,\,0}\right] +$$

$$+ (-1)^{p+n-1}\frac{x(x+1)\ldots(x+p+n-1)}{\lfloor\underline{p+n}},$$

en égalant les coéfficients de z^{p+n}.

Ces deux nouvelles expressions des fonctions $\varphi_p(x)$ et $\varphi_{n,\,p+n}(x)$, étant divisées par x, donnent, pour $x = 0$, les expressions corréspondantes pour les nombres A_{p-1} et $A_{n,\,p+n-2}$, qu'il est inutil d'écrire.

Remarquons, enfin, que la dernière égalité peut être employée comme une formule de réduction de l'intégrale

$$\varphi_{n,\,n+1}(x) = \int_0^x \frac{(x-1)(x-2)\ldots(x-n)}{\lfloor\underline{n}}\,dx$$

Effectivement si l'on y fait $p = 1$, on aura

$$\varphi_{n,\,n+1}(x) = \frac{x}{1}\left[\varphi_{n-1,\,n}(x) + A_{n-1,\,n-1}\right] - \frac{x(x+1)}{\lfloor\underline{2}}\left[\varphi_{n-2,\,n-1}(x) + A_{n-2,\,n-2}\right] + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{n-2}\frac{x(x+1)\ldots(x+n-2)}{\lfloor\underline{n-1}}\left[\varphi_{1,2}(x) + A_{1,\,1}\right]$$

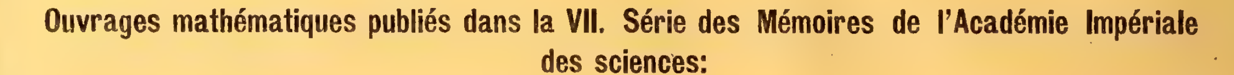
$$+ (-1)^{n-1}\frac{x(x+1)\ldots(x+n-1)}{\lfloor\underline{n}}\left[\varphi_{1}(x) + A_{0}\right]$$

$$+ (-1)^{n}\frac{x(x+1)\ldots(x+n)}{\lfloor\underline{n+1}}.$$

Dans cette étude des fonctions de Bernoulli, faite sous un point de vue que je crois assez général, j'espère avoir obtenu quelques résultats nouveaux. Cependant, pour en avoir l'assurance il fallait avoir consulté des ouvrages ou mémoires separés trop nombreux; pendant l'impréssion même de ce travail j'ai rencontré, dans l'Américan Journal of mathematics de Mr Sylvester l'article de Mr G. S. Ely sur la Bibliography of Bernoulli's Numbers, contenant la liste de 78 noms d'auteurs de 150 ouvrages et qui n'est pas encore complète. Je m'éxcuse donc d'avance si, en poursuivant le développement analytique de mon point de vue sur l'objet de cette étude, j'ai rencontré quelques résultats, sans être à même de citer les noms de leurs auteurs primitifs. Quant à la rédaction du présent mémoire, on aurait pu peut-être l'abréger considérablement, en prenant pour point de départ la série (41) du § V; mais j'ai preferé la marche plus naturelle et plus simple que j'ai suivie autrefois dans l'étude de la fonction primitive de Jacques Bernoulli. Après avoir étudié ici les propriétés principales des fonctions généralisées de Bernoulli, je me propose d'y revenir, dans une autre occasion, pour analyser leurs autres propriétés ou analogies des propriétés avec les fonctions de Bernoulli ordinaires.

Errata:

Page	5	ligne	22	$+ a_{n-2}\psi_{1,1}(x)$	au lieu de			$+ a_{1,n-2}\psi_{1,1}(x)$
»	»	»	24	$+ a_{n-2}\psi_{\nu-1,1}(x)$	»	»	»	$+ a_{n-2,\nu}\psi_{\nu-1,1}(x)$
»	6	»	26	$A_{\nu-1,n-3}\frac{1}{\lfloor 2} + A_{\nu-1,n-2}$	»	»	»	$A_{\nu-1,n-3}\frac{1}{\lfloor 2} A_{\nu-1,n-2}$
»	20	»	26	$A_{2m} = 0$	»	»	»	$A_{2m} =$



Ouvrages mathématiques publiés dans la VII. Série des Mémoires de l'Académie Impériale des sciences:

T. I, № 5. **Tchébycheff, P.** Sur l'interpolation dans le cas d'un grand nombre de données fournies par les observations. 1859. Pr. 65 K. = 2 Mk. 20 Pf.

№ 9. **Bouniakowsky, V.** Sur quelques inégalités concernant les intégrales ordinaires et les intégrales aux différences finies. 1859. Pr. 25 K. = 80 Pf.

№ 14. **Somoff, J.** Sur l'équation algébrique à l'aide de laquelle on détermine les oscillations très-petites d'un système de points matériels. 1859. Pr. 25 K. = 80 Pf.

T. IV, №. 2. **Bouniakowsky, V.** Recherches sur quelques fonctions numériques. 1861. Pr. 30 K. = 1 Mk.

T. V, № 1. **Minding, Dr. Ferd.** Beiträge zur Integration der Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen zwei veränderlichen Grössen. 1862. Pr. 75 K. = 2 Mk. 50 Pf.

№ 9. **Somoff, J.** Mémoire sur un cas particulier de l'homographie plane. 1863. Pr. 25 K. = 80 Pf.

T. VIII, № 5. **Somoff, J.** Mémoire sur les accélérations de divers ordres. 1864. Pr. 45 K. = 1 Mk. 50 Pf.

№ 16. **Somoff, J.** Moyen d'exprimer directement en coordonnées curvilignes quelconques orthogonales ou obliques, les paramètres différentiels du premier et du second ordres et la courbure d'une surface. 1865. Pr. 40 K. = 1 Mk. 30 Pf.

T. XVIII, № 7. **Bouniakowsky, V.** Considérations sur quelques singularités qui se présentent dans les constructions de la géometrie non-Euclidienne. 1872. Avec 1 pl. lith. Pr. 25 K. = 80 Pf.

T. XXII, № 9. **Somoff, J.** Mémoire sur les forces qui ne changent pas d'intensité et de direction, quand leurs points d'application formant un système invariable reçoivent un déplacement fini quelconque. 1876. Pr. 35 K. = 1 Mk. 20 Pf.

T. XXIX, № 2. **Helmling, Prof. Dr. P.** Neue Integrations-Wege. 1881. Pr. 35 Kop. = 1 Mk. 20. Pf.

T. XXXI, № 3. **Catalan, E.** Recherches sur la constante G, et sur les intégrales Eulériennes. 1883. Pr. 45 Kop. = 1 Mk. 50 Pf.

Imprimé par ordre de l'Académie Impériale des sciences.

Novembre, 1883. C. Vessélofsky, Secrétaire perpétuel.

Imprimerie de l'Académie Impériale des sciences. (Vass.-Ostr., 9e ligne, № 12.)

MÉMOIRES
DE
L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES DE ST.-PÉTERSBOURG, VIIE SÉRIE.
Tome XXXI, N° 12.

DIE
BEOBACHTUNG DER ELECTRISCHEN STRÖME DER ERDE
IN KÜRZERN LINIEN

VON

H. Wild.

(Mit einer Tafel.)

(Lu le 20 septembre 1883.)

ST.-PÉTERSBOURG, 1883.
Commissionnaires de l'Académie Impériale des sciences:

à St.-Pétersbourg: MM. Eggers & Cie et J. Glasounof;
à Riga: M. N. Kymmel;
à Leipzig: Voss' Sortiment (G. Haessel).

Prix: 30 Kop. = 1 Mrk.

MÉMOIRES
DE
L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES DE ST.-PÉTERSBOURG, VIIE SÉRIE.
Tome XXXI, № 12.

DIE
BEOBACHTUNG DER ELECTRISCHEN STRÖME DER ERDE
IN KÜRZERN LINIEN

VON

H. Wild.

(Mit einer Tafel.)

(Lu le 20 septembre 1883.)

St.-PÉTERSBOURG, 1883.
Commissionnaires de l'Académie Impériale des sciences:

à St.-Pétersbourg: MM. Eggers & Cie et J. Glasounof;
à Riga: M. N. Kymmel;
à Leipzig: Voss' Sortiment (G. Haessel).

Prix: 30 Kop. = 1 Mrk.

Imprimé par ordre de l'Académie Impériale des sciences.

Novembre 1883. C. Vessélofski, Secrétaire perpétuel.

Imprimerie de l'Académie Impériale des sciences.
(Vass.-Ostr., 9 ligne, № 12.)

Da die Frage über die Natur der electrischen Ströme in der Erde, ihren zeitlichen Verlauf und ihren Zusammenhang mit andern Erscheinungen noch nicht genügend gelöst schien, so habe ich besonders zur Ermittlung des Zusammenhangs derselben mit den erdmagnetischen Phänomenen schon im Jahr 1880 die Verwaltung der Russischen Telegraphen ersucht, beim meteorologisch-magnetischen Observatorium in Pawlowsk zwei kürzere, je 1 Kilometer lange, aufeinander senkrecht stehende unterirdische Kabel zum ausschliesslichen Studium dieser Ströme legen zu lassen und auch vom damaligen Telegraphen-Director Herrn Geheimrath von Lüders eine freundliche Zusage erhalten. Verschiedene Umstände verzögerten indessen die Legung der Kabel, die erst im Sommer 1882 und auch da so spät erfolgte, dass sie auf die Zeit meiner Abwesenheit von Petersburg im Herbste jenes Jahres fiel. Ich konnte daher erst in diesem Jahre während meines Aufenthaltes in Pawlowsk einige Untersuchungen über die zweckmässige Beobachtung der Erdströme in diesen Kabeln machen, Untersuchungen, deren Resultate der Mittheilung werth sein dürften.

Lamont hat zuerst (1859) auf der Sternwarte in München (Bogenhausen) kürzere Leitungen zur ausschliesslichen und continuirlichen Beobachtung der Erdströme eingerichtet. Die Distanz seiner Erdplatten betrug anfänglich 320 bayr. Fuss oder in runder Zahl 100^m und wurde später auf das Doppelte vergrössert[1]).

Bedeutend länger waren die Leitungen, welche Airy (1862) auf der Sternwarte in *Greenwich* zum Studium der Erdströme benutzte. Die Entfernung der Erdplatten war nämlich bei der einen Linie 8 und bei der andern 10 engl. Meilen od. also 13 und 16 Kilometer[2]).

Im Jahr 1880 hat dagegen Galli beim Observatorium in *Velletri* zwei Linien von bloss 4^m und 6^m Länge einrichten lassen und theilt Beobachtungsresultate über die Richtung und Stärke der in ihnen gemessenen Erdströme mit[3]).

---

1) Lamont, Der Erdstrom und der Zusammenhang desselben mit dem Magnetismus der Erde. Leipzig, Leopold Voss 1862.

2) Airy, Comparison of Magnetic Disturbances recorded by the Self-registering Magnetometers with Magnetic Disturbances deduced from the corresponding Terrestrial Galvanic Currents recorded by the Self-registering Galvanometers. Philosoph. Transactions Vol. 158 Part. II, p. 465, 1868.

3) Galli, Le correnti elettriche del suolo. Osservatorio meteorico municipale di Velletri № 1. 10 Luglio 1882.

Nach diesen Vorlagen schien es mir genügend, 1 Kilometer lange Leitungen zur Untersuchung der Erdströme in Pawlowsk einrichten zu lassen, deren Resultate dann auch mit den gleichzeitigen Beobachtungen derselben auf längern Telegraphen-Linien, wie sie besonders für die Epoche der internationalen Polar-Expeditionen projectirt waren, zu vergleichen gewesen wären. Leider sind bei uns in Russland die Beobachtungen auf den Telegraphen-Linien nicht zu Stande gekommen, während in Pawlowsk an den kurzen Leitungen täglich zu 3 Terminen und ausserdem an den Termins-Tagen alle 5 Minuten der Nord-Süd und Ost-West-Strom zugleich mit den übrigen magnet. Instrumenten regelmässig abgelesen wurde.

Disposition der Leitungs-Kabel und Beobachtungs-Instrumente. Die Disposition der Leitungen ist aus dem beiliegenden Plane leicht ersichtlich. Auf den Wegen des Grossfürstlichen Parkes und den beiden Landstrassen, welche am Terrain des Observatoriums im Norden und Süden vorbeiführen, wählte ich 4 Punkte so aus, dass zwei davon möglichst genau im astronomischen Meridian in ein Werst (1,067 Kilometer = 500 Faden) Entfernung voneinander und die beiden andern in der Senkrechten dazu in gleicher Distanz voneinander lagen. Dies ermöglichte die unterirdischen Kabel zur Verbindung dieser Punkte mit dem Galvanometer im unterirdischen Pavillon des Observatoriums überall mit Ausnahme eines kurzen Stücks auf dem Terrain des Observatoriums selbst — von jenem Pavillon bis zur nächsten Strasse — auf den Wegen einzulegen und sie so am besten vor Beschädigungen zu schützen.

An den genannten 4 Punkten wurden Gruben von 2 Meter Tiefe gegraben und auf den Grund dieser horizontal je 1 m^2 grosse, $2^{mm},5$ dicke Bleiplatten gelegt, in deren Mitte zur Befestigung der Kabelenden messingene Klemmschrauben durch breite angeschraubte Messingplatten befestigt waren. Um die Kabelenden eventuell mit andern Erdplatten verbinden und jeder Zeit eine Prüfung der Isolation der Kabel vornehmen zu können, wurden übrigens jene nicht direct mit den Bleiplatten verbunden, sondern 4^{mm} dicke, gut isolirte Kupferdrähte an diese und jene angelöthet und beide in durchbohrte, über den Erdplatten aufgestellte Holz-Pfähle geführt, an deren oberem, ausgehöhltem Ende sie erst durch Siemens'sche Kabel-Verbindungs-Kapseln leitend vereinigt wurden. Die Skizze in der beiliegenden Tafel veranschaulicht diese Einrichtung der Erdplatten und ihrer Verbindung mit dem Kabel, das selbst nur 1^m bis $1^m,4$ tief in der Erde liegt. Es bedarf kaum der Erwähnung, dass die Löthstellen und Drahtverbindungen an der Platte überall gut mit Isolirmasse bedeckt wurden.

Alle Erd-Platten sind am Rande der Wege eingegraben und zwar liegt die *Nord-Platte in reinem, recht nassem Sande*, die *Süd-Platte ebenfalls in reinem, aber trockenem Sande.* Die letztere liegt in Folge einer allmählichen Senkung des Terrains gegen Norden in einem nahe 4^m höhern Niveau als die Nord-Platte. Der Boden bei der *Ost- und West-Platte ist stark lehmhaltig*; es wurde daher, um mehr Gleichartigkeit mit den ersten Platten zu erzielen, hier die Grube noch um $0^m,2$ tiefer gegraben und so

hoch reiner Sand eingefüllt, darauf erst die Bleiplatte gelegt, dann wieder mit einer Sandschicht von $0^m{,}2$ Dicke bedeckt und nun erst der Lehm etc. aufgeschüttet und festgestampft. Die Ost- und West-Platte liegen angenähert in gleichem Niveau mit der Nord-Platte und der Boden um sie ist auch nass, insbesondere bei der West-Platte.

Das Kabel selbst besteht aus einer, aus 7 Kupferdrähten zusammengedrehten Ader von ungefähr $1^{mm}{,}9$ Dicke, welche zunächst mit einer Guttapercha-Hülle von $5^{mm}{,}5$ äusserm Durchmesser umgeben und dann noch von vier Hanf-Schichten bedeckt ist, von denen die beiden äussern mit Asphalt getränkt sind; dadurch steigt der Durchmesser der äussern Umhüllung auf 20^{mm} an. In diesem Zustand sind die Kabel von den 4 Erdplatten an in 1^m bis $1^m{,}4$ Tiefe unter der Erdoberfläche längs der Wege bis zum unterirdischen Pavillon und in diesen hinein bis in den stets trockenen innern Corridor zwischen den beiden Sälen gelegt, dort erst von der Hanf-Hülle befreit und mit der blossen Guttapercha-Hülle dann weiter in den Magnetometer-Saal bis zum Galvanometer resp. zum Commutator geführt. Das ganze Kabel wurde vom Haus Siemens & Halske in St. Petersburg in zwei Stücken geliefert, von welchen das grössere für die Verbindung der Nord- und Süd-Platte mit dem Galvanometer benutzt wurde und pro 1 Kilometer 7,572 Siemens'sche Einheiten Widerstand bei 15° C. hat, während das kleinere, zur Verbindung der Ost- und West-Platte mit dem Galvanometer dienende, pro 1 Kilometer 8,063 Siemens'sche Einheiten Widerstand bei derselben Temperatur aufwies.

Gemäss dem Plane und genauern Abmessungen betragen nun die Längen der einzelnen Kabel von den respectiven Erdplatten bis zu dem Galvanometer und die den vorigen Daten gemäss daraus berechneten Widerstände derselben:

	Länge.		Widerstand in Siemens Einheiten.
$W - G$	: 339 $F.$	= 723^m	5,830
$S - G$	: 425	= 907	6,868
$E - G$	: 393	= 838	6,757
$N - G$	: 485	= 1035	7,837

wo $W - G$ die Leitung von der West-Platte bis zum Galvanometer, etc. bedeuten.

Aus dem Plane ist ferner zu entnehmen, dass die directen Entfernungen der verschiedenen Platten von einander betragen:

$N - S$	: 510 Faden	= 1,088	Kilometer
$E - W$	: 500 »	= 1,067	»
$N - W$	: 415 »	= 0,885	»
$N - E$	: 330 »	= 0,704	»
$S - W$	: 395 »	= 0,843	»
$S - E$	: 305 »	= 0,651	»

Endlich ergibt sich aus dem Plan, dass die Verbindungslinie der Nord- und Süd-Platte sehr nahe senkrecht auf derjenigen der Ost- und West-Platte steht, dagegen die erstere nicht genau mit dem astronomischen Meridian AB zusammenfällt, sondern im Nord um einen Winkel von 4° nach Ost davon abweicht und folglich mit dem zeitigen mittlern magnetischen Meridian einen Winkel von 4° 45′ einschliesst. Ferner sind die Winkel der Seiten des von den Erdplatten gebildeten Vierecks $NESW$ mit den Diagonalen desselben:

$$\angle WNS = 49^\circ\ 30' \quad \angle SNE = 35^\circ\ 30'$$
$$\angle WSN = 52^\circ\ 30' \quad \angle NSE = 38^\circ\ \ 0'$$

und die Winkel NWE, etc. sind die respectiven Complemente zu diesen, da die Diagonalen aufeinander senkrecht stehen.

Nach einer gleich zu Anfang vorgenommenen Reparatur des zur Westplatte führenden Kabels erwies sich dann bei der letzten Untersuchung die Isolation aller als sehr befriedigend.

Zur Beobachtung der Erdströme in diesen Kabeln diente anfänglich nur ein Galvanometer, welches abwechselnd mit den Enden der zur Nord- und Süd-Platte und zur Ost- und West-Platte führenden Leitungen durch eine Wippe verbunden wurde. Das Galvanometer besteht aus einem Lamont'schen Variations-Declinatorium in der Form, wie es kürzlich von Herrn Edelmann beschrieben worden ist[1]) d. h. mit einem kleinen hufeisenförmigen Magnet, der mit seinem Planspiegel bloss 5^g wiegt und in die Durchbohrung eines starken umgebenden Kupferdämpfers eingelassen ist, so dass er beinahe nur aperiodische Bewegungen ausführt. An der auf den Apparat aufzusetzenden Ablenkungsschiene für Empfindlichkeitsbestimmungen sind beiderseits vom Magnet die Halter zweier Solenoide aufgeschoben, deren Axen in gleicher Höhe mit den Polen des Magnets liegen und welche zur Veränderung der Empfindlichkeit des Galvanometers dem Magnet mehr oder weniger angenähert werden können. Jedes Solenoid enthält 1012 Windungen eines $0^{mm}_{,}7$ dicken, mit Seide besponnenen Kupferdrahts, der in 22 Lagen auf einem 10^{mm} dicken Holzkern aufgewunden ist. Der Widerstand beider Spulen ist nahe gleich und beträgt für beide zusammen 10,42 Siemens'sche Einheiten.

Das Fernrohr mit von hinten beleuchteter Glasscale zur Ablesung der Magnet-Ausschläge des Galvanometers ist in solcher Entfernung aufgestellt, dass einem Scalentheil (Millimeter) der Glasscale ein Bogenwerth von 1′ entspricht.

So lange als die Stärke der Erdströme nur bei ganz kurz dauerndem Schluss des Stromkreises unmittelbar vor der Beobachtung gemessen wurden, hatte es keine Inconvenienz, den Ost-West- und Nord-Süd-Strom rasch nacheinander mit demselben Galvanometer zu beobachten. Als ich indessen im Sommer 1883 bei näherer Untersuchung fand,

---

1) M. Th. Edelmann, Die erdmagnetischen Apparate der Polar-Expeditionen im Jahre 1883. Braunschweig, F. Vieweg und Sohn 1882.

dass es zur Erzielung constanterer Resultate und rascherer Ablesung besser sein dürfte, den Strom beständig geschlossen zu lassen, war es nothwendig noch ein zweites Galvanometer einzurichten. Es wurde dazu ein zweites ganz gleiches Lamont'sches Variations-Declinatorium, das bisdahin nur zur Beobachtung der Declinations-Variationen gedient hatte, verwendet und in gleicher Weise wie das erstere in ein Galvanometer umgewandelt. Die beiden Solenoide stellte ich dabei so ein, dass der Nord-Süd-Strom in beiden Galvanometern denselben Ausschlag gab. Nun ist aber der Widerstand dieser neuen Solenoide, da sie bei gleicher Zahl der Windungen aus einem dünnern Kupferdrahte hergestellt sind, zusammen nicht 10,42 S. E., sondern 23,73 S. E. Es wurde daher, um den Widerstand des erstern Galvanometers auf ungefähr dieselbe Grösse zu bringen, dort in die Leitung noch eine Rolle Neusilberdraht eingeschaltet, so dass der Galvanometer-Widerstand auf 22,40 S. E. stieg, und sodann durch Annäherung der Solenoide an den Magnet bewirkt, dass dieselbe electromotorische Kraft jetzt trotz des grössern Widerstandes den gleichen Ausschlag wie früher gab. Es sind also trotz dieser Veränderung des ältern Galvanometers und ebenso beim neuen Galvanometer, das für die Beobachtung des Ost-West-Stroms bestimmt ist, die jetzigen Angaben unmittelbar mit den frühern vergleichbar. Vom 14. Juli 1883 an ist das Nord-Süd-Kabel beständig durch das ältere und das West-Ost-Kabel ebenso durch das neuere Galvanometer geschlossen worden. Die Leitung wird nur zur Zeit der Beobachtung nach erfolgter Ablesung des Nadelstandes auf einen Moment geöffnet, um die dem magnet. Meridian entsprechende Stellung des Magnets zu beobachten.

Verschiedene Umstände, insbesondere aber die Beobachtung, dass am 27. September, bei Ausgrabung der Ost-Erdplatte behufs Abänderung der ursprünglichen directen Verbindung des Kabels mit der Platte in der oben angegebenen Weise, ein plötzlicher Sprung in der Stärke des Ost-West-Stromes von ungefähr 70 Scalentheilen erfolgte — während vorher die Ablenkung durchschnittlich 96 Scalentheile betrug, fiel sie von da an auf 26 Scalentheile —, schien darauf hinzuweisen, dass der gewöhnlich beobachtete Strom in den Kabeln der Hauptsache nach nur einer electromotorischen Differenz der Erdplatten beizumessen sei und bloss zur Zeit grösserer Störungen erhebliche Ablenkungen des Galvanometer-Magnets darüber hinaus durch den eigentlichen Erdstrom erfolgten. Es war daher vor Allem geboten, sich dessen zu versichern und sich zu dem Ende nach einer Beobachtungsmethode umzusehen, welche diese beiderlei Wirkungen zu trennen gestatte. Um dabei nicht irre zu gehen, dürfte es gut sein, sich vorher über den ganzen Vorgang ein klareres Bild zu verschaffen.

Beobachtungs-Methoden.

Welches auch die eigentliche Ursache der electrischen Ströme in der Erde sei, in einem gegebenen Moment werden wir dieselben uns immer dadurch hervorgebracht denken können, dass irgendwo in grösserer Entfernung zwei Electroden I und II einer ausserhalb

der Erde geschlossenen und eine Electricitätsquelle enthaltenden Leitung in die Erde den Strom der letztern einführen, der sich dann in den bekannten Curven über die ganze leitende Erde von einer Electrode zur anderen verbreitet. Heissen wir den Widerstand der äussern Leitung W, die electromotorische Kraft darin E, den Radius der kugelförmig gedachten Electroden R, ihre Entfernung $d_{I,II}$ und das Leitungsvermögen der Erdmasse, dieselbe homogen und unendlich ausgedehnt angenommen, x, so ist die Stromstärke J in der äussern Leitung angenähert gegeben durch:

$$J = \frac{E}{W + \frac{1}{2\pi x}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{d_{I,II}}\right)}, \quad \ldots\ldots (1)$$

so dass also das 2. und 3. Glied im Nenner zusammen den Widerstand der Erde repräsentiren.

Haben wir nun an einer Stelle der Erdoberfläche ausserdem zwei kugelförmige Electroden 1 und 2 vom Radius r und der Entfernung $d_{1,2}$, welche ausserhalb durch einen Draht vom Querschnitt q, der Länge l und dem Leitungsvermögen k verbunden sind, so ergiesst sich in diesen ein Zweigstrom i des ganzen Erdstroms J, der angenähert durch den Ausdruck

$$i = J \cdot \frac{\frac{1}{4\pi x}\left(\frac{1}{d_{I,1}} + \frac{1}{d_{II,2}} - \frac{1}{d_{I,2}} - \frac{1}{d_{II,1}}\right)}{\frac{l}{kq} + \frac{1}{2\pi x}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{d_{1,2}}\right)} \quad \ldots\ldots (2)$$

gegeben ist, wo $d_{I,1}$ die Entfernung der einen Draht-Electrode 1 von der nähern Erdstrom-Electrode I, $d_{II,1}$ die von der fernern Erdstrom-Electrode II, etc., bedeuten.

Ist dieser Leitungsdraht mit seinen Electroden ausserdem der Sitz einer besondern electromotorischen Kraft e, so würde diese für sich in ihm einen Strom erzeugen, dessen Stärke i' gegeben ist durch:

$$i' = \frac{e}{\frac{l}{kq} + \frac{1}{2\pi x}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{d_{1,2}}\right)}. \quad \ldots\ldots (3)$$

Aus 1., 2. und 3. folgt:

$$\frac{i}{i'} = \frac{E}{e} \cdot \frac{\frac{1}{d_{I,1}} + \frac{1}{d_{II,2}} - \frac{1}{d_{I,2}} - \frac{1}{d_{II,1}}}{4\pi x\, W + 2\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{d_{I,II}}\right)}. \quad \ldots\ldots (4)$$

Da $d_{I,1}$ kleiner als $d_{I,2}$ und $d_{II,2}$ ebenso kleiner als $d_{II,1}$, so ist der Zähler jedenfalls positiv und um so grösser je weiter die Electroden unserer Drahtleitung auseinanderstehen.

Aus der Gleichung 4. ersehen wir also, dass das Verhältniss der Stärke des Erdstromzweiges in unserem Leitungsdraht zur Stärke des von der electromotorischen Kraft der Erdplatten herstammenden Stromes unabhängig ist vom Widerstand $\frac{l}{kp} = w$ der Drahtleitung und von der Grösse r der Electro-

den, also nicht, wie hie und da behauptet wurde, durch Vergrösserung dieses Widerstandes oder dieser Electroden ein günstigeres wird, dagegen durch Vermehrung des Abstandes der Electroden voneinander zunimmt und zwar, wenigstens bei kleinern Distanzen, nahe proportional derselben[1]).

Der im Leitungsdraht in Wirklichkeit beobachtete Strom J' ist gegeben durch:

$$J' = i - i' = \frac{E.\, a\left(\frac{1}{d_{I,1}} + \frac{1}{d_{II,2}} - \frac{1}{d_{I,2}} - \frac{1}{d_{II,1}}\right) - e}{\frac{l}{kq} + \frac{1}{2\pi x}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{d_{1,2}}\right)} \ldots\ldots (5)$$

wo:

$$a = \frac{1}{4\pi x\left[W + \frac{1}{2\pi x}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{d_{I,II}}\right)\right]}, \ldots\ldots (6)$$

wenigstens für einige Zeit als constante Grösse betrachtet werden kann. Setzen wir der Kürze halber:

$$\frac{1}{d_{I,1}} + \frac{1}{d_{II,2}} - \frac{1}{d_{I,2}} - \frac{1}{d_{II,1}} = f(d) \ldots\ldots (7)$$

und berücksichtigen, dass: $\frac{l}{kq}$ den Widerstand w der Drahtleitung und $\frac{1}{2\pi x}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{d_{1,2}}\right)$ den Widerstand w_ε der Erde zwischen den beiden Electroden darstellt, so hat man auch einfacher:

$$J' = \frac{E.a.f(d) - e}{w + w_\varepsilon} \ldots\ldots (8)$$

Ungefähr zu gleicher Zeit wird man dann für ein Paar andere Electroden 3 und 4 haben:

$$J'' = \frac{E.a.f(d') - e'}{w' + w'_\varepsilon}, \ldots\ldots (8')$$

wo $f(d')$ eine Function der Entfernungen $d_{I,3}$, $d_{II,4}$ etc. der neuen Electroden von den fingirten Erdstrom-Electroden, e' die electromotorische Kraft der neuen Erdplatten, w' den Widerstand der Drahtleitung zwischen 3 und 4 und w'_ε denjenigen der Erde für die Distanz $d_{3,4}$ darstellen.

Die Ströme J', J'', in den Gleichungen 8., 8', und ähnlichen für weitere Combinationen von Electroden werden durch die Magnet-Ablenkungen am eingeschalteten Galvanometer gemessen, bei dem man angenähert hat:

$$J' = \frac{H}{c} \cdot n', \qquad J'' = \frac{H}{c} \cdot n'', \text{ etc.} \ldots\ldots (9)$$

1) Wenn man ein empfindliches Galvanometer anwendet, so können also die Erdplatten auch kleiner sein und in diesem Falle eher aus einem Material angefertigt werden, das homogener und unveränderlicher ist z. B. aus reinem Platin.

wo n', n'' etc. die in Scalentheilen ausgedrückten Ablenkungen, c die sogenannte Empfindlichkeitsconstante des Galvanometers und H die Horizontal-Intensität des Erdmagnetismus darstellen. Die Constante c kann durch Vergleich mit einer Tangenten-Boussole in absolutem Maasse bestimmt werden.

Vom Nenner in den Gleichungen 8, 8', etc. sind die Widerstände w, w', etc. der Kabel mit Einschluss des Galvanometers in unserm Falle S. 6 und 8 gegeben, dagegen ist der Widerstand w_ε der Erde unbekannt. Dieser kann indessen zusammen mit jenem leicht mit genügender Genauigkeit zu Zeiten, wo keine starken Veränderungen im Erdstrom erfolgen, nach der Ohm'schen Methode bestimmt werden. Ist nämlich: J'_x die Stromstärke, welche im Kabel 1, 2 nach Einschaltung eines Widerstandes x in die Leitung beobachtet wird, so ergibt sich aus der Gleichung 8. und der neuen analogen für diesen Fall:

$$w + w_\varepsilon = x \frac{J'_x}{J' - J'_x} = x \frac{n'_x}{n' - n'_x}, \ldots\ldots (10)$$

wo n'_x die dem Strom J'_x entsprechende Ablenkung am Galvanometer darstellt und vorausgesetzt ist, dass die electromotorischen Kräfte während dieser Zeit constant geblieben seien.

Aus denselben zwei Gleichungen finden wir aber auch:

$$E.a\, f(d) - e = x \frac{J'.J'_x}{J' - J'_x} = x \frac{H}{c} n' \cdot \frac{n'_x}{n' - n'_x} \ldots\ldots (11)$$

Statt nun hier oder in den Ausdrücken 9. die Constante c des Galvanometers besonders zu ermitteln, kann man auch zwei ganz entsprechende Beobachtungen am Galvanometer anstellen, indem man dasselbe statt mit dem Kabel mit einem Daniell'schen Element verbindet. Heissen wir die in diesem Fall beobachteten Ablenkungen am Galvanometer: n und n_y, wo n_y die Ablesung bei Einschaltung des Widerstandes y bedeuten soll, so kommt für die electromotorische Kraft ϵ des Daniell'schen Elements entsprechend:

$$\epsilon = y \frac{J.J_y}{J - J_y} = y \frac{H}{c} n \frac{n_y}{n - n_y}, \ldots\ldots (12)$$

und aus 11 und 12 folgt dann:

$$E.a\, f(d) - e = \epsilon \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{n' n'_x}{n' - n'_x} \cdot \frac{n - n_y}{n\, n_y} \ldots\ldots (13)$$

Auf diese Weise drücken wir also die electromotorische Kräfte der Erde und unserer Erdplatten durch diejenige eines Daniell'schen Elementes aus und haben überdies den Vortheil durch passende Wahl des Widerstandes y, sowie des zur Schwächung des Stroms des Daniell'schen Elements überhaupt einzuschaltenden Widerstandes nahezu die Ablenkungen

$$n = n' \text{ und } n_y = n'_x$$

machen zu können, wodurch wir von einer allfälligen Variation der Grösse c mit der Ablenkung n unabhängig werden.

Es gibt noch eine andere bequeme Methode, die electromotorische Kraft in den Kabeln mit derjenigen eines Daniell'schen Elementes zu vergleichen, indem man nämlich nach Fechner ein solches Element einmal so in die Leitung einschaltet, dass sich beide electromotorischen Kräfte addiren und sodann so, dass sie sich entgegen wirken. Heissen wir im erstern Fall die Ablenkung am Galvanometer n_1 und im 2ten n_2, so ist dann:

$$E.a.f(d) - e = \epsilon \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13')$$

In der einen oder andern Weise erhalten wir also durch Beobachtung der Ströme in den Kabeln, die je zwei Erdplatten verbinden, Gleichungen von der Form:

$$\left.\begin{array}{l} E.a.f(d) - e = A, \\ E.a.f(d') - e' = A', \\ E.a.f(d'') - e'' = A'', \text{ etc.} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

wo A, A', A'', etc. bekannte Grössen sind.

Weitere Relationen, welche wir zwischen den unbekannten Grössen E, a, $f(d)$ und folg. und anderseits zwischen den e unter sich aufstellen können, werden uns gestatten, genügend viel Gleichungen zur Bestimmung derselben zu erhalten.

Was zunächst die e betrifft, so stellen sie je die Differenz der electromotorischen Kräfte dar, welche an den Berührungsstellen der beiden Metallplatten mit der Erde auftreten. Heissen wir diese bei unsern Kabeln mit ihren 4 Erdplatten in Nord, Süd, Ost und West resp.

$$N \mid T,\ S \mid T,\ E \mid T \text{ und } W \mid T,$$

so wird abgesehen vom Zeichen sein:

bei Combination von:	$e =$
Nord- und Süd-Platte	$N \mid T - S \mid T,$
Nord- und Ost-Platte	$N \mid T - E \mid T,$
Nord- und West-Platte	$N \mid T - W \mid T,$
West- und Ost-Platte	$E \mid T - W \mid T,$
West- und Süd-Platte	$W \mid T - S \mid T,$
Ost- und Süd-Platte	$E \mid T - S \mid T.$

Wir werden also bei diesen 6 möglichen Combinationen unserer 4 Erdplatten resp. in den entsprechenden Gleichungen es nur mit 4 unbekannten Grössen e zu thun haben.

Aus dem Werth für $f(d)$ Gleichung 7. ersieht man ferner, dass diese Function und damit der Werth des ganzen Ausdrucks: $E.a.f(d)$ gleich Null wird, wenn $d_{I,1} = d_{I,2}$ und $d_{II,1} = d_{II,2}$ werden d. h. also wenn die Verbindungslinie unserer beiden Erdplatten auf der Ebene durch die Verbindungslinie der beiden fingirten Erdelectroden und den Ort der Beobachtung senkrecht steht. Es steht dann jene Verbindungslinie senkrecht auf den Strömungscurven der Electricität oder fällt mit andern Worten in ein und dieselbe Fläche gleicher Spannung oder gleichen Potentials der Erdelectricität.

Die Grösse: $E.a.f(d)$ repräsentirt daher offenbar nichts anderes als die Spannungs- oder Potential-Differenz der Erdelectricität an den beiden Erdplatten, welche im Allgemeinen gegeben ist durch:

$$E \,.\, a \,.\, f(d) = \varepsilon \,.\, d \,.\, \cos \,.\, v$$

wenn d die Distanz der beiden Erdplatten, v den Winkel ihrer Verbindungslinie mit der Normalen zu den Flächen gleichen Potentials resp. den Strömungslinien des Erdstroms an der betreffenden Stelle und ε die in dieser Richtung auf die Einheit der Länge fallende Potential-Differenz darstellen. Dies, ε und v, sind aber die Grössen, welche wir gerade für den Erdstrom zu erfahren wünschen, und sind zugleich die einzigen Unbekannten, welche hiernach in den verschiedenen Ausdrücken $E.a.f(d)$, $E.a.f(d')$ etc. der Gleichungen 8. enthalten sind. Den 6 Platten-Combinationen in unserm speciellen Fall entsprechen also 6 Gleichungen, welche ausser den bereits erwähnten 4 Unbekannten in den Ausdrücken von e nur noch 2 solche in den Ausdrücken von $E.a.f(d)$ enthalten. Es sind also in der That nur so viele Unbekannte als Gleichungen und somit die Aufgabe lösbar.

Beziehen wir in unserm speciellen Fall die Richtung des Erdstroms auf die Verbindungslinie der Nord- und Süd-Platte, nehmen an, dass der positive Strom von Nord nach Süd verlaufe resp. das Potential nach Norden hin wachse und dass die Stromesrichtung im Norden den Winkel v nach Westen hin mit jener Verbindungslinie einschliesse, dass ferner die Bleiplatten überall in Berührung mit der Erde mehr oder minder negativ electrisch werden, so erhalten wir, die Platten-Distanzen der Reihe nach mit a, b, c, d, etc. bezeichnend und die Winkel der Vierecks-Seiten mit der Diagonale NS resp. durch β, γ, δ, φ darstellend folgende Gleichungen an Stelle von 8:

$$\left.\begin{aligned}
A_1 &= \varepsilon \,.\, a \,.\, \cos v & - N \mid T + S \mid T \\
A_2 &= \varepsilon \,.\, b \,.\, \cos(\beta - v) & - N \mid T + E \mid T \\
A_3 &= \varepsilon \,.\, c \,.\, \cos(\gamma + v) & - N \mid T + W \mid T \\
A_4 &= \varepsilon \,.\, d \,.\, \cos(\delta - v) & - W \mid T + S \mid T \\
A_5 &= \varepsilon \,.\, f \,.\, \cos(\varphi + v) & - E \mid T + S \mid T \\
A_6 &= \varepsilon \,.\, g \,.\, \sin v & - W \mid T + E \mid T
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (15)$$

wobei positive Vorzeichen der A Richtungen des positiven Stroms von N nach S, N nach E, etc. repräsentiren. Aus diesen Gleichungen folgt nun ferner:

$$\left.\begin{array}{l}\varepsilon\,[a.\cos v - b.\cos(\beta - v) - f.\cos(g + v)] = A_1 - A_2 - A_5 = x\ , \\ \varepsilon\,[a.\cos v - c.\cos(\gamma + v) - d.\cos(\delta - v] = A_1 - A_3 - A_4 = y\ , \\ \varepsilon\,[d.\cos(\delta - v) - f\ \cos(\varphi + v) - g\ \sin v] = A_4 - A_5 - A_6 = z^{1}),\end{array}\right\}\ ..(15')$$

und aus diesen hinwieder ergibt sich:

$$\left.\begin{array}{l}\operatorname{tang} v = \dfrac{y\ (a - b\ \cos\beta - f\cos\varphi) + x\ (c\ \cos\gamma + d\ \cos\delta - a)}{y\ (b\ \sin\beta - f\ \sin\varphi) + x\ (c\ \sin\gamma - d\ \sin\delta)}, \\ \operatorname{tang} v = \dfrac{z\ (a - c\ \cos\gamma - d\ \cos\delta) + y\ (f\ \cos\varphi - d\ \cos\delta)}{z\ (d\ \sin\delta - c\ \sin\gamma) + y\ (d\ \sin d + f\ \sin\varphi - g)}, \\ \operatorname{tang} v = \dfrac{z\,(a - b\ \cos\beta - f\cos\varphi) + x\ (f\cos\varphi - d\ \cos\delta)}{z\ (b\ \sin\beta - f\ \sin\varphi) + x\ (d\ \sin\delta + f\sin\varphi - g)}.\end{array}\right\}\ \ldots\ldots\ldots\ (15'')$$

Beobachtungen.

Nach diesen theoretischen Auseinandersetzungen können wir nun zur Discussion der Beobachtungen selbst übergehen.

Am 7., 8. und 10. September 1883 habe ich an den beiden ersten Tagen nach der Fechner'schen Methode (Gleichung 13') und am letzten Tag nach der Ohm'schen Methode (Gleichung 13) die Gesammt-electromotorische Kraft in den Leitungen bei verschiedenen Combinationen der Erdplatten mit derjenigen eines Daniell'schen Elementes, das frisch zusammengesetzt war, verglichen. Bei der Fechner'schen Methode fand übrigens nicht eine directe Vergleichung mit dem letztern statt, sondern mit einem viel schwächern, nämlich einem Meidinger'schen Element, das statt Zink als zweite Electrode ebenfalls eine Kupferplatte besass, also der Formel:

$$Cu\ |\ CuSO_4 + CuSO_4\ |\ MgSO_4 + MgSO_4\ |\ Cu$$

entspricht. Heissen wir die electromotorische Kraft dieses Elements $\mathfrak{E}'$, so ergab sich aus besondern Vergleichungen

1) Da wir wegen der besondern Form der Gleichungen 15. daraus 3 Gleichungen mit bloss 2 Unbekannten ε und v herleiten konnten, so frägt es sich, ob dieser Umstand nicht dazu benutzt werden könnte, zugleich eine allfällige Neigung der Stromescurven in der Erde gegen den Horizont resp. der Flächen gleichen Potentials gegen die Vertikale des Orts zu ermitteln. Wenn diese Neigung nicht, wie wir oben stillschweigend annahmen gleich Null ist, sondern etwa gleich i ist, so hätten wir, unter der weitern Voraussetzung, dass alle Erdplatten in dieselbe Niveau-Ebene fallen, in den obigen Gleichungen in diesem Falle nur statt ε überall $\varepsilon.\cos i$ zu setzen. Wir würden also dieses Product statt ε erhalten, aber trotz der Ueberzahl von Gleichungen nicht im Stande sein, die beiden Grössen getrennt zu finden. Dies ist offenbar nur dann möglich, wenn die eine oder andere Erdplatte in einem beträchtlich andern Niveau sich befindet, so dass bei einigen Ausdrücken statt des Factors $\varepsilon.\cos i$ der ungleiche Coefficient: $\varepsilon.\cos(i + \nu)$ auftritt, wo ν den Neigungswinkel der Verbindungslinine der betreffenden beiden Erdplatten mit dem Horizont repräsentirt. In unserm Falle ist dieser Winkel ν am grössten für die Verbindungslinie der S -und E-Platte, beträgt aber auch da bloss ungefähr 20', so dass eine Berücksichtigung dieser Niveaudifferenz zu keinem Resultate führen kann.

am 7. September: $\epsilon' = \epsilon . 0{,}03673$
» 8. » $\epsilon' = \epsilon . 0{,}03669$.

Die electromotorische Kraft des Daniell'schen Elements $= 10000$ gesetzt, folgt aus den erwähnten Beobachtungen für die electromotorischen Kräfte resp. die Grössen A_1, A_2, etc. in den Gleichungen 15.:

Datum	Erdplatten-Combination und Positive Stromesrichtung	Electromotorische Kraft Daniell's Element = 10000	Messungs-Methode
7. September	$S \rightarrow N$	$A_1' = -306$	Fechner
8. »	$S \rightarrow N$	$A_1 = -300$	»
» »	$N \rightarrow E$	$A_2 = 161$	»
» »	$N \rightarrow W$	$A_3 = 94$	»
» »	$S \rightarrow W$	$A_4 = -402$	»
» »	$S \rightarrow E$	$A_5 = -456$	»
10. September	$S \rightarrow W$	$A_4' = -391$	Ohm
» »	$S \rightarrow E$	$A_5' = -454$	»
» »	$W \rightarrow E$	$A_6' = 65$	»

Wegen der beständigen kleinen Schwankungen der Stromstärke in den Kabeln sind obige Werthe nicht aus einzelnen Ablesungen, sondern je aus mindestens 6 Serien solcher abgeleitet, so dass dieselben, wie auch die für dieselbe Combination an verschiedenen Tagen erhaltenen Zahlen zeigen, gleichwohl bis auf 1 — 2% zuverlässig sein dürften.

Aus obigen Daten folgt weiter:

$$x = A_1 - A_2 - A_5 = -5$$
$$y = A_1 - A_3 - A_4 = 8$$
$$z' = A_4' - A_5' - A_6' = -2$$

Der ganze Betrag dieser Grössen fällt bereits nahezu innerhalb die Grenzen der Beobachtungsfehler und weist daher darauf hin, dass der Plattenstrom den Erdstrom offenbar sehr überwiegt und daher weitere Schlüsse aus diesen Zahlen ihrer Unsicherheit halber mit Vorsicht aufzunehmen sind.

In unserm Falle ist nämlich ferner nach S. 3 und 4.:

$a = 1088^m$
$b = 704$ $\beta = 35° 30'$
$c = 885$ $\gamma = 49° 30$
$d = 843$ $\delta = 52\ 30$
$f = 651$ $\varphi = 38\ 0$
$g = 1067$

Diese Werthe in die Gleichungen 15.″ eingesetzt ergeben der Reihe nach:

$$\operatorname{tang} v = \frac{y}{2.x + 4.y} = \frac{0,1.z - 0,2.y}{2,6.y - 4.z} = \frac{z}{4.z + 1,3.x}, \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(16)}$$

von welchen 3 Resultaten das mittlere jedenfalls nicht zu benutzen ist, da es wegen der Kleinheit der Factoren von z und y im Zähler des Bruchs als ungeeignet für die Berechnung erscheint.

Setzen wir die obigen Werthe von x und y in den ersten Ausdruck der Gleichung 16. ein, so kommt:

$$v = 20°.$$

Den Werth $v = 7° \, 36'$, den der letzte Ausdruck liefert, können wir ebenfalls nicht benutzen, weil z' aus den Beobachtungen eines andern Tages abgeleitet, daher strenggenommen nicht mit x und y zu combiniren ist.

Mit obigem Werth von v etc. berechnet sich sodann aus der ersten der Gleichungen 15.:

$$\varepsilon = 5 \text{ pro Meter},$$

woraus für die Potential-Differenz oder erdelectromotorische Kraft pro 1 Kilometer (der ungefähren Länge unserer Kabel) in der Richtung des zu dieser Zeit ungefähr von *NNW* nach *SSE* verlaufenden Erdstroms 5000 resp. 0,5 der electromotorischen Kraft eines Daniell'schen Elementes folgen würde.

Die Einführung der Werthe von ε und v in die Gleichungen 15. ergäbe endlich für die electromotorischen Kräfte der verschiedenen Platten-Combinationen:

$$\left.\begin{array}{l} N \mid T - S \mid T = 5412 \\ N \mid T - E \mid T = 3231 \\ N \mid T - W \mid T = 1456 \\ W \mid T - S \mid T = 3957 \\ E \mid T - S \mid T = 2181 \\ W \mid T - E \mid T = 1764 \end{array}\right\} \begin{array}{c} \text{Electromotorische Kraft} \\ \text{eines Daniell'schen Elements:} \\ = 10000 \text{ angenommen.} \end{array}$$

Die grösste electromotorische Differenz fände hiernach zwischen der Süd- und Nord-Platte statt, von welchen allerdings nach der Einleitung die erstere in trockenem und die letztere in ganz nassem Sande liegt. Die Nord-Platte wäre somit als die im feuchtesten Boden steckende, wie wir voraussetzten, am stärksten negativ erregt; ihr am nächsten käme die ebenfalls in feuchtem Boden befindliche West-Platte, während die Ost-Platte in dieser Beziehung ungefähr die Mitte zwischen der West- und Süd-Platte hielte[1]).

1) Hiernach würde es sich wohl zur Verminderung des Erdplattenstroms gegenüber dem Erdstrom empfehlen, die Ost-Platte und ganz besonders die Süd-Platte tiefer zu legen.

Alle diese Resultate für ε, v wie für die electromotorischen Kräfte der Platten-Combinationen müssen indessen aus dem angegebenen Grunde als durchaus unsicher bezeichnet werden.

In der That zeigt ein Vergleich dieser Resultate mit solchen, welche Herr Sadowsky an einigen Tagen des August durch ganz entsprechende Messungen der electromotorischen Kräfte nach der Ohm'schen Methode erhalten hat, dass bei unsern Kabeln die Werthe von x, y, z zu magnetisch ruhigen Zeiten der Hauptsache nach innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler fallen und somit nicht zu Berechnungen der dagegen verschwindenden Erdstrom-Glieder in den Gleichungen 15. zu verwerthen sind.

Am 9. August 1883 um 6^h p. herum erhielt Herr Sadowsky die Werthe:

$$A_1 = -332,\quad A_4 = -380,$$
$$A_2 = 154,\quad A_5 = -481,$$
$$A_3 = 51,\quad A_6 = 116.$$

Am 10. August um 1^h p. fand er ferner:

$$A_1 = -336,\quad A_4 = -374,$$
$$A_2 = 151,\quad A_5 = -479,$$
$$A_3 = 45,\quad A_6 = 106.$$

Sodann erhielt er am gleichen Tag um 6^h p. herum:

$$A_1 = -334,\quad A_4 = -386,$$
$$A_2 = 154,\quad A_5 = -475,$$
$$A_3 = 47,\quad A_6 = 93.$$

Endlich fand er am 11. August um 1^h a. herum:

$$A_1 = -336,\quad A_4 = -382,$$
$$A_2 = 155,\quad A_5 = -475,$$
$$A_3 = 52,\quad A_6 = 96.$$

Hieraus berechnen sich folgende Werthe von x, y und z:

	x	y	z
9. August 6^h p.	— 5	— 3	— 15
10. » 1^h p.	— 8	— 7	— 1
» » 6^h p.	— 13	5	— 4
11. » 1^h a.	— 16	— 6	— 3

Auch hier sind also die Werthe von x, y, z klein gegenüber den A und überdies selbst an ein und demselben Tag sehr verschieden. Was aber noch mehr gegen die Zuverlässigkeit derselben spricht, ist folgender Umstand.

Aus x und y vom 9. August 6^h p. folgt:

$$v = 7^\circ\, 46', \qquad \varepsilon = -6, \qquad N \mid T - S \mid T = -6136,$$

und aus x und z derselben Zeit:

$$v = 12^\circ\, 48', \qquad \varepsilon = -\infty, \qquad N \mid T - S \mid T = -\infty.$$

Dagegen geben die Daten vom 10. August 6^h p. resp.:

$$v = -39'\, 48', \qquad \varepsilon = -2, \qquad N \mid T - S \mid T = -1340,$$

und

$$v = 7^\circ\, 8', \qquad \varepsilon = -6, \qquad N \mid T - S \mid T = -6200.$$

Wenn nun auch gedenkbar wäre, dass der Erdstrom in Richtung und Stärke in der durch v und ε bestimmten Weise (mit Ausnahme von $\varepsilon = -\infty$) variirte, so ist es dagegen Angesichts der sehr übereinstimmenden Werthe A zu verschiedener Zeit durchaus unmöglich, dass der Erdplattenstrom in Richtung und Stärke so veränderlich sei, wie es obige Ziffern besonders auch im Vergleich mit dem von mir erhaltenen Werth von $N \mid T - S \mid T$ ergeben.

Es lassen sich also aus obigen Beobachtungen mit Bestimmtheit folgende Schlüsse ziehen.

1°. In unserer Gegend ist der Erdstrom in magnetisch ruhigen Zeiten jedenfalls so schwach, dass seine kilometrische Potentialdifferenz geringer ist als die Unsicherheit unserer Messungen resp. als $\pm$ 10 unserer obigen Einheiten oder als 0,001 der electromotorischen Kraft eines Daniell'schen Elements. Um ihn mit Sicherheit zu jeder Zeit messen zu können, müssen daher entweder bedeutend längere Kabel resp. viel weiter als 1 Kilometer voneinander entfernte Erdplatten oder dann Electroden von viel geringerer electromotorischer Differenz angewendet werden, so dass man empfindlichere Apparate benutzen kann.

2°. Da nach den Erfahrungen auf den Telegraphen-Linien die Erdströme in höhern Breiten stärker sind als in niedrigen, so können jedenfalls die Ströme, welche Herr Galli in Velletri auf seinen 4 — 6^m langen Linien beobachtet hat, durchweg keine Erdströme, sondern bloss Erdplattenströme gewesen sein. Bei der geringen Tiefe seiner Erdplatten haben leicht thermoelectrische Wirkungen an den letztern periodische Variationen der Ströme bedingen können. Auch bei den bloss 100^m langen Leitungen von Lamont in München muss der Erdstrom für gewöhnlich neben dem Plattenstrom so sehr zurückgetreten sein, dass sich daraus leicht die widersprechenden und sonderbaren Resultate erklären lassen, zu denen Lamont bei seinen Untersuchungen gelangt ist. Ja selbst bei den bis

16 Kilometer langen Linien in Greenwich kann der Erdplattenstrom in magnetisch ruhigen Zeiten über 5 Male stärker als der eigentliche Erdstrom gewesen sein, so dass wohl die Resultate, welche Airy in seiner 2. Abhandlung[1]) aus diesen Beobachtungen für magnetisch ruhige Zeiten ohne dabei dem Platten-Strom und Erd-Strom zu trennen gezogen hat, unsicher erscheinen und daher mit Vorsicht aufzunehmen sind.

Zur Zeit magnetischer Störungen sind indessen auch in unsern Kabeln deutlich Erdströme aufgetreten, ja haben bisweilen eine sehr bedeutende Stärke erreicht. Um die alsdann gemachten Ablesungen an den Galvanometern verwerthen und als electromotorische Kräfte in absolutem Maasse ausdrücken zu können, ist es vorerst nothwendig, die Gesammt-Widerstände zu bestimmen.

Die Widerstände der Kabel vom Galvanometer bis zu den Erdplatten, sowie der Galvanometer haben wir oben bereits kennen gelernt. Die Gesammt-Widerstände der ganzen Leitungen i. e. des betreffenden Galvanometers plus der Kabel bis zu den Erdplatten: $w_m + w_c$, plus der Erde zwischen den letztern: w_ε wurden entsprechend der Formel 10. zugleich mit den electromotorischen Kräften nach der Ohm'schen Methode ermittelt. Ich gebe zunächst in Siemens'schen Einheiten die Werthe von $w_m + w_c + w_\varepsilon$, welche Herr Sadowsky bestimmt hat:

Leitung	9. Aug.	a. m. 10. Aug.	p. m.	11. Aug.	Mittel
$N - S$	88,8	88,2	86,8	90,1	88,5 S. E.
$N - E$	71,8	72,9	76,1	71,9	73,2
$N - W$	96,5	89,7	90,2	88,4	91,2
$W - S$	89,7	87,3	89,0	90,1	89,0
$E - S$	75,3	75,0	74,7	74,1	74,8
$W - E$	74,6	76,4	75,2	75,6	75,4

Ich selbst habe am 7. bis 10. September folgende Werthe für $w_m + w_c + w_\varepsilon$ erhalten:

Leitung	Widerstand	Leitung	Widerstand
$N - S$	87,8	$E - S$	76,3
»	90,4	$W - S$	92,6
$E - W$	71,2	$E - W$	71,4
»	76,2		

Von diesen Werthen sind alle mit Ausnahme des ersten ebenfalls nach der Ohm'schen Methode, aber bei verschiedenen absoluten Stromstärken bestimmt; jener wurde nach der Wheatstone-Mouton'schen Methode durch abwechselndes Einschalten eines Hülfswiderstandes von 20,5 S. E. in die Leitung und als Zweig des Galvanometers erhalten.

1) Philos. Transactions Vol. 160, P. I, p. 215. 1870.

Obschon die Bestimmungsepochen um einen vollen Monat auseinanderliegen, stimmen die entsprechenden Werthe doch nahe innerhalb der Grenze der Beobachtungsfehler überein. Man wird also nur in längern Intervallen nöthig haben, die Widerstände neu zu ermitteln[1]).

Nach der Gleichung: $E = J.W$

werden wir vermittelst der so ermittelten Gesammtwiderstände aus den beobachteten Ablenkungen am Galvanometer die electromotorischen Kräfte in den betreffenden Kabeln in absolutem Maass z. B. in Volt erhalten, falls wir diese Widerstände statt in Siemens'schen Einheiten in Ohm ausdrücken und die einer Ablenkung von 1 Scalentheil am Galvanometer entsprechende Stromintensität in Ampère angeben.

Da man mit genügender Annäherung für unsere Zwecke hat:

1 Siemens Einheit = 0,95 Ohm,

so sind auch unsere Gesammtwiderstände in der Leitung:

$N — S$ = 84,1 Ohm
$N — E$ = 69,5 »
$N — W$ = 86,6 »
$W — S$ = 84,6 »
$E — S$ = 71,1 »
$W — E$ = 71,6 »

Um den Werth eines Scalentheils in Ampère zu finden, benutze ich meine Messungen der electomotorischen Kräfte vom 7, 8 und 10. September. (sieh. S. 12) mit Berücksichtigung der Relation:

1 Daniell'sches Element = 1,11 Volt

1) Mit Berücksichtigung des oben angegebenen Werths von w_m beim ältern Galvanometer:

$$w_m = 22,4 \text{ S. E.}$$

und den S. 3 mitgetheilten Werthen der Kabelwiderstände berechnet sich aus den vorstehenden Mittelwerthen des Hrn Sadowsky als Widerstand der Erde zwischen den Platten:

	w_ε		w_ε
$N — S$:	51,4 S. E.,	$W — S$:	53,9 S. E.,
$N — E$:	36,2 »	$E — S$:	38,8 » ,
$N — W$:	55,1 » ,	$W — E$:	40,4 » .

Berücksichtigt man nun, dass nach Seite 7 der Widerstand der Erde annähernd gegeben ist durch:

$$w_\varepsilon = \frac{1}{2\pi x r}\left(1 - \frac{r}{d_{1,2}}\right),$$

also wegen der Kleinheit des Bruches $\frac{r}{d_{1,2}}$ (kleiner als 0,001 in unserm Fall) und der Gleichheit von r bei allen Platten im Wesentlichen bloss abhängig ist von der Grösse x i. e. dem specifischen Leitungsvermögen der Erde, so erscheinen die grossen Differenzen zwischen den vorstehenden Zahlen wohl etwas auffallend. Ich lasse dahin gestellt, ob dieselben darauf beruhen, dass die Ost-Platte, welche in ihrer Combination mit allen andern Platten den kleinsten Widerstand zeigt, auf freiem Felde liegt und dagegen zwischen den N und S-, N und W-, W und S-Platten waldiges Terrain sich befindet.

Datum	Platten-Comb.	E in Volt	W in Ohm	$J = \frac{E}{W}$ in Ampère	Ablenkung in Scalentheilen.
7. Sept.	$N - S$	0,0340	84,1	0,0004043	82,2
8. »	$N - S$	0,0333	84,1	0,0003959	82,1
10. »	$S - E$	0,0504	71,1	0,0007089	143,1
» »	$S - W$	0,0434	84,6	0,0005130	102,7
» »	$E - W$	0,0072	71,6	0,0001006	21,8

Der Werth eines Scalentheils in Ampère ist somit bei unserm Galvanometer:

0,000004918	Mittel
0,000004823	
0,000004954	0,000004861 Ampère.
0,000004995	
0,000004613	

Aus den Ablesungen n am Galvanometer berechnet sich also die gesammte electromotorische Kraft in der Leitung, welche durch jenes geschlossen wird, in Volts ausgedrückt, nach der Formel:

$$\Sigma E = W.\ n.\ 0{,}000004861 \text{ Volt oder } \Sigma E = n.\ V \text{ Volt}$$

wenn $W.\ 0{,}000004861 = V$ gesetzt wird, wobei man für die verschiedenen Platten-Combinationen hat:

$$\begin{aligned} N - S : V &= 0{,}000409 \\ N - E \quad &= 0{,}000338 \\ N - W \quad &= 0{,}000421 \\ W - S \quad &= 0{,}000411 \\ E - S \quad &= 0{,}000346 \\ W - E : \quad &= 0{,}000348. \end{aligned}$$

Die Summe der so erhaltenen electromotorischen Kräfte könnten wir dann auch nach den Gleichungen 15. zur Berechnung der einzelnen Grössen verwerthen; da es aber bei Störungen darauf ankommt, möglichst gleichzeitig alle Elemente zu bestimmen, so wird man besser thun, bloss den Strom in der $N - S$- und $E - W$-Linie zu messen, was, da jede ihr besonderes Galvanometer hat, sehr nahe gleichzeitig geschehen kann, und dann von den so gewonnenen complexen Grössen diejenigen abgebraisch zu subtrahiren, welche in der benachbarten magnetisch ruhigen Zeit gefunden worden sind und nach dem Obigen als blosse Erdplattenströme anzusehen sind. Wir finden so die Componenten der erdelectromotorischen Kraft nach zwei aufeinander senkrechten Richtungen, aus denen wir dann die Richtung und Grösse derselben berechnen können.

Als Beispiel dieser Berechnungsweise und um zugleich eine Vorstellung über den absoluten Werth der erdelectromotorischen Kraft zur Zeit von Störungen zu gewähren, theile ich folgende aus den Terminsbeobachtungen 1. und 15. August 1883 und aus gelegentlichen Beobachtungen am 2. October 1882 gewonnene Resultate mit.

Am Termins-Tag des 1. August 1883 fanden nicht unbedeutende magnetische Störungen statt, welche nach den directen, 5-minutlichen Beobachtungen bei der Declination eine Extremdifferenz von 34′ und bei der Horizontal-Intensität eine solche von 0,0130 mm, mg, s. erreichten. Dem entsprechend zeigten sich auch starke Veränderungen am Erdstrom und zwar, wie immer, besonders ausgesprochen am Strom in der Linie von der E- zur W-Platte. Die bedeutendste Elongation erfolgte um $4^h\ 15^m$ a. Göttinger Zeit.

		E — *W*-Linie	*N* — *S*-Linie
Alenkung am Galvanometer	$4^h\ 15^m$ a.	56,8	90,3,
	normal	34,0	91,0,
	Differenz	22,8	— 0,7,

wo unter normaler Ablenkung am Galvanometer diejenige verstanden ist, welche zu dieser Zeit dem betreffenden Erdplattenstrom allein — in magnetisch ruhigen Momenten — zukam. Die Differenz beider Grössen gibt also angenähert die Ablenkungen, welche zu dieser Zeit der Erdstrom allein in beiden Linien hervorgebracht hätte. Aus dem Sinn dieser Ablenkungen folgt dem Frühern zufolge, dass der Erdstrom in der *E* — *W*-Linie von *W* nach *E* und in der *N* — *S*-Linie von *N* nach *S* verlief.

Die erdelectromotorischen Kräfte in beiden Leitungen waren somit nach S. 18:

$$E_{N-S} = 0{,}7 .\ 0{,}000409 = 0{,}0002863 \text{ Volt}$$
$$E_{W-E} = 22{,}8 .\ 0{,}000348 = 0{,}007935 \quad \text{»}$$

Nun ist aber nach S. 10:

$$E_{N-S} = \varepsilon\ 1088 \cos v,$$
$$E_{W-E} = \varepsilon\ 1067 \sin v,$$

woraus in Verbindung mit dem Vorigen folgt:

$$v = 87^\circ\ 58' \text{ Nord gegen West}$$
$$\varepsilon = 0{,}00000744 \text{ Volt pro Meter.}$$

Da v den Winkel des nahe von West nach Ost verlaufenden Stromes mit der Richtung der Verbindungslinie der N- und S-Platte von Nord aus nach West hin gezählt repräsentirt und die letztere im Norden um 4° 45′ zur Zeit vom mittleren magnetischen Meridian nach Ost abweicht, so war der Winkel v' des positiv von West nach Ost verlaufenden Erdstroms mit dem magnetischen Meridian zur obigen Zeit:

$$v' = 83^\circ\ 13'$$

und die ihm zukommende electromotorische Kraft pro Kilometer

$$\varepsilon' = 0{,}00744 \text{ Volt.}$$

Der Erdplatten-Strom resp. die Differenz der electromotorischen Kräfte der Platten in Berührung mit der Erde betrug zu dieser Zeit:

$$N \mid T - S \mid T = 91{,}0 .\ 0{,}000409 = 0{,}0372 \text{ Volt}$$
$$E \mid T - W \mid T = 34{,}0\ 0{,}000348 = 0{,}0118 \text{ »}$$

Es war also selbst der schwächere Plattenstrom in der Ost-West Linie stärker als der betreffende Zweigstrom der Erde.

Am Termins-Tag des 15. August 1883, der ebenfalls Störungen aufwies, zeigte sich der stärkste Strom in der E — W Linie um 0^h 30^m p. Göttinger Zeit. Man hatte nämlich:

		E — W Linie	N — S Linie
Ablenkung am Galvanometer	0^h 30^m p.	— 9,1	70,0
	normal	27,0	83,0
Differenz		— 36,1	— 13,0

Hier ging also der positive Erdstrom in der E — W Linie von E nach W und in der N — S Linie auch wieder von N nach S.

Aus diesen Daten berechnet sich in gleicher Weise wie oben für die Richtung (bezogen auf magnet. Meridian) und electromot. Kraft des Erdstroms (bezogen auf Kilometer als Längeneinheit):

$$v' = 72^\circ\ 13' \text{ Nord gegen Ost}$$

und

$$\varepsilon' = 0{,}0127 \text{ Volt,}$$

wobei also der Erdstrom von Ost-Nord-Ost nach West-Süd-West verlief.

Bei Gelegenheit einer starken magnetischen Störung am 2. October 1882, wo die Extrem-Differenzen für die Declination 1° 30′, für die Horizontal-Intensität 0,0614 und für die Vertikal-Intensität 0,0544 mm., mg, s. betrugen[1]), wurden auch zeitweise die Erdströme von 5 zu 5^m beobachtet. Ich wähle aus denselben folgende zwei Daten aus:

		E — W Linie	N — S Linie
Ablenkung am Galvanometer	7^h 35^m p.	233,6	136,3
	7^h 40^m p.	— 78,5	197,0
	normal	30,0	121,0
Differenz	7^h 35^m	203,6	15,3
»	7 40	— 108,5	76,0

1) Siehe Annalen des physikal. Central-Observatoriums für 1882 I. Theil S. 117, 129 und 141.

Die Zeichen der Differenzen zeigen, dass der Erdstrom für sich in der *N* — *S* Linie in beiden Momenten von *S* nach *N* ging, in der *E* — *W* Linie dagegen um $7^h\ 35^m$ von *W* nach *E* und um $7^h\ 40^m$ umgekehrt von *E* nach *W*.

Genau wie oben berechnet sich aus diesen Daten:

für	v'	ε'
$7^h\ 35^m$ p.	89° 48′ *N* n. *E*	0,0666 Volt
7 40 p.	46° 21′ *N* n. *W*	0,0455 »

Die electromotorische Kraft des Erdstroms pro Kilometer erreichte also am 2. October um $7^h\ 35^m$ p. nahe $1/_{20}$ der electromotorischen Kraft eines Daniell'schen Elements, wobei er fast genau senkrecht zum magnet. Meridian von West nach Ost verlief. Wenig geringer war die kilometrische Spannungsdifferenz desselben 5^m später, doch hatte er sich während dieser Zeit um $1\frac{1}{2}$ Quadranten zurückgedreht, so dass er jetzt sehr nahe von *SE* nach *NW* ging.

Die electromotorische Kraft der Erdplatten für sich betrug aber zu dieser Zeit:

$$E \mid T - S \mid T = 0{,}0495 \text{ Volt}$$
$$N \mid T - W \mid T = 0{,}0104 \text{ »}$$

Auch in diesem Falle war also die electromotorische Kraft des Erdstroms nicht viel grösser als diejenige beim einen Plattenpaar.

Dass diese Art der Berechnung hinlänglich sichere Resultate liefern kann, dürfte am ehesten aus folgender Zusammenstellung des an den verschiedenen Termin-Tagen beobachteten Erdplatten-Stroms (in magnetisch ruhigen Momenten) hervorgehen.

Termine	Ablenkung am Galvanometer		Termine	Ablenkung am Galvanometer	
1882	*N—S*	*E—W*	1883	*N—S*	*E—W*
1. September	57	90	1. April	178	52
15. September	71	97	15. April	189	54
1. October	116	27	1. Mai	117	54
15. October	146	64	15. Mai	90	53
1. November	169	59	1. Juni	90	54
15. November	176	60	15. Juni	99	55
1. December	179	60	1. Juli	109	55
15. December	171	60	15. Juli	100	44
1883					
2. Januar	184	60	1. August	91	34
15. Januar	185	61	15. August	83	27
1. Februar	185	60	1. September	76	21
15. Februar	153	41	15. September	75	17
1. März	175	48	1. October	74	17
15. März	179	56	15. October	73	13

Berücksichtigen wir, dass alle Platten zwischen dem 25. und 28. September behufs Veränderung ihrer Verbindung mit dem Kabel ausgegraben und neu gelegt wurden und dass man vom 14. Juli 1883 an, wie oben mitgetheilt wurde, die Leitungen beständig geschlossen erhielt, also durch Polarisation der Plattenstrom allmählich abnehmen musste, so wird man beim Strom der Ost- und West-Platten eine unerwartet grosse Constanz finden. Die zeitweise geringern Werthe desselben am 15. Februar und 1. März erklären sich dadurch, dass man die Leitungen versuchsweise ebenfalls vom 3. — 13. Februar geschlossen hatte. Eine ähnliche temporäre Verminderung des Platten-Stroms zu dieser Zeit zeigt sich denn auch bei dem der Nord-Süd Linie, wo der Strom von der Legung der Platten am 9. — 14. Aug. bis zum 15. November allmählich anstieg, um sich dann mit vorstehender Ausnahme auch bis zum 15. April nahe constant zu erhalten. Der Sprung von da zum 1. Mai erklärt sich vielleicht durch das Aufthauen des Bodens zu dieser Zeit, welches dem Wasser des über Winter feuchter gewordenen Bodens leichtern Zutritt zu dieser Platte gewährte[1]).

Obschon also selbst bei stärkern magnetischen Störungen in unsern Leitungen von 1 Kilometer Länge die electromotorische Kraft des Erdstroms nur ungefähr $^1/_{20}$ derjenigen eines Daniell'schen Elementes erreichte resp. nicht viel grösser war als die electromotorische Differenz gewisser Combinationen unserer 4 Erdplatten, so habe ich doch noch nicht die Hoffnung aufgegeben, durch geeignete Verbesserungen, insbesondere der letztern, auch mittelst solch' kurzer Leitungen die Gesetze und die Natur des Erdstroms näher erforschen zu können. Gelingt dies, so wäre damit die Möglichkeit der Beobachtung desselben an vielen verschiedenen Orten gegeben.

Indem ich die Mittheilung über die weitern aus den bisherigen Beobachtungen des Erdstroms in Pawlowsk zu ziehenden Resultate einer spätern Gelegenheit vorbehalte, resumire ich zum Schlusse nochmals diejenigen, welche sich über die Beobachtungsmethode des Erdstroms in kürzern Linien aus der vorliegenden Untersuchung ergeben haben.

1°. Bei einer Erdplatten-Distanz von 1 Kilometer Länge ist in magnetisch-ruhigen Zeiten die Differenz des electrischen Potentials der Erde an denselben selbst bei güngstigster Orientirung jedenfalls kleiner als 0,001 Volt, während die electromotorische Differenz der Erdplatten leicht 0,050 Volt und mehr betragen kann. Zur Zeit von magnetischen Störungen übersteigt nur selten die erstere den angegebenen Betrag der letztern d. h. 0,050 Volt.

2°. Bei solch' kurzen Leitungen ist es daher durchaus nothwendig, den Erdplattenstrom vom eigentlichen Strom der Erde trennen zu können, wozu, wie ich des Nähern zeige, die

1) Dafür spricht auch, dass am 5. October 1883, als ich bei der Süd-Platte, behufs Tieferlegung derselben in eine ebenfalls nasse Schicht, eine Grube machen liess, der Boden schon in $1^m,3$ Tiefe vollständig mit Wasser durchtränkt war, während er sich im August 1882 als ganz trocken erwiesen hatte. — Ich füge hier gleich noch bei, dass zufolge einer neuen Untersuchung der Isolation der Kabel am 30. November 1883 durch Herrn Trautvetter dieselbe sich nur beim Kabel zur Süd-Platte um ein Minimum weniger gut als im October 1882 erwiesen hatte.

verschiedenen Combinationen der 4 Erdplatten zweier aufeinander senkrechten Linien ein sicheres Mittel geben.

3°. Der Widerstand der Erde bei 1 m^2 grossen und 1^{km} voneinander abstehenden Erdplatten ist auf 30 — 60 Ohm anzuschlagen; beträgt also derjenige der Drahtleitungen zum Galvanometer und des letzten selbst nicht mehr als 40 Ohm oder der Gesammt-Widerstand 100 Ohm, so wird ein Galvanometer mit Spiegelablesung eine Empfindlichkeit von 0,000002 Ampère pro 1 Scalentheil haben können, damit die Ablenkungen durch den Erdstrom allein selbst bei stärkern magnetischen Störungen 250 Scalentheile entsprechend 0,05 Volt, nur selten überschreiten.

4°. Das Verhältniss der Stärke des Erdstromzweiges in einer Leitung zur Stärke des Erdplattenstromes derselben ist unabhängig vom Widerstand jener Leitung und von der Grösse der Erdplatten, wächst dagegen mit Zunahme des Abstandes der letztern. Vergrösserung der Erdplatten oder Einschaltung von Widerständen in die Leitung sind daher nicht geeignet, den Plattenstrom gegenüber dem Erdstrom abzuschwächen.

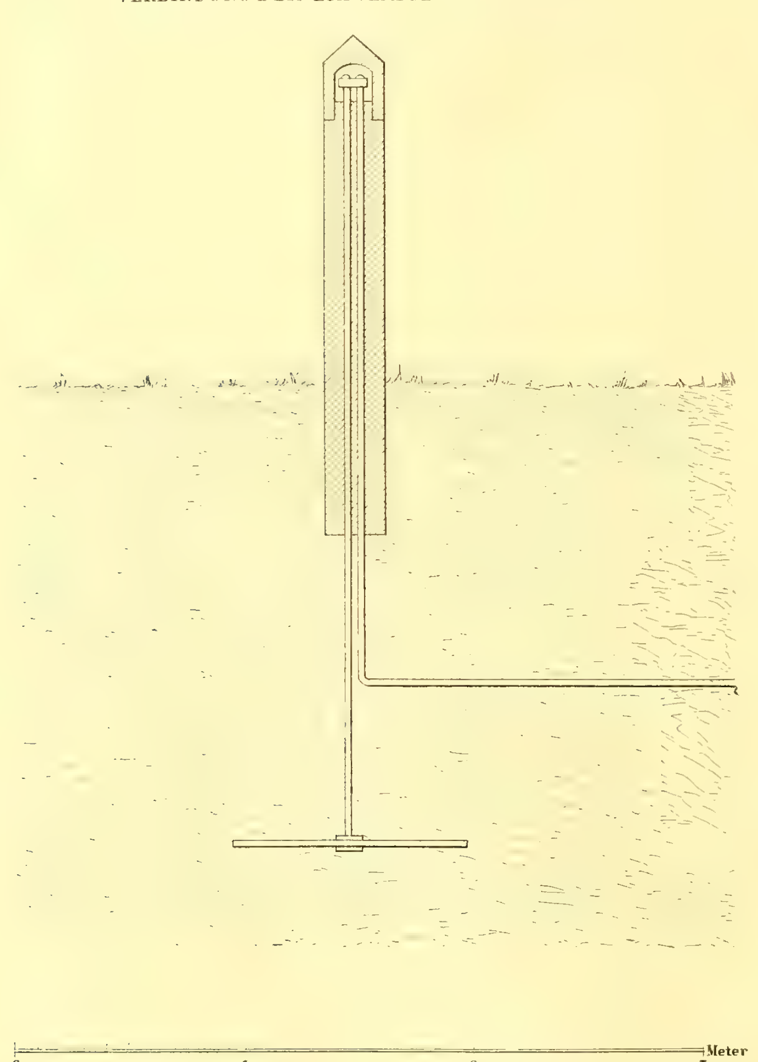
5°. Will man den Erdstrom auch zu magnetisch ruhigen Zeiten (falls ein solcher alsdann überhaupt existirt) in gewöhnlichen Leitungen sicher beobachten, so müssen dieselben mindestens 50 Kilometer lang sein. Bei kürzern, etwa 1 — 5 Kilometer langen Leitungen kann dies nur geschehen, wenn es gelingt, durch ganz besondere Vorkehrungen die Erd-Electroden viel gleichartiger als gewöhnlich zu machen und in diesem Zustand zu erhalten. In bedeutend kürzern Leitungen als 1 Kilometer (etwa 10 — 50^m) wird der Erdstrom unter gewöhnlichen Umständen auch während magnetischer Störungen nur ganz unsicher zu beobachten sein.

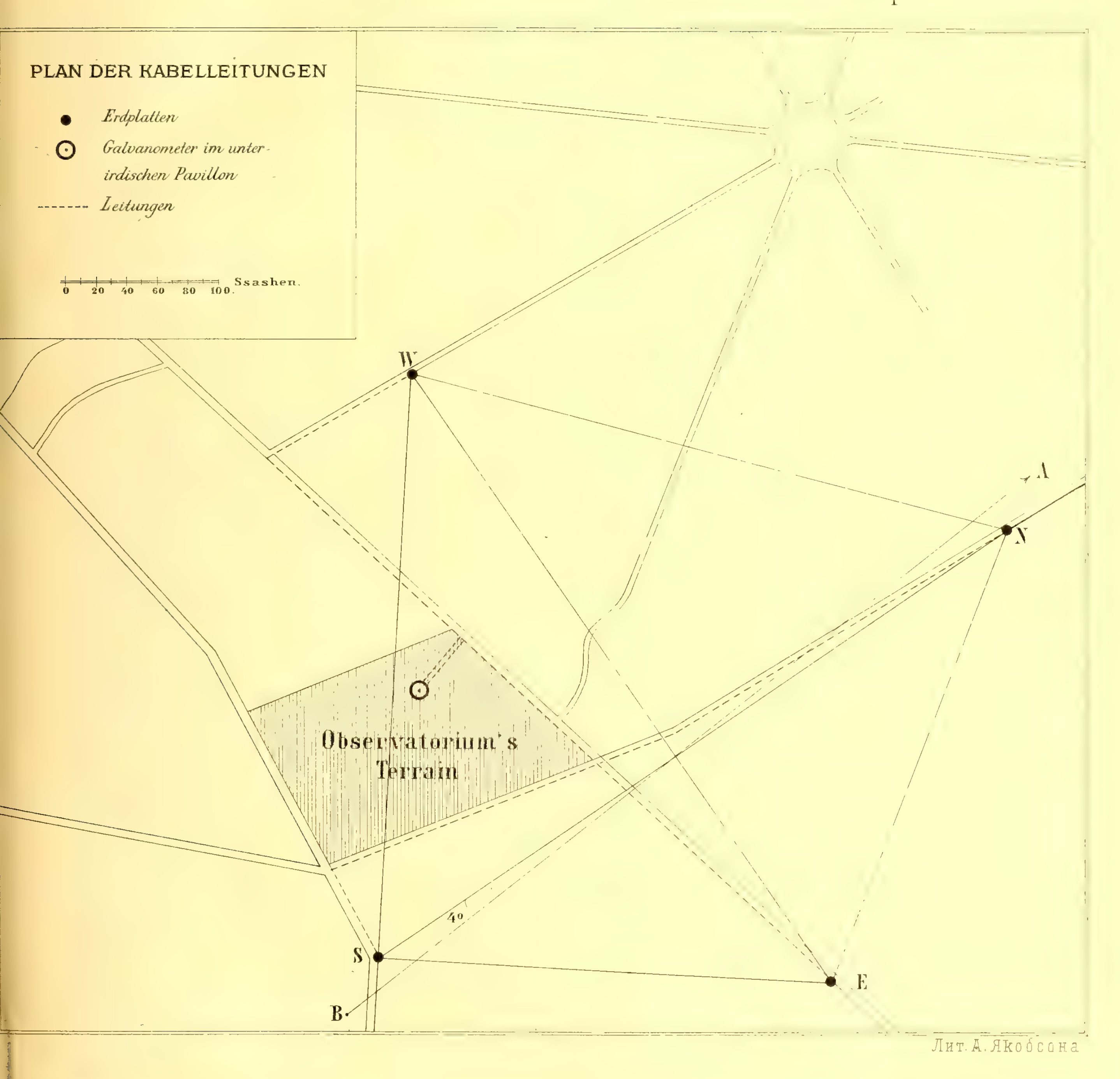
Nachschrift. Während des Druckes dieser Abhandlung habe ich von Herrn J. Galli eine zweite grössere Schrift über seine Beobachtungen der Erdströme in Velletri (№ 2, 15. Marzo 1883) sowie ein Manuscript mit den weitern Observationen vom August 1882 bis August 1883 als Beitrag zu den Beobachtungen auf den internationalen Polar-Stationen zugeschickt erhalten. Es legt mir dies die Verpflichtung auf, meine Behauptung auf S. 15, dass nämlich Herr Galli durchweg keine Erdströme, sondern bloss Erdplattenströme beobachtet habe, etwas ausführlicher zu begründen.

Nach № 1° der vorstehenden Resultate unserer Untersuchung beträgt die Differenz des electrischen Potentials der Erde pro 1 Kilometer Distanz der Erdplatten in magnetisch ruhiger Zeit höchstens 0,001 Volt und übersteigt bei Störungen selten 0,05 Volt. Da nun der Erdstromzweig resp. jene Potentialdifferenz bei kleinern Distanzen der Erdplatten diesen proportional zu setzen ist, so wird bei Distanzen der Erdplatten von 5^m, wie sie Herr Galli anwandte, jene Potentialdifferenz höchstens 0,000005 Volt in magnetisch-ruhiger Zeit betragen und 0,00025 Volt bei Störungen kaum überschritten haben. Seite 7 der zweiten Abhandlung gibt nun Herr Galli an, dass an seinem Galvanometer mit langem und dünnem Draht und astatischem Nadelpaar ein Element bestehend aus einem Zink- und Kupferblech von je 12 cm^2 Oberfläche in destillirtem Wasser eine permanente Deviation von 36° ergeben habe.

Leider ist dies Alles, was über die Empfindlichkeit des Galvanometers gesagt ist. Seit dem Februar 1880 bestand die verbesserte Erdleitung aus drei versilberten Kupferblechen von 0,04 m^2 Oberfläche, welche an den Ecken eines nahe gleichseitigen Dreiecks von $5^m,4$ Seite in Gruben von 1^m Tiefe vertikal eingegraben waren. Von diesen Blechen führten nackte, ebenfalls versilberte Kupferdrähte bis über die Erdoberfläche empor, wo sie erst mit der isolirten Leitung zum Galvanometer verbunden waren. Den Dimensionen dieser Erdplatten zufolge werden wir den Widerstand der Erde zwischen irgend zwei derselben mindestens 5 Male grösser als bei den unsrigen anzunehmen haben d. h. er wird kaum kleiner als 35 Ohm gewesen sein. Nun beträgt die electromotorische Kraft des erwähnten Elements mindestens 0,5 Volt; nehmen wir also an, der innere Widerstand derselben sei nicht grösser als 35 Ohm gewesen, so hätte der Erdstrom an diesem Galvanometer in magnetisch-ruhiger Zeit bloss 0°,00036 und bei Störungen selten mehr als 0°,018 Ablenkung geben können, während nur 0°,1 Ablenkung geschätzt wurden. Nehmen wir dagegen für den innern Widerstand des Elements eine obere Grenze von 3500 Ohm an, so wären jene Ablenkungen durch den Erdstrom 0°,036 resp. 1°,8 geworden. Die letztere Annahme dürfte der Wahrheit näher kommen als die erstere; da nämlich die mittlere Stärke der von Herrn Galli an obigem Galvanometer vom August 1882 bis August 1883 beobachteten Ströme zwischen 43 und 69° Ablenkung variirte, so müsste im erstern Fall eine störende electromotorische Kraft von über 1 Volt in seinem Apparat sich geltend gemacht haben, was einen groben Fehler involvirte, im letztern Fall dagegen war eine solche von bloss 0,01 Volt vorhanden, welche bei der oben durch gesperrte Schrift hervorgehobenen Einrichtung der Erd-Electroden leicht als Electroden-Differenz erklärt werden kann. Auch Temperaturdifferenzen der Electroden von 10° würden schon electromotorische Kräfte von 0,01 Volt bedingen können. Solche thermoelectrische Wirkungen konnten also leicht die kleinern Variationen der Ströme bei Herrn Galli's Beobachtungen bewirkt haben. Was endlich die auffallende Uebereinstimmung im jährlichen Gang der Temperatur und der Stärke seiner Ströme betrifft, so dürfte dieselbe lediglich dem Umstande zuzuschreiben sein, dass die Leitungsfähigkeit der obern Bodenschichten, auf welche es bei so kleinem Electroden-Abstand besonders ankommt, im Winter wegen der niedern Temperatur bedeutend geringer ist als im Sommer, wodurch sich zugleich die Verschiebung der Max. und Min. der Stromstärke gegenüber denen der Temperatur erklärt. Leider gestattet die Combination von bloss 3 Erdplatten, wie ich oben gezeigt habe, nicht den Plattenstrom und den Erdstrom zu trennen, so dass aus den Beobachtungen des Herrn Galli ein positiver Nachweis der Nullität des Erdstroms nicht zu leisten ist. Dass derselbe aber in der That, wie wir aus dem Vergleich mit unsern Erfahrungen schlossen, bei seinem Apparat für gewöhnlich Null war und bei Störungen 2 — 3° Ablenkung entsprach, geht daraus hervor, dass zur Zeit grosser magnetischer Störungen wie am 2. October und am 17. — 20. November 1882 Herr Galli in der That bloss Veränderungen der Stromstärke um 2 — 3° an seinem Erdplattenstrom von 60° constanter Ablenkung wahrnahm. In Folge dessen müssen selbstverständlich auch die Schlüsse, welche Herr Galli aus seinen Beobachtungen über den Zusammenhang zwischen Erdströmen und Cyclonen zog, vor der Hand als hinfällig bezeichnet werden.

VERBINDUNG DER ERDPLATTE MIT DEM KABEL.





Лит. А. Якобсона

Ouvrages physiques et chimiques publiés dans la VII. Série des Mémoires de l'Académie Impériale des sciences.

T. VI, № 1. **Lenz, E.** Betrachtungen über Ventilation in unseren Klimaten. 1863. Pr. 30 K. = 1 Mk.

T. XV, № 7. **Boutlerow, M.** Sur la structure chimique de quelques hydrocarbures non-saturés. 1870. Pr. 25 K. = 80 Pf.

T. XVII, № 5. **Jacobi, M.** Untersuchungen über die Construction identischer Aräometer und insbesondere metallischer Scalen- und Gewichts-Alcoholometer, nebst Anhang über den Einfluss der Capillaritäts-Erscheinungen auf die Angaben der Alcoholometer. 1871. (Mit 2 Kupfertafeln.) Pr. 75 K. = 2 Mk. 50 Pf.

№ 9. **Boutlerow, M.** Sur l'oxydation du triméthylcarbinol et des alcools tertiaires en général. 1871. Pr. 25 K. = 80 Pf.

T. XVIII, № 8. **Wild, H.** Études métrologiques. 1872. Pr. 25 K. = 80 Pf.

T. XXI, № 7. **Boutlerow, M.** Sur les propriétés de l'acide triméthylacétique et sur ses dérivés. 1874. Pr. 25 K. = 80 Pf.

T. XXII, № 6. **Setschenow, J.** Ueber die Absorption der Kohlensäure durch Salzlösungen. 1875. Pr. 50 K. = 1 Mk 70 Pf.

T. XXIII, № 4. **Boutlerow, M.** Condensation des hydrocarbures de la série éthylénique. 2. Sur l'isodibutylène, l'une des variétés isomériques de l'octylène. 1876. Pr. 30 K. = 1 Mk.

№ 8. **Wild, H.** Metrologische Studien. 1877. (Avec 4 pl.) Pr. 80 K. = 2 Mk. 70 Pf.

T. XXIV, № 6. **Wischnegradsky, A.** Ueber verschiedene Amylene und Amylalkohole. 1877. Pr. 25 K. = 80 Pf.

T. XXV, № 5. **Menschutkin, N.** Recherches sur l'influence exercée par l'isomérie des alcools et des acides sur la formation des éthers composés. (Avec 2 pl.) 1877. Pr. 50 K. = 1 Mk. 70 Pf.

T. XXVI, № 3. **Lenz, R.** Ueber den galvanischen Widerstand verdünnter Lösungen von Verbindungen des Kalium, Natrium, Ammonium und des Wasserstoffs. 1878. Pr. 45 K. = 1 Mk. 50 Pf.

№ 4. **Hasselberg, B.** Studien auf dem Gebiete der Absorptionsspectralanalyse. 1878. (Avec 4 pl.) Pr. 1 R. = 3 Mk. 30 Pf.

№ 8. **Wild, H.** Ueber die Bestimmung der absoluten Inclination mit dem Inductions-Inclinatorium. 1878. (Avec 3 pl.) Pr. 75 K. = 2 Mk. 50 Pf.

№ 9. **Menschutkin, N.** Recherches sur l'influence exercée par l'isomérie des alcools et des acides sur la formation des éthers composés. Deuxième mémoire. 1879. Pr. 30 K. = 1 Mk.

№ 14. **Chwolson O.** Ueber die Dämpfung von Schwingungen bei grösseren Amplituden. 1879. Pr. 35 K. = 1 Mk. 20 Pf.

T. XXVII, № 1. **Hasselberg, B.** Ueber das durch electrische Erregung erzeugte Leuchten der Gase bei niedriger Temperatur. 1879. Pr. 25 K. = 80 Pf.

№ 3. **Boutlerow, M.** Condensation des hydrocarbures de la série éthylénique. 3. Sur l'isotributylène. 1879. Pr. 25 K. = 80 Pf.

T. XXVIII, № 3. **Chwolson, O.** Allgemeine Theorie der magnetischen Dämpfer. 1880. Pr. 1 R. = 3 Mk. 30 Pf.

T. XXX, № 2. **Beketoff, N.** Recherches sur la formation et les propriétés de l'oxyde de sodium anhydre. 1882. Pr. 15 K. = 50 Pf.

№ 9. **Lenz, R.** Ueber das galvanische Leitungsvermögen alcoholischer Lösungen. 1882. Pr. 50 K. = 1 Mk. 70 Pf.

T. XXXI, № 10. **Chwolson, O.** Ueber die Wechselwirkung zweier Magnete mit Berücksichtigung ihrer Querdimensionen. 1883. Pr. 30 K. = 1 Mk.

Imprimé par ordre de l'Académie Impériale des sciences. Novembre, 1883. C. Vessélofsky, Secrétaire perpétuel.

Imprimerie de l'Académie Impériale des sciences. (Vass.-Ostr., 9e ligne, № 12.)

MÉMOIRES
DE
L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES DE ST.-PÉTERSBOURG, VIIE SÉRIE.
TOME XXXI, N° 13.

DIE PFLANZENRESTE DER STEINKOHLENFORMATION

AM

ÖSTLICHEN ABHANGE DES URAL-GEBIRGES.

VON

J. Schmalhausen.

(Mit 4 Tafeln.)

(*Lu le 10 mai 1883*)

ST.-PÉTERSBOURG, 1883.
Commissionnaires de l'Académie Impériale des sciences:

à St.-Pétersbourg:	à Riga:	à Leipzig:
MM. Eggers et Cie et J. Glasounof;	M. N. Kymmel;	Voss' Sortiment (G. Haessel).

Prix: 70 Kop. = 2 Mrk. 30 Pf.

MÉMOIRES
DE
L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES DE ST.-PÉTERSBOURG, VIIE SÉRIE.
Tome XXXI, № 13.

DIE PFLANZENRESTE DER STEINKOHLENFORMATION

AM

ÖSTLICHEN ABHANGE DES URAL-GEBIRGES.

VON

J. Schmalhausen.

(Mit 4 Tafeln.)

(Lu le 10 mai 1883.)

St.-PÉTERSBOURG, 1883.
Commissionnaires de l'Académie Impériale des sciences:

à St.-Pétersbourg:	à Riga:	à Leipzig:
MM. Eggers et Cie et J. Glasounof;	M. N. Kymmel;	Voss' Sortiment (G. Haessel).

Prix: 70 Kop. = 2 Mrk. 30 Pf.

Imprimé par ordre de l'Académie Impériale des Sciences.
Novembre 1883. C. Vessélofsky, Secrétaire perpétuel.

Imprimerie de l'Académie Impériale des sciences.
(Vass.-Ostr. 9e ligne, № 12.)

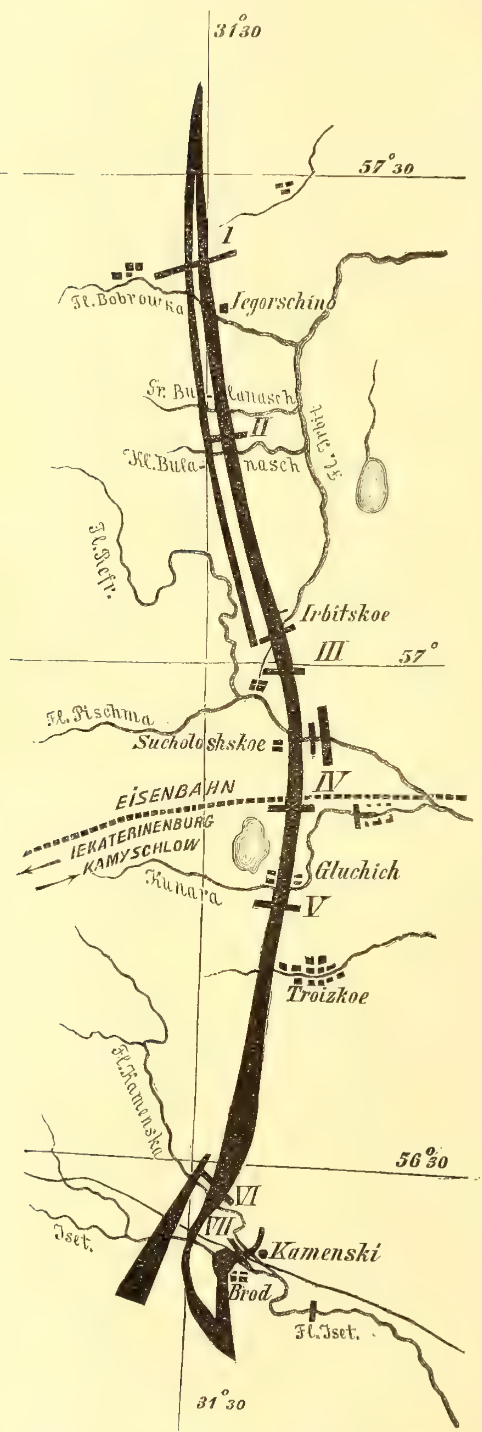
Nach einem gedruckten Berichte des Herrn Prof. Karpinski[1]) und seinen brieflichen Mittheilungen bilden Steinkohlen und Pflanzenreste führende Schichten, welche zur unteren Abtheilung der Steinkohlenformation gehören, am östlichen Abhange des Ural-Gebirges verlängerte Streifen, welche im Allgemeinen mit dem Gebirge parallel verlaufen. Der eine dieser Streifen befindet sich im Irbitschen und Kamyschlowschen Kreise des Permischen Gouvernements und wird von den Flüssen Iset, Kamenka, Kunara, Pyschma, den Quellen des Flusses Irbit und von dessen Zuflüssen, dem kleinen und grossen Bulanasch und der Bobrowka durchschnitten. Dieser Streifen zeichnet sich durch seinen Reichthum an Kohlen aus und wurde im Verlaufe der letzten Jahre auf Regierungskosten näher untersucht. Zur Untersuchung wurden sieben Untersuchungslinien, welche in der beistehenden Copie aus der von Herrn Prof. Karpinski gegebenen Carte mit I — VII bezeichnet sind, rechtwinkelig zum Streichen der Schichten angelegt. Die I Linie befindet sich 5 Kilometer nördlich vom Dorfe Jegorschino am Fl. Bobrowka, die II zwischen dem grossen und kleinen Bulanasch, die III zwischen der Pyschma und den Quellen des Fl. Irbit, die IV zwischen den Flüssen Pyschma und Kunara, die V südlich vom Fl. Kunara, die VI nördlich vom Fl. Kamenka und die VII zwischen Kamenski-Sawod und dem Dorfe Brod.

In Bezug auf die Lagerung der Pflanzenreste führenden Schichten habe ich nach den Angaben des Herrn Prof. Karpinski Folgendes zu reproduciren:

Ueber dem mitteldevonischen Kalksteine folgt eine Schichtengruppe, welche aus Sandsteinen, Schieferthonen etc. gebildet und ihrerseits von Kalkstein überlagert ist, welch letzterer *Productus giganteus* und *P. striatus* enthält und den untersten Bergkalk darstellt. «Die zwischen dem mitteldevonischen Kalksteine und dem untersten Bergkalke lagernde Schichtengruppe bildet ein Ganzes, eine ununterbrochene Ablagerung, deren untere Schich-

---

1) А. Карпинскій, Геологическія изслѣдованія и каменно-угольныя развѣдки на восточномъ склонѣ Урала. Горный Журналъ. 1880 г. Январь, стр. 84.



Der schwarze Streifen bezeichnet die Steinkohlen führenden Schichten.

ten sich zur oberdevonischen Zeit gebildet haben, während zur Bildungszeit der oberen Schichten der paläontologische Character sich geändert hatte, indem die Steinkohlenperiode eingetreten war». In den unteren Schichten dieser Gruppe werden die Ueberreste oberdevonischer Mollusken gefunden, während die höher und unter dem Bergkalke lagernden Schichten Steinkohlen und Pflanzenreste enthalten.

Die aus den Schachten der I, II, IV und VII Untersuchungslinien gesammelten Pflanzenabdrücke wurden mir durch Herrn Prof. A. Karpinski zugestellt. Ausserdem habe ich älteres und auch neueres dem Berginstitut in St. Petersburg gehörendes Material benutzt. Eine Anzahl Originalexemplare aus Eichwalds Sammlung erhielt ich durch Herrn Prof. A. Inostranzew und endlich noch eine Anzahl von Pflanzenabdrücken aus derselben Lokalität durch Herrn Prof. A. Stuckenberg in Kasan.

Aus der Steinkohlenformation am östlichen Abhange des Ural-Gebirges sind bereits seit lange Pflanzenreste bekannt. Eichwald führt in der Lethaea rossica Bd. I folgende Pflanzen vom Gute Kamenskaja, zu welchem der südliche Theil des in der obigen Zeichnung dargestellten Streifens der Steinkohlenformation gehört, auf.

1. *Cyclopteris nana* Eichw. p. 64.
2. *Schizopteris foveolata* Eichw. p. 66.
3. *Sphenopteris notha* Eichw. p. 82.
4. *Gleichenites crithmifolius* Lindl. et Hutt. p. 90.
5. » *rutaefolius* Eichw. p. 91.
6. *Sagenaria Glincana* Eichw. p. 127.
7. *Sigillaria intermedia* Brgt. p. 197.
8. *Rhabdocarpus orientalis* Eichw. p. 227.
9. *Noeggerathia palmaeformis* Goepp. p. 259.

Von diesen sind unter 2 und 3 Farnblattstiele aufgeführt, welche höchst wahrscheinlich zu 1 und 5 gehören. Die Originale zu 4 und 7 habe ich nicht gesehen, vermuthe aber, dass 4 zu *Gleichenites ru-*

taefolius Eichw. gehört und der unter 7 bezeichnete Rest ein Erhaltungszustand von *Sagenaria Glincana* ist. An Stelle von *Noeggerathia palmaeformis* Goepp. habe ich nur Farnblattstiele zu Gesicht bekommen.

Darauf hatte Herr Bergrath D. Stur in Wien einen «Beitrag zur Kenntniss der Culm- und Carbon-Flora in Russland»[1]) geliefert, worin unter G, L, M die ihm vorgelegenen Pflanzenreste vom Ostabhange des Ural-Gebirges besprochen werden[2]). Die Herrn D. Stur zugesandten Objecte habe ich gleichfalls sämmtlich erhalten, und halte ich es für nothwendig dieses ausdrücklich zu erwähnen, damit nicht angenommen werden könnte die von Herrn Stur bestimmten Formen hätten mir nicht vorgelegen. Aus den Bemerkungen Herrn Sturs sehen wir, dass er den *Gleichenites rutaefolius* Eichw. p. 221 zur Gattung *Diplothmema* Stur. bringt, denselben Farn p. 222 mit *Diplothmema elegans* Brgt. sp. vergleicht und p. 223 ihn mit *Rhodea Stachei* verglichen haben will. *Cyclopteris nana* Eichw. wird p. 221 zur Gattung *Cardiopteris* gebracht und *Sagenaria Glincana* Eichw. zum Theil zu *Lepidodendron Volkmannianum* St. p. 221, zum Theil zu *L. Veltheimianum* St. p. 223 gerechnet. Neu ist für die Flora die von Herrn Stur aufgeführte *Stigmaria inaequalis* Goepp. Sich auf das Vorhandensein von *Lepidodendron Volkmannianum* und *L. Veltheimianum* stützend bestimmt Herr D. Stur die Pflanzenreste führenden Schichten am Ostabhange des Ural-Gebirges für Ostrauer-Schichten. Aus der weiter folgenden Beschreibung der Pflanzenreste wird zu sehen sein in welchem Grade ich mit den Bestimmungen Herrn D. Sturs einverstanden bin. An dieser Stelle genügt es zu bemerken, dass *Sagenaria Glincana* Eichw. weder für *L. Volkmannianum* noch für *L. Veltheimianum* genommen werden kann und damit fällt der Anhaltspunct, welcher Herrn D. Stur veranlasste anzunehmen, dass am Ural die Ostrauer-Schichten anstehen.

Mir sind aus der unteren Abtheilung der Steinkohlenformation am östlichen Ural folgende Pflanzenformen bekannt geworden:

1. *Sphenopteris rutaefolia* Eichw. sp. Steht zunächst der *Todea Lipoldi* Stur. aus dem mährisch-schlesischen Dachschiefer; ist überhaupt von untercarbonischem Character.

2. *Aneimites nanus* Eichw. sp. Steht zunächst der *Cyclopteris acadica* Daws. aus dem Untercarbon Canadas und dem *Adiantum antiquum* Ett. des Culm-Schiefer Mährens.

3. *Neuropteris heterophylla* Brgt.? Ist aus dem Unter-Carbon nicht bekannt und kommt vorzüglich in der unteren Abtheilung der productiven Schichten der Steinkohlenformation vor.

4. *Neuropteris parvula* n. sp.

5. *Asterophyllites Karpinskii* n. sp.

6. *Sphenophyllum Schlotheimii* Brgt. brevifolium n. var. Die Art ist bisher aus dem Untercarbon nicht bekannt und kommt nur in der oberen Abtheilung der Steinkohlenformation vor.

1) Verhandlungen der k. k. geologischen Reichsanstalt. 1878. № 11.

2) Die Fundstelle am Flusse Iset beim Dorfe Brod wird von Herrn D. Stur fälschlich an den Westabhang versetzt.

7. *Lepidodendron Glincanum* Eichw. sp. Steht unter den westeuropäischen Formen zunächst dem *L. Veltheimianum* St., welches vorzüglich für den Untercarbon characteristisch ist; weit mehr stimmt jedoch das *L. Glincanum* mit dem nordamericanischen *L. corrugatum* Daws. aus dem Untercarbon Canadas überein.

8. *Ulodendron commutatum* Schimp. Ist characteristisch für die unterste Abtheilung des Untercarbon.

9. *Stigmaria ficoides* Brgt.

10. *Lepidophyllum minutum* n. sp.

11. *Rhabdocarpus orientalis* Eichw.

12—13. *Squamae coniferarum* 2 sp.

Unter diesen Formen characterisiren unsre Florula als eine zur untersten Abtheilung des Untercarbon gehörende: *Sphenopteris rutaefolia*, *Aneimites nanus*, *Lepidodendron Glincanum* und *Ulodendron commutatum*. Dagegen ist auffallend das Vorhandensein von *Neuropteris heterophylla?* und *Sphenophyllum Schlotheimii* var., welche bisher nur aus der oberen Abtheilung des Carbon bekannt sind. Sie sind nur in wenigen Stücken gefunden und spielen den vorausgenannten, den Untercarbon characterisirenden Formen gegenüber eine nur untergeordnete Rolle. In geologischer Hinsicht ist der Nachweis des Auftretens dieser Arten bereits in Schichten, welche unter dem untersten Bergkalke lagern, von grossem Interesse.

BESCHREIBUNG DER PFLANZENRESTE.

Sphenopteris rutaefolia Eichw. sp. T. I. Fig. I — 5.

Gleichenites rutaefolius Eichw. l. c. p. 91. T. II Fig. 5—6.
Sphenopteris notha Eichw. l. c. p. 82. T. VIII Fig. 1 (Blattstiele).
Sphenopteris (Hymenophyllites) rutaefolius Schimp. Traité Bd. I p. 403.
Diplothmema cf. rutaefolium Stur. l. c. p. 221.
cf. Rhodea Stachei Stur l. c. p. 223.

Blatt dreifach gefiedert mit lineal-lanzettlichen Fiedern und länglich-lanzettförmigen Fiederchen; letztere tief fiederspaltig mit 2—3 theiligen, seltener scheinbar ungetheilten, Abschnitten und linealischen Zipfeln, welche nur einen Nerven besitzen.

Von diesem Farn liegen mir vor: Originalexemplare aus Eichwalds Sammlung von Kamenskaja Datscha (hierzu Fig. 1), Exemplare vom Fl. Iset gegenüber dem Dorfe Brod, von der VII Linie (Fig. 2) und von der I Linie (Fig. 3, das Exemplar welches Herr D. Stur als *Rhodea Stachei* bezeichnet hat).

Die Abbildungen dieses Farn in der *Lethaea rossica* sind sehr wenig naturgetreu; die

Fiedern und Fiederchen sind viel zu kräftig, zu gross und breit, letztere auch zu spitz dargestellt. Hierin ist der grosse Unterschied in meiner Abbildung mit der Eichwalds begründet.

Weil von diesem Farn bisher keine Fructificationen gefunden sind halte ich es für zweckmässiger denselben bei der Gattung *Sphenopteris* zu lassen. Herr D. Stur hat ihn mit verschiedenen Namen bezeichnet, was ich erwähnen muss um späteren Missverständnissen vorzubeugen. Zur Gattung *Diplothmema* Stur kann der Farn nicht gezogen werden, weil noch keine sicher dazu gehörende gabelig getheilte Blattstiele gefunden sind, wie solche die genannte Gattung characterisiren sollen. Mit *Sphenopteris (Diplothmema* Stur*) elegans* Brgt. finde ich ihn wenig übereinstimmend, entgegen Sturs l. c. p. 222 geäusserten Meinung, weil bei dieser Art die Blattspindeln characteristisch quergestreift sind und die Zipfel der Fiederchen breiter und keilförmig sind. Auch *Rhodea Stachei*[1]), womit Herr D. Stur unsren Farn vergleicht, scheint mir durch die ungetheilten, linealischen, weiter von einander entfernt stehenden und dickeren Abschnitte der Fiederchen sehr verschieden zu sein. Vielmehr finde ich eine grosse Aehnlichkeit dieses Farn mit *Todea Lipoldi* Stur[2]), so dass ich vermuthen möchte dieselben gehörten zu einer Art. Auch *Sphenopteris Schimperiana* Goepp.[3]) ist habituell sehr ähnlich unserem Farn, hat aber gabelig getheilte Blattspindeln und zahlreichere, breitere, schmal-keilförmige Blattzipfel. Die grosse Aehnlichkeit der *Sphenopteris rutaefolia* mit *Todea Lipoldi* und *Sphenopteris Schimperiana* scheint mit dem annähernd gleichen geologischen Alter der Schichten in welchen sie gefunden sind, im Zusammenhange zu stehen.

Die mir vom Kamenski-Sawod und von der VII Linie vorliegenden Blattfiedern haben das Aussehen der in Fig. 1, 2 dargestellten Stücke. Sie haben eine feine fast gerade Spindel, an welcher ich keinen Flügelrand erkennen konnte und abwechselnd stehende Fiederchen. Die Fiederchen haben einen feinen Mittelstreifen und jederseits 3—5 Abschnitte, welche in 2—3 feine linealische Zipfel getheilt sind; jeder Zipfel lässt einen feinen Mittelnerv erkennen. Je nach dem die Spindel der Fieder mehr gestreckt oder kürzer, ob die Fiederchen und deren Abschnitte etwas kürzer oder länger sind nehmen die Blattfiedern ein gedrungeneres oder laxeres Aussehen an. Grössere zusammenhängende Stücke dieses Farn sind mir nicht zugekommen. Das vollständigste Stück, von der 1sten Linie, habe ich in Fig. 3 abgebildet. An der mässig dicken, mit einer seichten Mittelfurche versehenen Spindel stehen die Fiedern abwechselnd. Von diesen ist jedoch nur die eine vollständiger erhalten. Sie hat eine von Fiederchen zu Fiederchen etwas geknickte und ausserdem nach vorn gebogene Spindel. Die Fiederchen haben hier mehr verlängerte Abschnitte und Zipfel und letztere sind ausserdem nicht so in einer Fläche ausgebreitet, wie bei den Exemplaren von Kamenski, sondern zum Theil vom Gestein verdeckt, wodurch die Abschnitte oft ungetheilt erscheinen. Obgleich dieses Stück ein weniger regelmässiges und mehr sparriges Aussehen

1) D. Stur, Culmflora der Ostrauer- und Waldenburger-Schichten. p. 177. T. XVI Fig. 7.

2) Culmflora des mährisch-schlesischen Dachschiefers, p. 71, T. XI. Fig. 8.

3) Schimper, Traité Bd. I p. 408. Terrain de transition des Vosges p. 341. T. XXVII Fig. 1—5.

hat, als die übrigen, kann ich nicht umhin dasselbe als zur selben Art gehörig zu betrachten.

Auf demselben Schieferthonstücke auf dem das ebenbeschriebene Blattstück liegt fand ich eine etwas unregelmässig in linealische oft zweispaltige Abschnitte zerschlitzte Schuppe (T. I Fig. 4), welche wahrscheinlich als Spreuschuppe am Stengel oder auch am Blattstiele dieses Farn gesessen hat und welche im Ganzen den Gebilden gleicht welche als Aphlebia, Schizopteris und Rhacophyllum beschrieben werden. Eine dieser ähnliche Schuppe ist von Herrn C. von Ettinghausen[1]) unter der Bezeichnung *Schizopteris Lactuca* beschrieben und abgebildet, welche jedoch nach Herrn D. Stur[2]) als Blatt zu *Bornia radiata* gehören soll.

Zu diesem Farn mag ferner eine Anzahl von Blattstielen gehören, welche in den Pflanzenabdrücke enthaltenden Schichten am östlichen Ural häufig vorkommen. Dieselben sind unter spitzem Winkel fiederig verzweigt und haben eine längsstreifige Oberfläche, lassen zuweilen auch einige Längsrippen erkennen. Eine ziemlich genaue Abbildung eines höchst wahrscheinlich hierher gehörenden Blattstieles hat Eichwald l. c. T. VIII Fig. 1 unter der Bezeichnung *Sphenopteris notha* gegeben. An der Hauptspindel sind hier drei abwechselnd rechts und links eingefügte Seitenspindeln zu sehen. Auf der unteren Seitenspindel befinden sich in gleichmässigen Entfernungen von einander rundliche Narben, die Einfügungsstellen von Seitenspindeln folgender Ordnung darstellend und auf der zweiten Seitenspindel befindet sich eben solch eine rundliche Narbe. Der von mir T. I Fig. 5 abgebildete Blattstiel ist vermuthlich eine am Grunde abgegliederte Seitenspindel. Er befindet sich auf einer Platte vom Dorfe Brod, welche von Herrn Prof. A. Stuckenberg gesammelt ist. Das dickere, also untere Ende dieses Blattstiels zeigt eine etwas unebene callös aussehende Insertionsfläche. Längs der oberen Kante des Blattstieles sind in regelmässigen Entfernungen von einander schiefgestellte Narben zu erkennen, welche weiter oben bedeutend kleiner werden und die Einfügungsstellen von Blattspindeln höherer Ordnung bezeichnen. Längs der Mitte des Abdruckes ist auf dem Blattstiele eine schmale Längskante vorhanden.

Aneimites nanus Eichw. sp. T. I Fig. 6 — 18.

Cyclopteris nana Eichw. Lethaea Bd. I. p. 64. T. I a Fig. 7.
Schizopteris foveolata Eichw. l. c. p. 66 T. VIII Fig. 2, 4. (Blattstiele).
Cardiopteris cf. nana Eichw. ex parte Stur l. c. p. 221.

Blattspindel unter rechtem oder stumpfem Winkel fiederig verzweigt; Fiedern zurückgeschlagen-gestielt ungetheilt und nierenförmig, ganzrandig oder 2 — 3 spaltig mit sitzenden

---

1) Fossile Flora der mährisch-schlesischen Dachschiefer p. 29.

2) Culm-Flora der mährisch-schlesischen Dachschiefer p. 12.

oder kurzgestielten rundlichen, obovaten oder auch keilförmigen Abschnitten; Abschnitte ohne Hauptnerven, mit zahlreichen gabelig sich theilenden Nerven. (T. I Fig. 6 — 9).

var. **minor** m. Mit kleineren, sitzenden, rundlichen, obovaten oder keilförmigen Abschnitten (T. I Fig. 10—15).

var. **cuneifolia** m. Mit keilförmigen ungetheilten oder tief zwei-theiligen Abschitten. (T. I. Fig. 16—18).

Die Hauptform, welche Eichwald allein bekannt war und den Namen *Cyclopteris nana* erhielt, liegt vom Kamenskaja Datscha und vom Fl. Iset gegenüber dem Dorfe Brod vor. Die var. minor von der III Linie und vom Flusse Iset gegenüber Brod und die var. cuneifolia von der VII Linie. Die Blattstiele, *Schizopteris foveolata*, sind von Kamenskaja Datscha und vom Fl. Iset gegenüber Brod vorhanden.

Was zunächst die Gattung zu welcher dieser Farn zu stellen ist anbetrifft, so kann, weil fruchttragende Blattabschnitte nicht gefunden sind, nur von einem provisorischen Unterbringen die Rede sein. Der Gattungsname Cardiopteris kann, entgegen der Meinung Sturs, unmöglich angewandt werden, weil Cardiopteris durch ungetheilte, paarweise gegenständig und mit breiter Basis der Blattspindel angeheftete Blattfiedern ausgezeichnet ist. Durch die Form der Blattabschnitte und deren Nervation nähert sich unser Farn den unter dem Gattungsnamen *Adiantites* beschriebenen Formen. Ausserdem aber stimmt unser Farn durch die sparrig abstehenden Aeste der Blattspindel mit den von Schimper[1]) zur Gattung *Aneimites* Daws. gestellten Formen überein. *Aneimites adiantoides* Sch. [2]) hat ähnliche keilförmige Blattabschnitte wie die var. *cuneifolia* unseres Farn. Ganz besonders gross finde ich jedoch die Aehnlichkeit unserer var. minor mit *Cyclopteris (Aneimites) acadica* Daws.[3]). Alle drei *Aneimites*-Arten *(A. adiantoides, acadicus* und *nanus)* sind in Schichten der unteren Abtheilung des Untercarbon gefunden.

Aneimites nanus hat von Blattfieder zu Blattfieder knieförmig abgelenkte Blattspindeln und eigenthümlich zurückgeschlagene Blattfiedern (Fig. 6, 7). Da die Blattspindel nicht immer gegen oben hin merklich schwächer wird, so hat die Orientirung der Blattstücke zuweilen ihre Schwierigkeiten. In Fig. 7 ist jedoch die Blattspindel unten bedeutend dicker und in Fig. 6 schwillt sie am Grunde plötzlich stark an. Auch das Fig. 10 abgebildete Stück könnte nicht anders naturgemäss orientirt werden. Hierdurch muss der Farn ein ganz eigenthümlich sparriges Aussehen gehabt haben. In der Art und Weise der Verzweigung der Blattspindel nähert er sich sehr dem *Aneimites acadicus* Daws. was ein Vergleich der Abbildung Fig. 10 mit Fig. 54 in Dawsons citirter Schrift zeigt. Der Stiel der Blattfieder ist 1 — 1,5 cm. lang und unter mehr oder weniger spitzem Winkel rückwärts gerichtet,

---

1) Traité Bd. III, p. 489.

2) *Adiantum antiquum* Ettinghausen, Fossile Flora des mährisch-schlesischen Dachschiefers p. 22. T. VII. Fig. 1. *Adiantides antiquus* Ett. sp. Stur, Culm-Flora des mährisch-schlesischen Dachschiefers p. 66. T. XVI Fig 4 — 6. T. XVII Fig. 3 — 4.

3) J. W. Dawson, Lower Carboniferous and Millstone Grit Formations of Canada p. 26, T. VII Fig. 53 — 63.

seltener ist er fast rechtwinkelig der Spindel eingefügt. Die Blattfiedern sind bei der Hauptform seltener ungetheilt. So haben wir in Fig. 9 eine ungetheilte Blattfieder, welche fast halbkreisförmig ist mit breitem stumpfwinkeligem Ausschnitt am Grunde und schief gerichtetem Stielchen. Andere Fiedern sind bis auf den Grund gespalten und haben einen länger gestielten und einen ganz kurzgestielten oder fast sitzenden Abschnitt (Fig. 6, 8). In solchem Falle sind die Abschnitte rundlich, rundlich-obovat und bekommen eine keilförmige Basis. Der Aussenrand der Blattfiedern und Abschnitte ist ganzrandig, zuweilen undulirt; an einigen Stücken sind vielleicht nur mechanisch eingeschnittene Abschnitte zu sehen (in Fig. 6 der rechte Abschnitt an der unteren Fieder). Zahlreiche Nerven verlaufen vom Grunde der Blattfieder fächerförmig auseinander und theilen sich wiederholt gabelig. Sie stehen so dicht dass 5—7 auf einen 2 mm. breiten Zwischenraum kommen.

Durch die rundlichen, oft fast nierenförmigen Blattfiedern ist die Hauptform leicht von *A. adiantoides* zu unterscheiden und von *A. acadicus* ausser durch die Form auch durch die Grösse der Fiedern. Die Varietäten unsres Farn nähern sich jedoch sehr diesen ausländischen Arten auch in der Form und Grösse der Blattabschnitte. Die var. *minor* ist hauptsächlich durch die kleineren Fiedern, welche mehr getheilt sind und meistens ungestielte, zuweilen ein wenig herablaufende Abschnitte haben, ausgezeichnet. Sie ist sehr ähnlich dem *A. acadicus* Daws. sp. und erscheint in solchem Grade von der Hauptform verschieden, dass sie auch als besondere Species betrachtet werden könnte. Weil aber die Verzweigung der Blattspindel ganz in derselben Weise erfolgt, so möchte ich lieber beide Formen als zu einer Art gehörig betrachten, zumal da auch die folgende Varietät ein Bindeglied zwischen beiden bildet. Auf einer Platte vom Fl. Iset gegenüber Brod befindet sich die originell verzweigte Blattspindel Fig. 10 und die Blattstücke Fig. 11—14. Da auf der Platte ausser zahlreichen Blattbruchstücken nichts Anderes vorhanden ist, gehören diese Theile doch wahrscheinlich zusammen und weil die Verzweigung der Blattspindel in Fig. 10 ganz ebenso erfolgt wie bei der Hauptform (Fig. 6, 7), werden auch die Blattbruchstücke zu A. nanus gehören. In Fig. 11 und 12 ist der Stiel der Blattfiedern erhalten und in ersterer rechtwinkelig der Spindel eingefügt. Die Abschnitte der fiederig 2—3 spaltigen Fiedern sind von verschiedener Form. An dem Stücke Fig. 13 haben wir zwei rundlich ovale seitliche Abschnitte und einen schiefeiförmigen Endabschnitt, welcher einerseits eingekerbt ist. In den Fig. 11, 12, 14 dargestellten Stücken haben wir rundlich umgekehrt eiförmige und länglich umgekehrt eiförmige Abschnitte, welche am Grunde keilförmig, an der Spitze stumpf oder abgerundet sind. Das nierenförmige Fig. 15 gezeichnete Blättchen könnte auch noch zu dieser Form gehören. Es hat aber etwas weniger dichtstehende Nerven.

Die var. *cuneifolia* ist durch keilförmige Blattabschnitte dem A. *adiantoides* Sch. sehr ähnlich. Dass auch bei dieser Form die Stiele der Blattfiedern zurückgeschlagen sind zeigt die Fig. 16. An diesem Bruchstücke ist nur ein rhombisch-keilförmiger gestielter Blattabschnitt vorhanden. Einen in 2 keilförmige Theile getheilten Abschnitt zeigt Fig. 18 und Fig. 17 einen grösseren zweifach zerschlitzten Blattabschnitt.

Die Blattspindeln dieses Farn sind, wenn sie noch mit Blattabschnitten versehen, fein längsstreifig; die dickeren Theile des in Fig. 10 abgebildeten Blattstiels sind ausserdem schwach querrunzelig. Einen Zusammenhang dieser Theile mit solchen Blattspindeln, welche grubig quergerunzelt sind, habe ich nicht beobachtet; doch scheint es mir höchst wahrscheinlich dass letztere, die von Eichwald unter dem Namen *Schizopteris foveolata* beschrieben werden, zu demselben Farn gehören. Sie liegen in zahlreichen Stücken vor, worunter das dickste Stück $3^1/_2$ cm. breit ist. Ein sehr characteristisches Stück ist in dem Werke Eichwalds T. VIII Fig. 4 gut abgebildet. Die Verzweigungen erfolgen an diesem Stücke unter ziemlich stumpfen an der Spitze abgerundetem Winkel und die Hauptspindel ist an der Einfügungstelle der Aeste rückwärts abgelenkt, wie an den von mir T. I Fig. 6, 7, 10 abgebildeten Stücken; doch ist die Verästelung an den von mir abgebildeten Blattstücken in höherem Grade sparrig.

Neuropteris heterophylla Brgt.? T. I Fig. 19.

A. Brongniart, Histoire des végét. foss. p. 243 T. LXXI. LXXII Fig. 2.

O Heer, Flora foss. Helvetiae p. 23. T. IV Fig. 1 — 3, V Fig. 4.

R. Zeiller, Végét. foss. du terrain houiller de la France. p. 49. T. CLXIV Fig. 1, 2.

Die nicht gut erhaltenen in der Fig. 19 abgebildeten Bruchstücke eines Neuropteris-Blattes befinden sich auf einer Platte von der VII Linie zusammen mit Bruchstücken von *Aneimites nanus* und beblätterten Zweigen des *Lepidodendron Glincanum.* Die erhaltenen Fiederchen gehören zu zwei nebeneinanderliegenden Fiedern. Sie sind durch Zwischenräume von einander getrennt, von lanzettlicher Form, am Grunde herzförmig und zur Spitze verschmälert. In ihrem unteren Theile haben die Fiederchen eine etwas breite Mittelfurche, welche oberhalb der Mitte verschwindet und zu den Seiten sind die Spuren der im Vergleiche zu Neuropteris flexuosa etwas groben Nervation zu erkennen. In der Ecke links liegt ein Fiederchen an dessen Grunde sich zwei rundliche Seitenfiederchen abgetrennt haben.

Diese Bruchstücke scheinen zu mangelhaft zu sein um sicher bestimmt werden zu können. So viel ich urtheilen kann passen sie am besten zu *N. heterophylla.* Da im mährisch-schlesischen Culm-Dachschiefer eine der *N. heterophylla* sehr nahe kommende Form (*N. antecedens* Stur) vorkommt, so wäre auch das Vorhandensein dieser Art bereits im Culm nicht besonders auffällig.

Neuropteris parvula n. sp. T. I Fig. 20.

Blattfiederchen an der Spindel abwechselnd, klein, nierenförmig rundlich, ohne Mittelnerven, mit zahlreichen gabeligen Nervillen.

Auf einem Steine vom Fl. Iset gegenüber Brod liegen die abgebildeten Fiederchen,

welche zu einer Blattspindel, welche jedoch nicht erhalten ist, gehören. Die Fiederchen sind fast rund, mit einem kleinen Ausschnitt am Grunde, ganzrandig, zum Theil im Gestein vertieft, zum Theil etwas hervorgewölbt; ihre Nervation ist etwas undeutlich, besteht aber aus vom Grunde auseinanderlaufenden, sich gabelig theilenden und mässig dicht stehenden Nervillen.

Erinnert an Sphenopteris foliolata Stur aus dem mährisch-schlesischen Dachschiefer.

Asterophyllites Karpinskii n. sp. T. II Fig. 2.

Stengelglieder kurz (kaum 0,15 cm. lang und mehr als 0,1 cm. breit), Blattwirtel ausgebreitet, aus wenigstens 12 — 15 feinen, geraden, die Länge der Stengelglieder 3 — 4-fach übertreffenden Blättern gebildet.

Befindet sich auf einem Steine von der I Linie.

Auf dem Thonstücke liegen die Aeste eines zierlichen Asterophylliten, deren Länge einige cm. beträgt. Ihr Stengel ist gerade oder ein wenig gebogen; er zeigt undeutliche Längsstreifen und wenig von einander abgesetzte Glieder. Die Blattwirtel erscheinen als einander paarweise gegenüberstehende fächerförmige Büschel fein linealischer Blätter welche kaum den Mittelnerven erkennen lassen.

Sphenophyllum Schlotheimi Brgt.

Germar, Versteinerungen der Steinkohlenformation von Wettin und Löbejün p. 13 T. VI.

Schimper, Traité Bd. I p. 339. T. XXV Fig. 19 — 21.

Sphenophyllum emarginatum Geinitz, Versteinerungen der Steinkohlenformation in Sachsen p. 12 T. XX Fig. 2, 2 A, 7.

Var. **brevifolia**. T. II. Fig. 3. 4.

Blätter fast gleichseitig dreieckig, nur wenig länger als am Aussenrande breit, mit nur 6 — 8 verhältnissmässig weit von einander abstehenden Nerven am Aussenrande.

Befindet sich auf einem Steine von der VII Linie.

Diese Form ist durch die grössere Breite der Blätter, welche, wenn die Blattwirtel in einer Fläche ausgebreitet liegen, mit ihren Seitenrändern aneinander schliessen und durch die weit von einander entfernten Nerven von *S. Schlotheimi* verschieden. Die abgebildeten Blattwirtel liegen auf dem Stein ausgebreitet. Sie bestehen je aus 6 dreieckigen sich auf dem Stein vorwölbenden Blättern, welche einen bogenförmigen, undeutlich crenulirten Aussenrand und gerade Seitenränder haben. Nahe am Grunde haben die Blätter 3 — 4 Nerven, welche sich ein mal gabelig spalten. Ausser diesen liegen auf dem Stein noch Stengelstücke und Bruchstücke anderer Blattwirtel, welche zum Theil grösser sind als die abgebildeten, die aber zum Theil vom Gestein verdeckt sind.

Lepidodendron Glincanum Eichw. sp. T. II Fig. 5—16. T. III Fig. 1—19. T. IV Fig. 1—5.

Sagenaria Glincana Eichw. Leth. ross. I p. 127 T. V Fig. 21. 22. T. V. a. Fig. 1—9.
Lepidodendron Volkmannianum und *L. Veltheimianum* Stur l. c. p. 221 — 223.

Blätter schmallinealisch, fein zugespitzt, ausgebreitet, seltener abstehend, S-förmig gekrümmt; Fruchtblätter über der Sporangientragenden Basis aufwärts gerichtet, lang und fein nadelförmig; jüngere Rinde mit in deutlicheren Schrägzeilen angeordneten Blattpolstern; auf der älteren Rinde die verticalen Zeilen der Blattpolster deutlicher vortretend; Blattpolster mit Längskiel, meistens rhombisch-halbmondförmiger Narbe oberhalb der Mitte, und unterhalb der Narbe jederseits mit linealischem, etwas gekrümmtem Närbchen versehen; Blattpolster jüngerer Rinde meist dichtstehend, rhombisch, fast quadratisch bis verlängert-rhombisch, oder auch umgekehrt eiförmig und mit spitzen oder verlängerten Enden; Blattpolster älterer Rinde sechseckig, spindelförmig bis fast leierförmig, meistens in verticalen Zeilen angeordnet und mit den Enden sich in derselben Richtung mit einander verbindend, seltener getrennt; die Blattpolster der nebeneinander stehenden Zeilen alterniren mit einander und sind durch mehr oder weniger breite längsrunzelige oder netzigrunzelige Zwischenräume getrennt.

Das reichliche Material welches mir von diesem *Lepidodendron* von den verschiedenen Fundstellen vorliegt, lässt in demselben einen recht eigenthümlichen Typus erkennen, welcher an *L. Veltheimianum*, *L. Volkmannianum*, auch an *L. rimosum* erinnert und ausserdem in *Knorria*- und *Sigillaria*-ähnlichem Erhaltungszustande vorkommt. Der Versuch die verschiedenen Formen als Arten auseinander zu halten blieb der zahlreichen Uebergänge wegen erfolglos.

Herrn Stur haben von diesem *Lepidodendron* nur einige Stücke und darunter nicht die am besten characteristischen vorgelegen; es kann deshalb nicht auffallen, dass er zwei Arten unterschieden hat. Herr Stur hat nämlich die Sporangienstände (T. II Fig. 11, in Herrn Sturs Schrift unter № 47, 50, 51 erwähnt), beblätterte Aeste (T. II Fig. 6, bei Stur № 53) und Rindenstücke (T. III Fig. 7, bei Stur № 48, ausserdem einige schlecht erhaltene Stücke, welche unter № 52, 54 aufgeführt sind) als *L. Veltheimianum* bestimmt, wogegen sich wol nichts einwenden lässt, da diese Stücke entsprechenden Theilen von *L. Veltheimianum* ausserordentlich ähnlich sind. Andere Stücke des *L. Glincanum*, nämlich dünnere entblätterte Zweige (T II Fig. 7, 8, bei Stur № 30; Fig. 10, bei Stur № 45) und Rindenstücke (T. III Fig. 4, bei Stur № 45; ferner ein Stück, welches dem T. III Fig. 14 abgebildeten sehr ähnlich ist und von Stur unter № 32 genannt ist) hat Herr Stur als *Lepidodendron Volkmannianum* [1]) aufgeführt. Nun ist *L. Volkmannianum* nur sehr unvollständig bekannt; es hat meistens grössere, im Verhältniss zur Länge breitere Blattpolster

---

1) Ueber *L. Volkmannianum* vergl. D. Stur, Culm-Flora der Ostrauer und Waldenburger Schichten p. 286. T. XVII Fig. 4, XXIII Fig. 2, 3.

als *L. Glincanum*, ferner einen weniger deutlichen Mittelkiel auf den Blattpolstern und deutlichere Querrunzeln, als die entsprechenden Stücke vom Ural. Da aber beide Formen vom Ural, die dem *L. Veltheimianum* entsprechende und die dem *L. Volkmannianum* ähnliche Form, wie ich weiter zeigen werde, durch Uebergänge mit einander verknüpft sind und ausserdem mit ihnen auch noch solche Formen verbunden sind, welche weder für *L. Veltheimianum* noch für *L. Volkmannianum* bekannt sind, so ist wohl *L. Glincanum* als separate Species aufrecht zu erhalten.

Unter den aussereuropäischen Formen ist das *Lepidodendron corrugatum* Daws.[1]) aus dem Untercarbon Nord-Americas dem *L. Glincanum* auch in Bezug auf die Vielgestaltigkeit sehr ähnlich. *L. corrugatum* hat jedoch kleinere Blattpolster mit oft fast mittelständiger rundlicher Narbe, wärend bei *L. Glincanum* die Narbe der Blattpolster meist 3-eckig bis halbmondförmig ist. Bei beiden Arten (wie auch bei *L. Volkmannianum*) kommen die Blattpolster öfters in horizontalen Reihen geordnet vor, bei beiden (auch bei *L. Volkmannianum*) rücken die Blattpolster in Folge des Dickenwachsthums des Stengels auseinander und werden dann durch eine runzelige Rindenoberfläche getrennt; bei beiden sind ferner solche Formen gefunden, wo die Blattpolster wie bei vielen *Sigillarien*, in Reihen geordnet auf Längsrippen zu stehen kommen.

Beblätterte Zweige von *L. Glincanum* sind am Fl. Iset gegenüber Brod und von der I Linie gesammelt. Auf einer Platte vom Dorfe Brod liegen fünf Aeste neben einander, von denen der vollständigere, gabelig verzweigte T. II Fig. 5 abgebildet ist. Diese Zweige haben einen dünnen hin und her gebogenen Stengel, auf dessen Oberfläche nur undeutliche länglich-rhombische Blattpolster zu erkennen sind. Sie sind von dichtstehenden, fast horizontal ausgebreiteten Blättern umgeben, welche dünnlinealisch und ein wenig S-förmig gebogen sind. Diesen sind sehr ähnlich jene Lepidodendron-Zweige, welche Schimper früher unter *Sagenaria acuminata*[2]) abgebildet hatte, später aber zu *Lepidodendron Veltheimianum*[3]) zog. Einige kräftigere Zweige liegen auf einem Stücke aus der IV Schachte der I Linie. Den einen Zweig, welcher gabelig getheilt ist, habe ich T. II Fig. 6 abgebildet. Er hat einen verhältnissmässig dicken Achsentheil und ausgebreitete, S-förmig gebogene, ganz fein zulaufende, 2,5 cm. lange Blätter.

Entblätterte dünnere Zweigstücke liegen vom Fl. Iset gegenüber Brod, von der I, IV Linie und vom Dorfe Jegorschino vor. Sie sind einfach oder gabelig verzweigt (Fig. 9, 10) und kommen in zwei Erhaltungszuständen vor, welche zuweilen auch an demselben Zweige zu sehen sind (Fig. 7). Entweder der Zweig ist von ziemlich dichtstehenden länglich-rhombischen Blattpolstern bedeckt, welche an ihrem vorderen Ende eine vertiefte Narbe haben (Fig. 7, 7a vergr. 8, 10); oder die Oberfläche mit den Blattpolstern ist nicht

---

1) L. c. p. 19 T. II, III, V Fig. 33—36.
2) Mémoire sur le terrain de transition des Vosges p. 338 T. XXVI Fig. 3.
3) Traité de Paléontologie Bd. II p. 30.

erhalten und an Stelle der Blattpolster stehen von einander entfernte, kleinere, längliche, erhabene Narben (Fig. 7, der obere Theil; Fig. 9)[1]).

Sporangienstände sind aus der I Linie gewonnen. Sie sind stückweise vorhanden; das beste ist T. II Fig. 11 abgebildet. Hiernach müssen die Sporangienstände lang cylindrisch gewesen sein und von den dünnnadelförmigen Spitzen der Tragblätter dicht bedeckt. Auf demselben Stein liegen auch längs der Mittelachse durchbrochene Sporangienstände. Diese zeigen eine grob längsstreifige und ausserdem deutlich quergegliederte Spindel (T. II Fig. 12 vergr.). Letzteres hängt natürlich damit zusammen, dass die Tragblätter, wie auch die Laubblätter, wirtelig angeordnet sind. Auf den längsdurchbrochenen Stücken stehen die Tragblätter nicht ganz genau paarweise einander gegenüber. Die Tragblätter haben einen fast horizontalen unteren Theil (Fig. 12, 13, 14 vergr.), welcher zuweilen auch schräg aufwärts steht (Fig. 15) und über welchem ein länglicher Sporensack zu sehen ist. Ueber die Sporensäcke hinaus sind die Tragblätter in dünne, nadelförmige, aufwärts gerichtete Blattspitzen verlängert (Fig. 13, 15). An der Uebergangsstelle des sporangientragenden Theiles in die nadelförmige Spitze befindet sich eine abwärts gerichtete knieförmige Anschwellung (Fig. 13), welche den darunter sich befindenden Sporensack von aussen deckt. Den unteren Theil des Tragblattes habe ich in der Flächenansicht nicht zu Gesichte bekommen; er wird, weil zwischen anderen Theilen fest eingeschlossen, von zarter Beschaffenheit gewesen sein und wohl deshalb werden die Tragblätter oberhalb derselben abgerissen sein. Die Blattspitze der Tragblätter wird am Grunde bedeutend breiter, zeigt eine kräftige Mittelkante (Fig. 16, 16 a vergr.) und reisst hier mit 3 Spitzen von dem unteren Theile des Tragblattes ab. Auf den Sponrangienständen sind vielfach die Umrisse kleiner rundlicher Körperchen zu erkennen, welche die Sporen darstellen. Auf einigen Stücken konnte ich nur ganz kleine, etwa $\frac{1}{4}$ mm. messende Körner erkennen, während sie auf anderen grösser waren und fast $\frac{3}{4}$ mm. im Durchmesser hatten. Auf dem Fig. 12 abgebildeten Stücke schien zwischen Sporensäcken mit grösseren Sporen einer mit kleinen Sporen eingeschlossen zu sein. Die Sporen liegen auch auf anderen Gesteinsstücken aus der IV Schachte der I Linie einzeln und in Gruppen herum.

Die Rindenstücke des *L. Glincanum* lassen vier Hauptformen unterscheiden.

a. **tessellatum**. T. III Fig 1 — 4, 6. Rindenoberfläche durch schräg verlaufende Furchen in fast quadratische bis verlängert rhombische Felder, welche die Blattpolster dar-

---

1) An diese Erhaltungszustände entblätterter Zweigstücke schliessen sich solche vom westlichen Ural-Abhange an. Um einen vorhandenen Raum auf der Tafel auszufüllen habe ich einige von diesen T. II Fig. 1 a—c aufgenommen. Sie sind am Fl. Lunja, Nebenflusse der Jaiwa, welche in die Kama fliesst, von Herrn Krotow gesammelt und durch Prof. Stuckenberg mir zugestellt. In Fig. 1a haben wir lang-rhombische Blattpolster mit einer fast quadratischen Blattnarbe oberhalb der Mitte; auf dem Zweige Fig. 1 b. scheinen nur diese Blattnarben erhalten zu sein, welche hier aber dichter stehen; der Umriss der Blattpolster ist nicht erhalten. Das Stück Fig. 1 c, 1 c′, vergr. zeigt länglich-rhombische Blattpolster, welche im oberen Theile vertieft sind und eine Längsfurche haben. Da das Material ungenügend ist, so lässt sich nicht bestimmt sagen, ob diese Stücke zu *L. Glincanum* gehören. Sonst habe ich vom westl. Ural nur *Stigmarien* gesehen.

stellen, eingetheilt; die Blattpolster fast ohne Zwischenräume sich berührend; die Längsreihen, Querreihen und zweierlei Schrägzeilen derselben gleichmässig auffallend.

Dieser Erhaltungszustand kommt vorzüglich bei dünneren Aesten und wahrscheinlich solchen, in welchen die Cambiumthätigkeit noch keinen bedeutenden Zuwachs hervorgebracht hat, vor. Die Grösse der Blattpolster, ihre Länge und Breite ist auch an solchen Rindenstücken bedeutendem Wechsel unterworfen. Die Breite derselben schwankt zwischen 0,25 cm. und 0,6 cm., die Länge zwischen 0,6 und 1,9 cm. Sind die Blattpolster fast quadratförmig (Fig. 2, 3, 3 a vergr.), so stumpfen sie sich oben und unten etwas ab. Wird ihre Länge im Verhältniss zur Breite beträchtlicher, so sind sie meistens an den Enden spitz (Fig. 1, 4, 6). Grösse der Blattpolster und Dicke der Aeste scheinen nicht immer im Verhältniss zu einander gestanden zu haben. Das Stück, von welchem die kleinen fast quadratischen Blattpolster Fig. 3 gezeichnet sind, ist offenbar nicht in der ganzen Breite des Astes erhalten und misst doch in dieser Richtung 10 cm. Dagegen hat das Stück mit den Fig. 4 gezeichneten Blattpolstern eine Breite von 4,5 cm. und eins mit grossen rhombischen, denen in Fig. 6 gezeichneten ganz ähnlichen, Blattpolstern ist 7 cm. breit.

Die Blattpolster haben in der Mitte ihrer oberen Hälfte eine im Abdrucke vertiefte dreieckige (Fig. 3 a) oder deckelförmige (Fig. 6) Narbe, welche sie in einen grösseren unteren, und kleineren oberen Theil abtheilt. Meistens geht die Narbe rechts und links in im Bogen abwärts verlaufende Furchen über, wodurch der untere Theil der Blattpolster eine annähernd umgekehrt eiförmige Gestalt bekommt. Ausserdem sind die Blattpolster oberhalb, wie auch unterhalb der Narbe durch eine Längsfurche in eine rechte und linke Hälfte getheilt. Zu beiden Seiten dieser Längsfurche ist auf mehreren Stücken unterhalb der Narbe ein etwas gekrümmtes linienförmiges Närbchen zu erkennen (Fig. 3 a vergr.).

b. **obovatum**. (Fig. 7, 8, 7 a vergr.). Blattpolster durch geschlängelt zwischen denselben verlaufende schmale Furchen von einander getrennt; Schrägzeilen leichter als die Geradzeilen bemerkbar; unterer Theil der Blattpolster umgekehrt eiförmig.

Ein kleines Stück dieser Form ist am Flusse Iset gegenüber Brod gesammelt (Fig. 8). Die Blattpolster stehen hier sehr dicht und sind oben und unten spitz. Ein etwas grösseres Stück ist von der I Linie vorhanden (Fig. 7, 7 a). Es hat an beiden Enden länger zugespitzte Blattpolster und ist fein längsstreifig. Die Narbe ist auf diesen Blattpolstern dreieckig, die Längsfurche ist doppelt S-förmig geschwungen.

c. **rimosum**. (T. III Fig. 9—15). Blattpolster meistens in Längsreihen mit einander verbunden, zwischen welchen eine runzelige Rinde zum Vorschein kommt.

Diese Form ist am Fl. Iset gegenüber Brod, von Kamenski-Sawod, von der I und VII Linie gesammelt.

Einige Stücke dieser Form schliessen sich zunächst an solche der Form a. *tessellatum* an, welche länglich-rhombische Blattpolster haben, wie Fig. 4. Hier hängen die Blattpolster bereits mit den Enden in Längszeilen zusammen, sind aber noch nicht durch runzelige Zwischenräume getrennt. Hieran schliessen sich solche Stücke, wo zwischen den Blatt-

polstern sich schmale Zwischenräume hinschlängeln. So das Stück von welchem Fig. 9 einen Theil darstellt. Es hat breit spindelförmige, in Längsreihen verbundene Blattpolster und schmale längsrunzelige Zwischenstreifen. Von einem anderen, sehr ähnlichen Stücke, welches aber mehr schmal-spindelförmige Blattpolster hat, ist ein Blattpolster Fig. 5 vergr. abgebildet. Im vorderen Theile des Blattpolsters befindet sich die deckelförmige Blattnarbe und unter derselben sind beiderseits linealische Närbchen zu erkennen. Andere zahlreiche Stücke haben weiter von einander entfernte Blattpolsterreihen. Die Grösse und Form der Blattpolster ist auf diesen Stücken nicht geringen Schwankungen unterworfen; es kommen einerseits schmal-spindelförmige Blattpolster vor (Fig. 12), andererseits auch fast leierförmige, im vorderen Theile bauchig verbreiterte (Fig. 13), und zwischen diesen Formen verschiedene Uebergänge. Meistens bilden die Blattpolster regelmässige Längszeilen und sind in dieser Richtung mit einander verbunden. Es kommt aber auch vor, dass die Längsreihen an einzelnen Stellen unterbrochen sind (Fig. 11, 12). Zwischen den Blattpolstern ist die Rindenoberfläche längsrissig und zwar urspünglich so, wie das Stück Fig. 10 zeigt, indem die Rippen und Furchen im leichten Zickzack zwischen den Blattpolstern hin und her gebogen sind. Dann treten zwischen den Furchen schiefverlaufende Verbindungen auf, wodurch die Oberfläche zwischen den Blattpolsterreihen netzig gerunzelt wird (Fig. 11, 12, 14). Die Maschen der netzig-runzeligen Rinde sind mehr oder weniger fein und kommen mehr oder weniger in Längsrichtung gestreckt vor. Die Breite der netzig-runzeligen Zwischenstreifen steht, wie aus den Abbildungen zu sehen ist, in keinem Verhältniss zur Grösse der Blattpolster.

Ein sehr eigenthümliches Rindenstück ist T. III Fig. 15 abgebildet. Es hat lang spindelförmige, an den Enden fein zugespitzte Blattpolster, welche von einander getrennt sind. Die rundliche Narbe ist, wie auch der obere Theil der Blattpolster, ein wenig undeutlich; auf dem unteren Theile der Blattpolster ist ein deutlicher Mittelkiel vorhanden. Die Rindenoberfläche zwischen den Blattpolstern ist fein längsrunzelig. Im Ganzen erinnert dieses Stück sehr an *Lepidodendron rimosum* Sternb.

d. **sigillariiforme.** Rindenoberfläche meistens längsgefurcht; Blattpolster meistens von einander getrennt, zwischen den Furchen Längszeilen bildend. (T. III Fig. 16 — 19. T. IV Fig. 1 — 4).

Mit den voraus beschriebenen Formen ist diese vielfach durch Uebergänge verbunden. So zeigt z. B. das T. III. Fig. 16 abgebildete Stück noch keine Längsfurchen zwischen den Blattpolsterreihen. Die Blattpolster sind hier ganz ähnlich solchen, welche bei der Form *a. tessellatum* vorkommen (Fig. 16 a. vergr.); doch sind sie in verticale Reihen geordnet und die Reihen durch breite Zwischenräume getrennt, welche, wie bei der Form *c. rimosum* netzig-runzelig sind. Von den zu dieser Form gebrachten Stücken unterscheidet es sich durch die Form der Blattspolster, welche auch nicht miteinander verbunden sind. Durch auffallend breite Blattpolster zeichnet sich ein dem vorigen ganz ähnliches Stück aus, von welchem Fig. 19 gezeichnet ist. Der schlechten Erhaltung wegen sind auf den Zwischen-

räumen zwischen den Blattpolsterreihen keine Längsrunzeln zu sehen. Andere Stücke von der IV Linie haben deutliche Längsfurchen (Fig. 17) und dazwischen Längszeilen kleinerer und verhältnissmässig längerer Blattpolster, zwischen welchen die Rindenoberfläche fein längsrissig ist. Mehrere Stücke vom Dorfe Brod sind von letzteren sehr verschieden durch schmalspindelförmige und mit den Enden in Längsreihen verbundene Blattpolster (Fig. 18), zwischen welchen die Rinde tief gefurcht ist. Diese Furchung der Rinde unterscheidet sie von ganz ähnlichen Stücken der Form *c. rimosum.*

Hieran schliesst sich ferner ein Erhaltungszustand an, wo offenbar nicht die ursprüngliche Oberfläche des Stengels den Abdruck geliefert hat, sondern eine unter dieser liegende Gewebeschicht. Meistens ist dann die Oberfläche gröber, breiter und weniger regelmässig längsgefurcht und ausserdem mehr oder weniger grob längsrissig (T. IV Fig. 2, 3). Die Blattpolster sind dann nicht erhalten, sondern an ihrer Stelle nahe bei einander stehende längliche (Fig. 2) oder entfernter stehende kleinere Narben (Fig. 3) vorhanden. Von dieser Erhaltungsform liegen überhaupt die grössten Stücke des *Lepidodendron Glincanum* vor; z. B. ein Stück aus der IV Schachte der I Linie welches 22 cm. breit ist. Zuweilen sind die Längsfurchen fein, tief und sehr regelmässig geradlinig (Fig. 4) und an Stelle der Blattpolster kleine punctförmige Narben, welche auf den Rippen in einer Reihe stehen. Die Oberfläche ist auf diesem Stücke von der IV Linie glatt und ohne Runzeln. Endlich können auch die Längsfurchen nicht vorhanden sein; die Oberfläche erscheint glatt und zeigt nur ovale in verticale Längsreihen geordnete Narben, wie z. B. Fig. 1, von einem Stücke von der VII Linie, zeigt.

Zu erwähnen ist noch, dass auch Erhaltungszustände vorhanden sind, welche der Gattung *Knorria* ähnlich sehen. Ein Theil eines derartigen 5 cm. breiten Stückes von der VII Linie ist in Fig 5. T. IV abgebildet. Die Blattpolster sind fast lanzettförmig in Längsreihen mit einander mehr oder weniger verschmolzen, dichtstehend. Die ganze Oberfläche des Stückes ist längsstreifig. Am oberen Ende der Blattpolster ist zuweilen eine ovale Narbe zu erkennen.

Lepidophyllum minutum n. sp. T. IV Fig. 6.

Auf Thonstücken von der VII Linie liegen kleine Lepidophyllen, welche eine 3-eckige Lamina haben und am Grunde in ein Stielchen verschmälert sind; ihre Spitze scheint nicht vollständig erhalten zu sein und die Seitenecken sind zuweilen deutlich rückwärts gebogen (Fig. 6 a). Auf dem einen dieser *Lepidophyllen* ist ein schwacher Längskiel zu erkennen und am Grunde eine halbkreisförmige Linie die ein Närbchen umgiebt (Fig. 6 b).

Von den Sporangienträgern des *L. Glincanum* scheinen diese verschieden zu sein; sie erinnern am meisten an *Lepidophyllum brevifolium* Lesq.[1]).

---

1) L. Lesquereux, Coal Flora of Pensylvania, p. 447 T. LXIX Fig. 33.

Ulodendron commutatum Schmp. T. IV Fig. 7, 8.

Schimper, Traité de Paléontologie Bd. II p. 40 T. LXIII.

Sagenaria Veltheimiana Geinitz, Flora des Hainichen-Ebersdorfer und des Flöhaer Kohlenbassins p. 51 T. V Fig. 1 — 3.

Liegt in 2 Stammstücken von der VII Linie vor. Dieselben sind flachgedrückt; das grössere Stück ist 20 cm. breit und an der einen Seite 5 an der anderen 12 cm. hoch. Abgebildet ist der rechte Theil dieses Stückes. Er zeigt die abgebildete Narbe, welche länglich, 7 cm. lang und 4 cm. breit ist. Im unteren Theile der Narbe befindet sich der 1,5 cm. breite Stumpf, welcher in der Rinde zu stecken scheint und dessen vertiefte Bruchstelle von einem erhobenen Rande umgeben ist. Die Oberfläche des Stumpfes zeigt Spuren kleiner Blattpolster. Umgeben ist der Stumpf von einem muschelförmigen radial gestreiften Felde, welches im unteren Theile unkenntlich wird. Auf dem Stamme sind links neben der grossen Narbe die Blattpolster nicht erhalten, sondern nur hier und da Spuren länglicher Narben zu erkennen. Dagegen befindet sich rechts neben der grossen Narbe ein Streifen, welcher von kleinen rhombischen sich nach rechts hin schuppig deckenden Blattpolstern bedeckt ist (dieses ganz naturgetreu in der Zeichnung darzustellen ist nicht gelungen). Auf einem anderen Stücke sind an einer Stelle besser erhaltene Blattpolster zu erkennen und welche in Fig. 8. a, b, c. gezeichnet sind. Sie sind klein, rhombisch-spindelförmig, oben und unten spitz oder an der einen Stelle in Längsreihen verschmelzend (Fig. 8 a).

Nach der Ansicht mehrerer Autoren ist *Ulodendron* nur ein Erhaltungszustand von *Lepidodendron* mit 2 Reihen grosser Narben und verhältnissmässig kleinen Blattpolstern. *U. commutatum* soll zu *Lepid. Veltheimianum* gehören. Ist diese Anschauung richtig, zu der ich keine neuen Beweise beizubringen im Stande bin, so müsste unser *Ulodendron* natürlich zu *Lepidodendron Glincanum* gehören, welcher wie im Vorhergehenden bemerkt worden ist, in vielen Stücken dem *L. Veltheimianum* sehr ähnlich wird.

Stigmaria ficoides Brgt. T. IV Fig. 9 — 12.

Schimper, Traité Bd. II p. 114.

Stigmaria inaequalis Stur l. c. p. 223.

Stigmarien habe ich von der I, II, VII Linie erhalten. Von den besten Stücken sind einige Formen abgebildet. Das Stück von welchem Fig. 9 gezeichnet, ist fast 40 cm. lang und 7 cm. breit; in seiner Umgebung befinden sich zahlreiche davon ausgehende Fasern, welche auch das Gestein von den anderen Fundstellen vielfach durchsetzen. Dieses Stück zeichnet sich durch verhältnissmässig grosse, bis 0,65 cm. breite, jedoch nicht ganz gleichgrosse, Narben aus. Die Rindenoberfläche ist auf diesem Stücke nur wenig längsrunzelig. Ein anderes Stück, von welchem Fig. 12 gezeichnet, hat viel dichter stehende, nicht ganz

gleich grosse Narben und eine zwischen den Narben grob, doch nicht so regelmässig wie bei *Stigmaria undulata* Goepp., gefurchte Oberfläche. Dieses Stück stellt einen Steinkern dar. Auf dem Querbruche ist die Mittelachse mit radialen Verbindungsstreifen zu erkennen. Ein drittes Stück hat etwas weniger dicht stehende Narben (Fig. 11), zwischen welchen keine groben Furchen verlaufen; die ganze Rindenoberfläche ist jedoch in Längsrichtung fein netzig runzelig. Etwas anders ist wieder die Oberfläche eines Stückes von der II Linie beschaffen, welches von Stur mit «St. inaequalis» bezeichnet worden (Fig. 10). Es hat etwas ungleich grosse Narben und eine mehr längsrunzelige Rinde als das vorige Stück. Auf diesem Stücke befindet sich an zwei Stellen über dem äusseren Kreise der Narben ein in einem Grübchen sitzender Höcker (Fig. 10a. vergr.). Vielleicht stellt dieser Höcker eine Achselknospe der wurzelähnlichen Blätter dar?

Lycopodiaceen-Wurzeln. T. II Fig. 18, 18a.

Auf einer Platte von der VII Linie befindet sich eine feine längsgestreifte Wurzel, welche von gabelig verzweigten Nebenwurzeln besetzt ist. Ich war anfangs geneigt dies Object für einen beblätterten Czekanowskia-Ast zu halten, weil die Nebenwurzeln ganz ebenso aussehen wie die Blätter von Czekanowskia. Wie letztere sind sie gabelig verzweigt (Fig. 18a vergr.) und zeigen einen deutlichen Mittelstreifen. Aehnliche, grössere und mehr sparrig verzweigte Wurzelstücke sind mir aus der Steinkohlenformation des Donez-Gebietes bekannt.

Rhabdocarpus orientalis Eichw. T. IV Fig. 13—15.

Eichwald, *Lethaea rossica* Bd. I. p. 227. T Ia. Fig. 8.

Frucht (oder Samen) länglich, oben stumpf, am Grunde in ein Stielchen verschmälert, fein längsstreifig.

Ist ähnlich dem *Rhabdocarpus clavatus* Gein., jedoch noch kleiner.

Auf einer Platte von Kamenskaja Datscha, welche zur Eichwald'schen Sammlung gehört, liegen zusammen mit *Aneimites nanus* zahlreiche Früchte, von denen Fig. 18, 19 gezeichnet sind. Diese sind sämmtlich ohne Stiel, am einen Ende stumpf, am anderen etwas verschmälert, von fast gleicher Grösse und zeigen 2—4 Längsrippen. Ein Bruchstück einer etwas grösseren, sonst aber ähnlichen Frucht, welche mit einem Theile des Fruchtstieles versehen ist, liegt auf einem Thonstücke von der VII Linie (Fig. 15, 15a. vergr.). Die ganze Oberfläche dieser Früchte ist fein längsstreifig.

Schuppen von Coniferenzapfen.

Auf einer Thonplatte von der VII Linie liegt der erhabene und sehr scharf umschriebene Abdruck einer Schuppe (T II Fig. 17), welche gewiss holzig gewesen ist. Sie hat einen

fast kreisförmigen Umriss und ist in 5 Lappen eingeschnitten, von welchen die seitlichen rückwärts gebogen sind und einen tiefen Ausschnitt umgeben in welchem der abgebrochene Stumpf eines Stielchens zu sehen ist. Am Aussenrande hat jeder Lappen 2 — 3 Einkerbungen. Vom Stielchen aus verlaufen scharf ausgedrückte mehrmals gabelig sich theilende Nerven in die Lappen.

Vielleicht gehört diese Schuppe zu einem Vorläufer der Gattung Voltzia.

Auf einer anderen Platte von der VII Linie liegen die Taf. IV Fig. 16, a — c abgebildeten Schüppchen. Sie sind länglich-umgekehrt-eiförmig, zuweilen auch fast lanzettlich (Fig. 16 d), haben einen Längskiel, welcher aber auf dem Fig. 16 c abgebildeten Schüppchen fehlt, und zeigen zuweilen an ihrem breiteren Ende ein Grübchen (Fig. 16 a, b ist dieselbe Schuppe vergr.). In Fig. 16 c scheint das stumpfe Ende des Schüppchens eingekrümmt zu sein.

Diese Schüppchen könnten zur Gattung Walchia gehören.

Auf einer Schieferthonplatte vom Dorfe Brod, welche zur Kasan'schen Sammlung gehört, befindet sich ein Stengelstück (T. II Fig. 19) mit entfernt stehenden in sich kreuzenden Schrägzeilen angeordneten ovalen Närbchen und eigenthümlich sparrig abstehenden, an der stumpfen Spitze etwas verdickten Fortsätzen. Die Oberfläche des Stengels ist fein längsstreifig. Ueber die Zugehörigkeit desselben vermag ich keine Vermuthung auszusprechen.

Erklärung der Abbildungen.

(Wo der Besitzer nicht genannt ist gehört der Gegenstand dem Berginstitute in St. Petersburg.)

Tafel I.

Fig. 1 — 5. *Sphenopteris rutaefolia* Eichw. sp. 1. Kamenskaja Datscha; Eichwalds Sammlung. 2. VII Linie 2 a Fiederchen vergr. 3. I Linie; auf derselben Platte befindet sich die Fig. 4 abgebildete Schuppe. 5. Blattspindel vom Dorfe Brod; Kasansche Sammlung.

Fig. 6 — 9. *Aneimites nanus* Eichw. sp. 6 und 9 Kamenskaja Datscha; Eichwalds Sammlung. 7 und 8 vom Fl. Iset gegenüber Brod.

Fig. 10 — 15. *Aneimites nanus* var. *minor*. Fig. 10 — 14 vom Fl. Iset gegenüber Brod. Fig. 15 VII Linie.

Fig. 16 — 18. *Aneimites nanus* var. *cuneifolia* von der VII Linie.

Fig. 19. *Neuropteris heterophylla* Brgt.? Von der VII Linie.

Fig. 20. *Neuropteris parvula* n. sp. VII Linie.

Tafel II.

Fig. 1. *Lepidodendron Glincanum* Eichw. sp.? Vom Fl. Lunja; Kasan'sche Sammlung.

Fig. 2. *Asterophyllites Karpinskii* n. sp. I Linie.

Fig. 3, 4. *Sphenophyllum Schlotheimi* Brgt. var. *brevifolia*. VII Linie.

Fig. 5 — 16. *Lepidodendron Glincanum* Eichw. sp. 5. VII Linie. 6. I Linie; 7, 8. Vom Fl. Iset gegenüber Brod; 9. IV Linie. 10. I Linie. 11 — 16. I Linie.

Fig. 17. *Coniferen-Schuppe*. VII Linie. (*Voltzia?*).

Fig. 18. *Lycopodiaceen-Wurzel*. 18 a eine Nebenwurzel vergr. VII Linie.

Fig. 19. *Stengelstück* vom Dorfe Brod; Kasan'sche Sammlung.

Tafel III. Lepidodendron Glincanum.

Fig. 1 — 4, 6. var. *tessellata*. 1 — 3 von der VII Linie. 4 von der II Linie; 6 vom Fl. Iset gegenüber Brod; 3 a Blattpolster vergr.

Fig. 7, 8. var. *obovata*. 7 von der I Linie; 8 vom Fl. Iset gegenüber Brod; 7 a Blattpolster vergr.

Fig. 5, 9 — 15. var. *rimosa*. Vom Fl. Iset gegenüber Brod. 9. Kasan'sche Sammlung. 5 Blattpolster vergr.

Fig. 16 — 19. var. *sigillariiformis*. 16, 17, 19 von der IV Linie, 18 vom Fl. Iset gegenüber Brod. 16 a Blattpolster vergr.

Tafel IV.

Fig. 1 — 5. *Lepidodendron Glincanum*. 1 — 4 var. *sigillariiformis*. 1 von der VII Linie. 2 vom Fl. Iset gegenüber Brod. 3, 4 von der IV Linie. 5. *Knorria*-Form von der VII Linie.

Fig. 6. *Lepidophyllum minutum* n. sp. VII Linie.

Fig. 7, 8. *Ulodendron commutatum* Schimp. VII Linie.

Fig. 9 — 12. *Stigmaria ficoides* Brgt. 9 von der I Linie. 10 von der II Linie; 11, 12 von der VII Linie; 12 erinnert an *S. undulata* Goepp. 10 a vergr.

Fig. 13 — 15. *Rhabdocarpus orientalis* Eichw. 13, 14 von Kamenskaja Datscha aus Eichwalds Sammlung. 14 a eine Frucht vergr. 15 von der VII Linie. 15 a vergr.

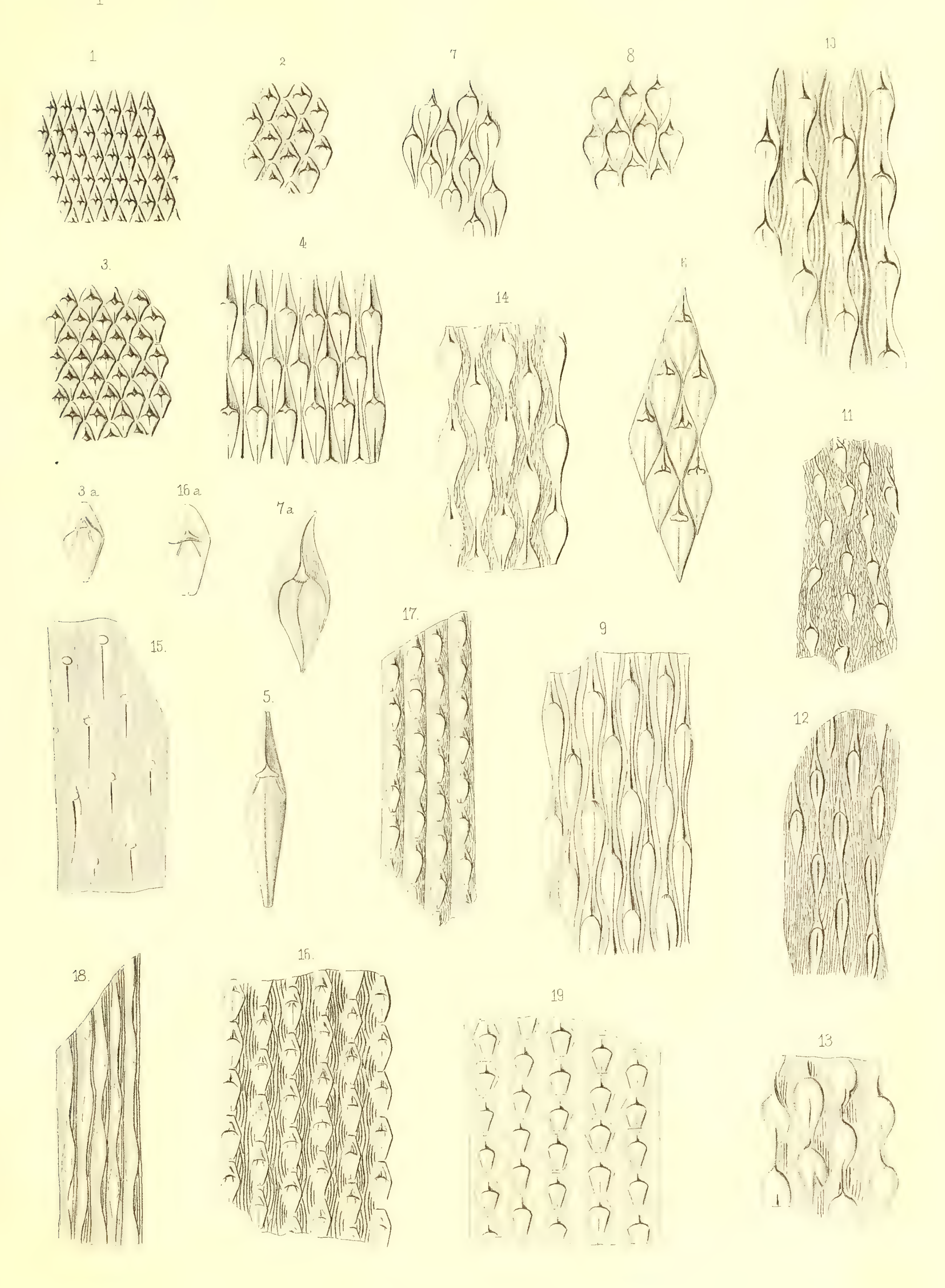
Fig. 16. *Coniferen-Schüppchen* von der VII Linie. 16 b. vergr. (*Walchia?*)



Fig. 1–5 Sphenopteris rutaefolia. 6–9 Aneimites nanus. 10–15 An. nanus var. minor. 16–18 An. nanus var. cuneifolius 19 Neuropteris heterophylla? 20 Neuropteris parvula.



Fig. 1, 5–16 Lepidodendron Glincanum. 2 Asterophyllites Karpinskii. 3–4 Sphenophyllum Schlotheimi var. brevifolium



Lepidodendron Glincanum.

Fig. 1, 4, 6 var. tessellatum. 7, 8 var. obovatum. 5, 9–15 var. rimosum. 16–19 var. sigillariiforme

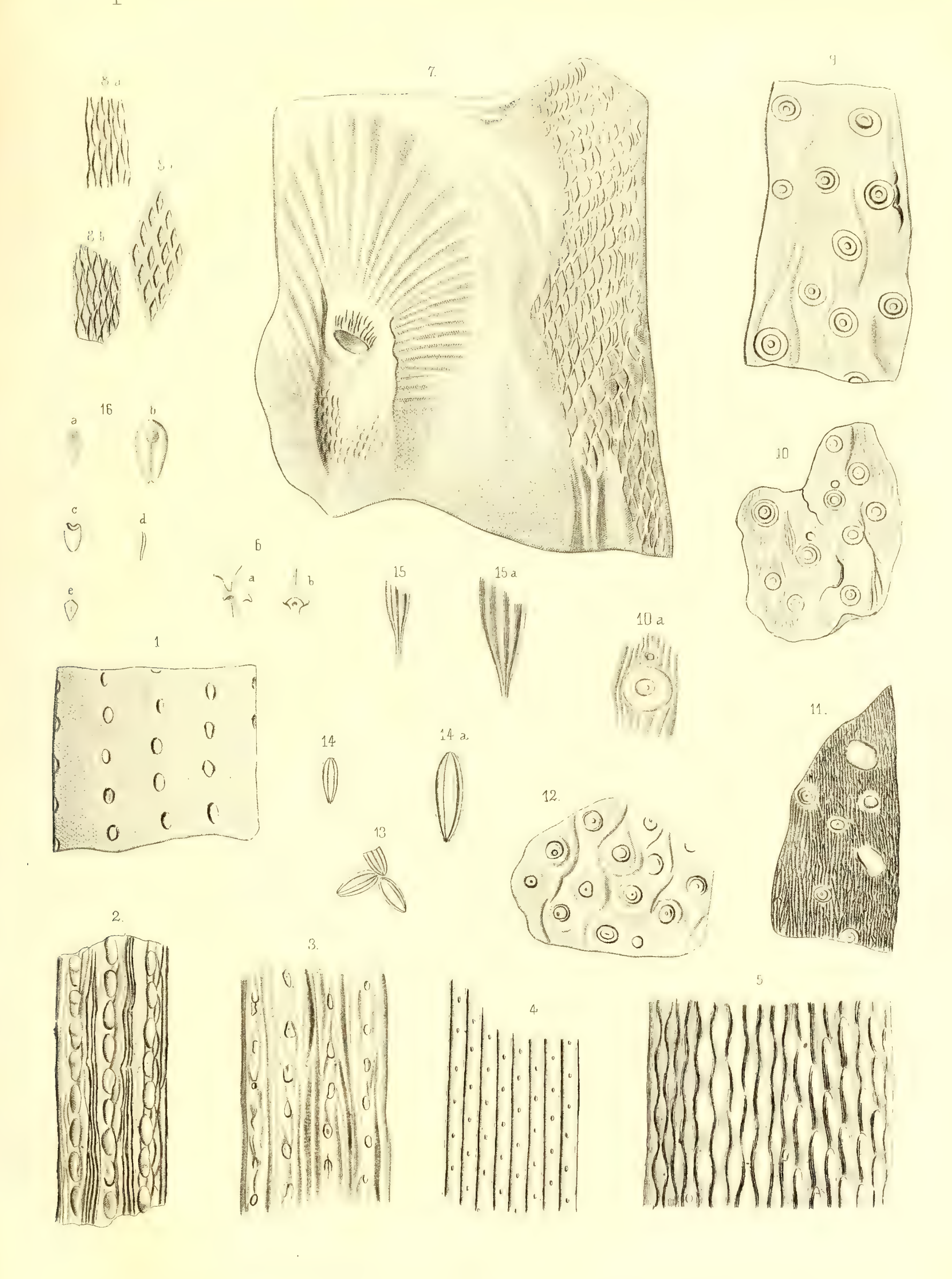


Fig. 1–5 Lepidodendron Glincanum. 6 Lepidophyllum minutum. 7–8 Ulodendron commutatum. 9–12 Stigmaria ficoides. 13–15 Rhabdocarpus orientalis. 16 Walchia?

Ouvrages paléontologiques publiés dans la VII. Série des Mémoires de l'Académie Impériale des sciences.

T. VI, № 2. **Volborth, A. v.** Ueber die mit glatten Rumpfgliedern versehenen russischen Trilobiten, nebst einem Anhange über die Bewegungsorgane und über das Herz derselben. 1863. Mit 4 lith. Taf. Pr. 80 K. = 2 Mk. 70 Pf.

T. VIII, № 9. **Volborth, A. v.** Ueber einige neue Ehstländische Illaenen. 1864. Mit 2 lith. Taf. Pr. 35 K. = 1 Mk. 20 Pf.

T. XVI, № 2. **Volborth, A. v.** Ueber Achradocystites und Cystoblastus, zwei neue Crinoideen-Gattungen, eingeleitet durch kritische Betrachtungen über die Organe der Cystideen. 1870. Mit 1 lith. Taf. Pr. 30 K. = 1 Mk.

№ 11. **Brandt, A.** Ueber fossile Medusen. 1871. Mit 2 Taf. Pr. 45 K. = 1 Mk. 50 Pf.

T. XIX, № 3. **Schmidt, F.** Ueber die Petrefacten der Kreideformation von der Insel Sachalin. 1873. Mit 8 Taf. Abbildungen. Pr. 1 R. 10 K. = 3 Mk. 70 Pf.

T. XXI, № 2. **Schmidt, F.** Miscellanea Silurica. I. Ueber die russischen silurischen Leperditien, mit Hinzuziehung einiger Arten aus den Nachbarländern. 1873. Mit 1 Taf. Pr. 35 K. = 1 Mk. 20 Pf.

№ 11. **Schmidt, F.** Miscellanea Silurica. II. Ueber einige neue und wenig bekannte baltisch-silurische Petrefacten. 1874. Mit 4 Taf. Abbildungen. Pr. 80 K. = 2 Mk. 70 Pf.

T. XXII, № 12. **Heer, O.** Beiträge zur Jura-Flora Ostsibiriens und des Amurlandes. 1876. Mit 31 Taf. Pr. 5 R. 50 K. = 18 Mk. 30 Pf

T. XXIV, № 8. **Pahlen, A. v. d.** Monographie der baltisch-silurischen Arten der Brachiopoden-Gattung Orthisina. 1877. Avec 4 pl. Pr. 80 K. = 2 Mk. 70 Pf.

T. XXV, № 6. **Heer, O.** Beiträge zur fossilen Flora Sibiriens und des Amurlandes. 1878. Avec 15 pl. Pr. 3 R. 20 K. = 10 Mk. 70 Pf.

№ 7. **Heer, O.** Primitiae florae fossilis Sachalinensis.— Miocäne Flora der Insel Sachalin. 1878. Avec 15 pl. Pr. 3 R. 20 K. = 10 Mk. 70 Pf.

№ 9. **Möller, V. v.** Die spiral-gewundenen Foraminiferen des russischen Kohlenkalks. 1878. Avec 15 pl. Pr. 2 R. 50 K. = 8 Mk. 30 Pf.

T. XXVII, № 4. **Schmalhausen, J.** Beiträge zur Jura-Flora Russlands. 1879. Avec 16 pl. Pr. 2 R. 20 K. = 7 Mk. 30 Pf.

№ 5. **Möller, V. v.** Die Foraminiferen des russischen Kohlenkalks. 1879. Avec 7 pl. Pr. 1 R. 70 K. = 5 Mk. 70 Pf.

№ 10. **Heer, Prof. Dr. Osw.** Nachträge zur Jura-Flora Sibiriens gegründet auf die von Herrn Richard Maak in Ust-Balei gesammelten Pflanzen. 1880. Mit 9 Tafeln. Pr. 1 R. 30 K. = 4 Mk. 30 Pf.

T. XXVIII, № 5. **Nikitin S.** Die Jura-Ablagerungen zwischen Rybinsk, Mologa und Myschkin an der oberen Wolga. 1881. Mit 7 Tafeln. Pr. 1 R. 40 K. = 4 Mk. 70 Pf.

№ 8. **Kiprijanoff, W.** Studien über die fossilen Reptilien Russlands. I. Theil. Gattung Ichthyosaurus König aus dem Severischen Sandstein oder Osteolith der Kreide-Gruppe. 1881. Mit 19 Tafeln. Pr. 2 R. 45 K. = 8 Mk. 20 Pf.

T. XXX, № 1. **Schmidt, F.** Revision der ostbaltischen silurischen Trilobiten nebst geognostischer Uebersicht des ostbaltischen Silurgebiets. Abtheilung I. Phacopiden, Cheiruriden und Encrinuriden. 1881. Mit 16 Tafeln. Pr. 4 R 50 K. = 15 Mk.

№ 6. **Kiprijanoff, W.** Studien über die fossilen Reptilien Russlands. II. Theil. Gattung Plesiosaurus Conybeare aus dem Severischen Sandstein oder Osteolith der Kreide-Gruppe. 1882. Mit 19 Tafeln. Pr. 2 R. = 6 Mk. 70 Pf.

T. XXXI, № 5. **Schmidt, Fr.** Miscellanea Silurica. III. I. Nachtrag zur Monographie der russischen silurischen Leperditien. II. Die Crustaceenfauna der Eurypterenschichten von Rootziküll auf Oesel. 1883. Mit 9 Tafeln. Pr. 2 R. = 6 Mk. 70 Pf.

№ 6. **Kiprijanoff, W.** Studien über die fossilen Reptilien Russlands. III. Theil. Gruppe. Thaumatosauria N. aus der Kreide-Formation und dem Moskauer Jura. 1883. Mit 21 Tafeln. Pr. 2 R. 25 K. = 7 Mk. 50 Pf.

№ 7. **Kiprijanoff, W.** Studien über die fossilen Reptilien Russlands. IV. Theil. Ordnung Crocodilina Oppel. Indeterminirte fossile Reptilien. 1883. Pr. 90 K. = 3 Mk.

Imprimé par ordre de l'Académie Impériale des sciences. Novembre, 1883 C. Vessélofsky, Secrétaire perpétuel.

Imprimerie de l'Académie Impériale des sciences. (Vass.-Ostr., 9e ligne, № 12.)

MÉMOIRES
DE
L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES DE ST.-PÉTERSBOURG, VII[E] SÉRIE.
TOME XXXI, N° 14.

UNTERSUCHUNGEN

ÜBER

DAS ZWEITE SPECTRUM DES WASSERSTOFFS

VON

Dr. B. Hasselberg.

Zweite Abhandlung.

Avec 2 planches.

(Lu le 10 mai 1883.)

ST.-PÉTERSBOURG, 1883.
Commissionnaires de l'Académie Impériale des sciences:

à St.-Pétersbourg: MM. Eggers et C[ie] et J. Glasounof;
à Riga: M. N. Kymmel;
à Leipzig: Voss' Sortiment (G. Haessel).

Prix: 50 Kop. 1 Mark. 70 Pf.

MÉMOIRES

DE

L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES DE ST.-PÉTERSBOURG, VIIE SÉRIE.

Tome XXXI, N° 14.

UNTERSUCHUNGEN

ÜBER

DAS ZWEITE SPECTRUM DES WASSERSTOFFS

VON

Dr. B. Hasselberg.

Zweite Abhandlung.

Avec 2 planches.

(*Lu le 10 mai 1883.*)

St.-PÉTERSBOURG, 1883.

Commissionnaires de l'Académie Impériale des sciences:

à St.-Pétersbourg: MM. Eggers et Cie et J. Glasounof;

à Riga: M. N. Kymmel;

à Leipzig: Voss' Sortiment (G. Haessel).

Prix: 50 Kop. 1 Mark. 70 Pf.

Imprimé par ordre de l'Académie Impériale des sciences.
Novembre, 1883. C. Vessélofsky, Secrétaire perpétuel

Imprimerie de l'Académie Impériale des sciences.
(Vass.-Ostr., 9 ligne, № 12.)

Mit den Untersuchungen über das zweite Spectrum des Wasserstoffs, welche ich vor Kurzem der Akademie vorzulegen die Ehre hatte[1]), war es ursprünglich meine Absicht, meine Studien über die Spectralverhältnisse dieses Gases als wenigstens vorläufig abgeschlossen zu betrachten. Diese Untersuchungen nebst anderen, früher von mir in den Schriften der Akademie publicirten[2]), berühren nämlich fast sämmtliche bis jetzt zweifelhafte Punkte der Spectroskopie des Gases und enthalten Alles, was mit den mir damals zur Disposition stehenden Mitteln der Beobachtung zugänglich gemacht werden konnte. In derselben Zeit aber, in welcher die obenerwähnten Untersuchungen abgeschlossen wurden, gelangte das hiesige astrophysikalische Laboratorium in Besitz eines sehr kräftigen Spectralapparats von Prazmowski in Paris, dem für die Beobachtung der brechbareren Spectraltheile, welche durch die bedeutende Masse gelblichen Flintglases des Apparates sehr stark geschwächt werden, zwei mit Schwefelkohlenstoff zu füllende Hohlprismen beigegeben sind. — Einige vorläufige Versuche zeigten nun bald, dass den vorzüglichen Eigenschaften des Apparats in optischer Beziehung die Ausführung einzelner mechanischer Theile nicht ganz befriedigend entsprach, indem der Spalt und die Mikrometerschraube zuerst eine genaue Revision erheischten, um mit dem Instrument das erlangen zu können, was es bei seiner optischen Kraft zu leisten bestimmt war, und da diese Verbesserungen bisjetzt vom Künstler nicht ausgeführt sind, so wurden unterdessen die Hohlprismen in Bezug auf ihre Leistungsfähigkeit einer genauen Prüfung unterzogen. Das Resultat dieser Prüfung war ein überraschend gutes. Die Prismen sind in der That von so vorzüglicher Vollkommenheit und liefern bei sehr grosser Dispersion Spectra von so ausnehmender Reinheit, Schönheit und Detailreichthum, dass sie vielfach die Bewunderung derer erweckt haben, welche die Leistungen derselben kennen zu lernen Gelegenheit gehabt haben. Es war nun natürlich, dass unter den vielen Spectra, welche versuchsweise mit diesen Prismen erzeugt wurden, vor Allem

1) Mém. de l'Acad., T. XXX., № 7.

2) Bull. de l'Acad., T. XXVII, p. 97 und 405.

dasjenige, mit dem ich mich kurz vorher beschäftigt hatte, nämlich das zweite Spectrum des Wasserstoffs angesehen wurde, und da dasselbe dabei in einer Vollkommenheit und mit einem Reichthum an Einzelheiten auftrat, der meine frühere Zeichnung nur als eine Skizze erscheinen liess, so entschloss ich mich bald eine neue Durchmusterung desselben vorzunehmen, um so mehr, als einige gleichzeitig angestellte Messungen an engen und in gewöhnlichen Apparaten schwierigen Gruppen des Sonnenspectrums mich von der Erreichbarkeit einer beträchtlichen Genauigkeit der relativen Wellenlängenbestimmungen überzeugt hatten. Diese Genauigkeit, wenn auch für Spectra künstlicher Lichtquellen nicht völlig so gross wie für das Sonnenspectrum, ist jedoch, insofern sie nur von den Mikrometermessungen abhängt, um ein Namhaftes grösser als diejenige, welche selbst den absoluten Bestimmungen Ångström's zugeschrieben werden kann; natürlich nur relativ genommen, da die absoluten Wellenlängen offenbar keine grössere Sicherheit erreichen können, als diejenige der zu Grunde gelegten Linien des Sonnenspectrums. Wenn demnach wohl behauptet werden darf, dass von allen bis jetzt gemessenen Spectra künstlicher Lichtquellen dasjenige des Wasserstoffs durch diese Messungen am genauesten bekannt ist, so dürfte die Bekanntmachung der in der That sehr reichhaltigen Resultate wohl auf das Interesse der Spectroskopisten rechnen können.

Um indessen zu diesen Resultaten zu gelangen, ist es nothwendig geworden, sowohl die Beobachtungen als deren Reduction in etwas anderer Weise auszuführen, als es bei weniger kräftigen Apparaten gewöhnlich geschieht, bei denen von so weit getriebener Genauigkeit abgesehen werden muss. Was ein derartiges verändertes Verfahren in erster Linie unumgänglich macht, ist die überaus grosse Empfindlichkeit des Schwefelkohlenstoffs selbst gegen die kleinsten Aenderungen der Temperatur, eine Empfindlichkeit, die in der That die Anwendung der Prismen für feinere Messungen mir anfangs unmöglich erscheinen liess. Ich machte in dieser Beziehung allerdings keine neue Erfahrung; — schon vor Jahren hat Gassiot[1]) dasselbe gefunden und es ist ohne Zweifel darin der Grund zu suchen, wesshalb die sonstigen guten Eigenschaften solcher Prismen in der messenden Spectroskopie bis jetzt keine Verwerthung gefunden haben. Indessen lässt sich diese Schwierigkeit bei geeigneter Behandlung des Apparats befriedigend überwinden; Bedingung ist nur eine möglichst constante, oder wenigstens stetig innerhalb enger Grenzen sich ändernde Temperatur des Beobachtungszimmers, sowie absolute Ruhe des Apparats. Die kleinste Erschütterung ist nämlich genügend, um auf die Reinheit des Spectrums einen ebenso nachtheiligen, wenn auch nicht so lange andauernden Einfluss auszuüben, wie eine plötzliche Veränderung der Temperatur. Nur bei fester Aufstellung lässt sich demnach ein aus solchen Prismen gebauter Spectralapparat benutzen; — auf Objecte des Himmels kann derselbe nur in Verbindung mit einem

1) Rep. of the Brit. Assoc. 1864. (Bath). Notices a. Abstracts p. 11. Rutherfurd. Sill. Journal, Vol. XXXIX, p. 129. Die dort erwähnte Lagerung des Schwefelkohlenstoffs in Schichten von verschiedener Dichtigkeit ist bei meinen Prismen nie vorgekommen. Die Spectrallinien haben niemals auch die kleinste Krümmung gezeigt. —

horizontal aufgestellten und mit einem Siderostaten verbundenen Refractor Anwendung finden.

In meinem Spectralzimmer habe ich nun nach Möglichkeit die Herstellung der oben genannten Bedingungen angestrebt. Die mittlere Temperatur desselben ist ziemlich constant, etwa 17° bis 18° C. gewesen, und da dieselbe Temperatur auch im Winter, ohne directe Heizung von den umliegenden Zimmern aus unterhalten wird, so finden die Temperaturänderungen nur sehr allmählich statt. Dasselbe gilt von den im Sommer wegen Bestrahlung des verschlossenen Fensterladens durch die Sonne entstehenden Aenderungen der Temperatur. Darauf glaube ich die Berechtigung der weiter unten beschriebenen Art den Einfluss der Temperatur auf die Messungen zu berücksichtigen begründen zu können, um so mehr als in dieser Weise eine vorzügliche Uebereinstimmung der Beobachtungen unter einander wirklich erzielt worden ist.

1. Beschreibung der Apparate.

Die Construction der Hohlprismen ist die gewöhnliche Rutherfurd'sche; sie bestehen also aus einem mittleren rechtwinkligen Prisma mit einer ovalen etwa 45^{mm} hohen und 25^{mm} breiten Durchbohrung, die als Hohlraum für die Aufnahme des Schwefelkohlenstoffs dient und deren seitlicher Verschluss von zwei umgekehrt gestellten, spitzen Crownglasprismen gebildet wird. Da der brechende Winkel dieser Prismen etwa 40° beträgt, so erhält der ganze Körper des zusammengesetzten Prismas dadurch eine beinahe parallelipipedische Gestalt. Die Länge der Hypothenuse des mittleren Prismas beträgt beiläufig 80^{mm} und die Höhe derselben 45^{mm}. Diese Construction bietet den nicht unwesentlichen Vortheil einer beinahe senkrechten Stellung der einfallenden und austretenden Strahlen zu den resp. Prismenflächen, wodurch der Lichtverlust durch Reflexion auf ein Minimum reducirt wird. Die grosse Helligkeit, die sogar die blauen und violetten Theile des Spectrums auszeichnet, und welche, trotz der bedeutenden, in dieser Gegend wohl derjenigen von 8 gewöhnlichen Flintglasprismen gleichkommenden Dispersion, die Messungen bis nahe an die *H*-Linien auszudehnen gestattet, wird zum Theil darin seinen Grund haben. Hauptsächlich wird aber diese Helligkeit jedoch der grossen Diaphanität des Crownglases und des Schwefelkohlenstoffs zugeschrieben werden müssen. Den besten Beweis für die ausserordentliche Durchsichtigkeit der Prismen liefern indessen die hier zu beschreibenden Beobachtungen selbst. Jedem, der mit den spectroskopischen Erscheinungen des Wasserstoffs vertraut ist, ist die relative Schwäche des zweiten Spectrums desselben wohl bekannt, aber nichts destoweniger ist es mir nie erforderlich gewesen, für die Beobachtung auch der lichtärmsten Theile des Gasspectrums, eine weitere Spaltöffnung zu benutzen, als für diejenige des Sonnenspectrums, in welchem dabei die meisten der im Vogel'schen Atlas aufgenommenen Linien deutlich

gesehen werden konnten. Der Contrast mit dem Hauptapparat in dieser Beziehung ist enorm; beim letzteren beginnt die Schwächung durch Absorption schon bei *F* bemerkbar zu werden und macht jede Beobachtung jenseits *G* unmöglich.

Ein Umstand, über den vielfach geklagt worden ist, und welcher manche Beobachter auf die Anwendung der Schwefelkohlenstoffprismen überhaupt Verzicht zu leisten bewogen hat, ist die angebliche Schwierigkeit ein Verkittungsmittel zu finden, welches einen absoluten Verschluss der Prismen gewährt. Von dieser Schwierigkeit habe ich nichts verspürt, indem ich nach der Vorschrift des Herrn Prazmowski die Seitenprismen einfach mit dicker Lösung von Gummi arabicum in Wasser an den mittleren Block ankittete. Bei sorgfältigem Operiren lässt sich damit ein vollkommen befriedigender Verschluss erzielen, der in der That bei meinen Prismen so gut ausgefallen ist, dass nach mehr als halbjährigem Gebrauch keine Vergrösserung der im Hohlraume nach dem Füllen übriggebliebenen kleinen Luftblase zu bemerken ist. Nothwendig ist dabei nur ein gleichmässiges Auftragen der Gummilösung, so dass in der Schicht nach Aufsetzen der Seitenprismen keine Luftkanäle zurückbleiben. Ebensowenig ist irgend eine Trübung der inneren Flächen durch etwa aus dem Schwefelkohlenstoffe ausgeschiedene Stoffe bemerkbar. Dieser Uebelstand, der anderen Beobachtern begegnet sein soll, wird wahrscheinlich entweder in der Anwendung eines nicht vollkommen reinen Schwefelkohlenstoffs, oder eines Kittes, auf den die Flüssigkeit lösend wirkt, seinen Grund gehabt haben.

Das Spectroskop, welches ich aus diesen Prismen aufgebaut habe, ist aus disponiblen Theilen verschiedener anderer Apparate zusammengestellt. Von dem kleinen Steinheil'schen Spectroskop, welches zu meinen früheren Beobachtungen diente, wurde Alles bis auf den Collimator abgenommen und auf dem Kreise desselben eine mattgeschliffene, ebene Glasscheibe durch ein Paar Klemmschrauben befestigt. Auf diese Scheibe wurden die Prismen gestellt und, nachdem die der kleinsten Deviation der mittleren Strahlen im Spectrum entsprechende Stellung gefunden war, in dieser Lage mit Gummilösung festgestellt. Eine derartige Befestigung in einer gewissen Stellung erwies sich als vollkommen zulässig, da auch diejenigen Spectraltheile, welche am meisten von der Lage der kleinsten Deviation abweichen, in keiner Weise merkbar dadurch an Schärfe und Reinheit eingebüsst haben. Man hat dadurch ausserdem den nicht zu unterschätzenden Vortheil, dass die Dispersionscurve ein Continuum für das ganze Spectrum bildet und dass es folglich möglich ist, die Reductionsfactoren auf Wellenlängen durch ein einziges Coefficientensystem darzustellen.

Das Beobachtungsfernrohr von Merz, Utzschneider und Fraunhofer hatte bei einer Oeffnung von 65^{mm} eine Brennweite von 81,1 Centimeter und gab mit den beiden Ocularen des Mikrometers die beiden Vergrösserungen 34 und 61. — Dasselbe wurde auf einem besonders zu diesem Zweck aus Holz construirten, soliden tischähnlichen Stativ derart aufgestellt, dass die optische Axe möglichst nahe in derselben Ebene zu liegen kam, wie die Mittelpunkte der Prismen. Die Platte des Tisches hat die Form eines der Dispersion der Prismen entsprechenden Sectors, auf welchem ein, wie eine Alhidade beweglicher Holz-

leisten sich befindet, der seinerseits in zwei soliden Fassungen das Fernrohr trägt. Das Stativ ist so neben den übrigen Theilen des Apparats auf dem Arbeitstisch aufgestellt, dass der Drehungspunkt des Fernrohrs etwa unter die Mitte des zweiten Prismas fällt, wodurch jeder beliebige Theil des Spectrums ins Gesichtsfeld gebracht werden kann. Durch eine Klemmschraube kann der Holzleisten, und mit ihm das Fernrohr, an der oberen Platte des Stativs festgeklemmt werden, und da ausserdem die untere Platte durch schwere Gewichte beladen ist, so lässt sich eine sogar für die Mikrometermessungen vollkommen genügende Stabilität des Ganzen erzielen.

Der Mikrometerapparat ist derselbe, welcher in Verbindung mit dem kleinen Steinheil'schen Spectroskope zu meinen früheren Messungen benutzt wurde. Derselbe besitzt zwei Stahlspitzen, von denen die eine fest ist und zur Controle der unveränderten Lage des Fernrohrs während der Messung dient, während die zweite mittelst der Schraube zum Einstellen auf die Linien des Spectrums benutzt wird. Die Steighöhe der Schraube beträgt 0.30^{mm} und demzufolge der Winkelwerth einer Umdrehung: $77''$.

Bei meinen früheren Messungen des Spectrums hatte ich wegen der kleinen damals benutzten Dispersion keine Veranlassung, die Fehler der Schraube zu berücksichtigen; im gegenwärtigen Falle war dies ohne Weiteres nicht zulässig. Da hier häufig Abstände von mehreren Umdrehungen gemessen wurden, so waren dabei vor Allem die fortschreitenden Fehler näher ins Auge zu fassen, die, wenn in grösserem Maasse vorhanden, die zu bestimmenden Wellenlängen leicht um Grössen hätten beeinflussen können, welche die sonst erreichbare Genauigkeit erheblich herabgesetzt hätten. — Eine hierauf bezügliche Untersuchung der Schraube hat indessen gezeigt, dass diese Fehler ganz verschwindend sind und keiner Berücksichtigung bedürfen. — Ebensowenig ist es nöthig gewesen, die periodischen Fehler näher zu ermitteln und zwar aus dem Grunde, dass dieselben bei der Beobachtung dadurch eliminirt werden, dass der Ausgangspunkt bei den einzelnen Messungen durch die immer stattfindenden auf Temperaturvariationen der Prismen beruhenden Verschiebungen des Spectrums, einer stetigen Ortsveränderung unterworfen ist.

Die einfache, man würde beinahe sagen können, primitive Einrichtung dieses Spectralapparats, würde vielleicht Manchem die Meinung einflössen können, dass derselbe zu feineren Messungen wenig geeignet sein dürfte. Dass dem nicht so ist, werden die in dieser Abhandlung weiter unten zu gebenden Messungen zur Genüge darthun; um aber schon hier einer derartigen Vorstellung entgegenzutreten und zugleich um von der auflösenden Kraft der Prismen eine Idee zu geben, mögen als Beispiel die Resultate der Messungen von zwei Gruppen des Sonnenspectrums aufgeführt werden, nebst den entsprechenden Werthen nach Ångström und Vogel.

A. Gruppe im Gelben.

Hauptlinien: $\begin{cases} \lambda = 5585,55 \\ = 5601,70 \end{cases}$

H	*Å*	*H — Å*
5586,60	5586,65	—0,05
87,64	87,62	+0,02
89,02	89,03	—0,01
91,10	91,18	—0,08
92,81	92,62	+0,19
93,57	93,42	+0,15
97,32	97,17	+0,15
98,95	98,92	+0,03
5600,24	5600,21	+0,03

B. Gruppe im Blauen.

Hauptlinien: $\begin{cases} \lambda = 4977,80 \\ = 4988,32 \end{cases}$

H	*Å*	*V*	*H — Å*	*H — V*
4779,45	4779,62	4779,61	—0,17	—0,16
81,05	82,03	81,08	+0,02	—0,03
81,78 }	81,82	{ 81,83	+0,12	—0,05
82,11 }		{ 82,10		+0,01
82,59	82,59	82,57	0,00	+0,02
83,19 }	83,31	83,17	—0,02	+0,12
83,39 }				
83,97	—	83,80		+0,17
84,57 }	84,70	{ 84,44	+0,01	+0,13
84,85 }		{ 84,76		+0,09
85,51	—	85,37		+0,14
4786,18	—	4786,01		+0,17

Bei diesen Messungen ist die stärkere Vergrösserung angewandt worden. Für die Beobachtung anderer Spectra als des Sonnenspectrums hat sich indessen die schwächere als vortheilhafter erwiesen und ist die stärkere nur gelegentlich, um z. B. eine vermuthete Duplicität zu entscheiden, benutzt worden. Aus den angeführten Zahlen geht nun die Erreichbarkeit einer erheblichen Schärfe der Messungen deutlich hervor, sowie auch, dass die auflösende Kraft des Apparats kaum was zu wünschen übrig lässt.

Die zur Herstellung des Wasserstoffspectrums benutzten Spectralröhren hatten alle die in meiner früheren Abhandlung p. 15 beschriebene Form, indem an das eine Ende der Ca-

pillare ein zu derselben senkrechter weiter Cylinder angeschmolzen war, während eine von dem zweiten, an das andere Ende angebrachten Cylinder seitwärts ausgehende Röhre die Verbindung mit der Luftpumpe vermittelt. Den Hahn, welcher früher zum Verschliessen dieser Seitenröhre nach beendigtem Füllen benutzt wurde, habe ich bei diesen Versuchen meistens weggelassen und statt dessen die Röhre einfach durch Abschmelzen von der Pumpe getrennt. — Wie gut nämlich solche Hähne auch gearbeitet sein mögen, für länger andauernde Beobachtungsreihen kann man sich jedoch nie völlig auf sie verlassen und im gegenwärtigen Falle ist das Eindringen auch nur der mindesten Spur von Luft genügend, um die feineren Details des Spectrums zu verwischen. Wie verschwindend klein die hierzu nöthige Luftmenge ist, habe ich an einer Röhre beobachten können, welche nach wochenlangem Gebrauche durch die Hitze der Entladung plötzlich einen beinahe mikroskopischen Riss bekam. Das Spectrum änderte augenblicklich sein Aussehen und zwar dermaassen, dass jede weitere Benutzung der Röhre unmöglich wurde, wobei indessen der Riss so klein war, dass nach mehr als einer Woche der Widerstand der Röhre noch kleiner war, als derjenige einer 10^{mm} langen Luftstrecke von gewöhnlichem Druck. Aber auch das Abschmelzen der Röhre ist häufig mit erheblicher Schwierigkeit verbunden, indem bei der hohen Verdünnung des Gases von 1 bis 2 Mm., welche zur Erzielung einer möglichst grossen Helligkeit des Spectrums nöthig ist, die äussere Luft dabei sehr leicht in die Röhre eindringt und dieselbe unbrauchbar macht. Ich habe auch demnach neuerdings die Verbindung der Röhre mit der Luftpumpe derart eingerichtet, dass das Abschmelzen vermieden werden konnte, indem die beinahe absolute Luftdichtigkeit aller Hähne und Verkittungen das Spectrum unverändert während der mehrere Stunden dauernden Beobachtungen liess. Die Röhre wurde dabei am Morgen jedes Beobachtungstages neu gefüllt.

Die Luft ist aber nicht die einzige Verunreinigung mit der man zu kämpfen hat; ein ebenso lästiger Uebelstand ist häufig die Unmöglichkeit, die bei hoher Verdünnung auftretenden Banden des Kohlenoxyds zu beseitigen. Gewöhnlich nimmt man an, dass diese Banden durch die Dichtung der Luftpumpenhähne mit Fett oder Kautschuk entstehen; — durch eine lange Reihe von Versuchen habe ich jedoch die Ueberzeugung gewonnen, dass dies nur in den seltensten Fällen zutrifft und dass vielmehr die besondere Beschaffenheit des zu den Röhren angewandten Glases hierbei das bestimmende Moment ist. Es ist mir nämlich mehrmals vorgekommen, dass von zwei Röhren, welche unmittelbar nach einander, mit demselben Gase und ohne irgend welche Veränderung an der Pumpe, gefüllt wurden, die eine ein von Kohlenoxydbanden absolut freies Spectrum gab, während in der andern diese Banden weder durch wiederholte Füllung noch durch gleichzeitige Erhitzung des Rohrs bis zur Rothgluth entfernt werden konnten. Dies, nebst dem Umstande, dass die fraglichen Streifen mit der Erhitzung des Rohrs durch die anhaltenden Entladungen an Intensität gewöhnlich zunehmen, zeigt, dass dieselben höchst wahrscheinlich aus dem Glase frei werdender Kohlensäure oder Kohlenoxyd ihren Ursprung verdanken. Der sonst häufig gelungene Versuch das Kohlenoxydspectrum aus einer Spectralröhre durch anhaltendes successives Spülen der-

selben mit chemisch reiner Schwefelsäure und destillirtem Wasser zu beseitigen, wodurch nur mechanisch an das Glas haftende organische Stoffe weggeschafft werden, kann in Fällen wie dem obigen, natürlich keinen Erfolg haben. Da nun die hellste dieser Banden gerade in denjenigen Theil des Wasserstoffspectrums fällt, welcher wegen seiner Lichtschwäche für die Beobachtung am schwierigsten ist, nämlich in's Grüne, und wegen der grossen auflösenden Kraft des Spectroskops in seine einfachen elementaren Linien zerfällt, so sieht man, dass die Untersuchung dieser Abtheilung nur mit Röhren möglich ist, die von jeder Spur solcher Verunreinigung frei sind, da an eine Elimination der in grosser Zahl auftretenden fremden Linien nicht zu denken ist[1]).

Die angegebene Form der Röhren, welche, wie man sieht, eine Variante der von Monckhoven zuerst vorgeschlagenen Gestalt bildet, bietet zwei für die Beobachtung der Gasspectra unter grosser Dispersion sehr wichtige Vortheile. Erstens ist die dadurch ermöglichte longitudinale Aufstellung der Röhren vor dem Spalt ein vortreffliches Mittel um grössere Helligkeit zu erzielen und zweitens ist die Reinheit des Spectrums durch Vermeidung der dicken, stark gekrümmten und häufig unhomogenen Glaswandung der Capillare eine bedeutend grössere. Da ferner die Capillare stets wie eine Cylinderlinse wirkt, und bei Vergleichung der Spectrallinien mit denjenigen des Sonnenspectrums die Röhre abwechselnd vorgeschoben und weggestellt werden muss, so ist bei transversaler Aufstellung eine Verschiebung der Linien schwer zu vermeiden und jedenfalls nie zu controlliren. Bei Anwendung longitudinal aufgestellter Röhren ist man dieses Uebelstandes überhoben. —

Um die ganze von der Röhre gelieferte Lichtmenge möglichst vollständig auszunutzen, muss erstere so aufgestellt werden, dass ihre Axe genau in die Verlängerung der optischen Axe des Collimators fällt und in diese Lage leicht und sicher wieder zurückgebracht werden kann, nachdem dieselbe zum Zweck des Einlassens des Sonnenlichtes in den Apparat vom Spalt entfernt gewesen ist. Um dies zu erreichen, habe ich die Röhre an einem messingenen Arm befestigt, welcher um eine verticale, auf einem mit Stellschrauben versehenen Stativ angebrachte Axe drehbar ist. Dadurch ist die Möglichkeit vorhanden, die Röhre genau zu nivelliren und nachdem die richtige Stellung gefunden ist, durch Drehung des Arms um dessen Axe von dem Spalte zu entfernen und wieder zurückzubringen, ohne dass eine merkbare Aenderung ihrer Lage zum Collimator entsteht.

Zur definitiven Füllung der Röhren wurde gewöhnlich electrolytisch hergestellter Wasserstoff benutzt, wobei alle die völlige Reinheit des Gases bedingenden Vorsichtsmaassregeln streng

---

1) Nachdem ich vergeblich eine grosse Anzahl aus Petersburg bezogener Röhren von den CO-Banden zu befreien versucht, habe ich schliesslich von Herrn A. Geissler in Berlin Röhren erhalten, in denen diese Streifen sogar bei Verdünnungen von weniger als $0{,}5^{mm}$ nur als verschwindende Spuren erscheinen und die infolge dessen die Untersuchung des Wasserstoffspectrums erheblich erleichtert haben. Das Auftreten der CO-Streifen ist nämlich nicht nur für die Beobachtung gerade derjenigen Spectraltheile hinderlich, wo sie selbst liegen, sondern beeinträchtigt auch die Helligkeit des ganzen Spectrums, indem dabei der Strom grösstentheils durch das Kohlenoxyd und nur in geringem Maasse durch den Wasserstoff übergeführt wird.

beobachtet worden sind. Es ist indessen, soweit meine Erfahrung reicht, gleichgültig, in welcher Weise das Gas hergestellt wird, das Spectrum bleibt stets unverändert und ich bin dadurch noch weiter in der schon früher ausgesprochenen Meinung bestärkt worden, dass dasselbe wirklich dem Wasserstoff gehört.

Die Erregung der Röhren wurde stets mit Hülfe einer grossen Inductionsrolle bewirkt, deren primärer Strom durch 6 grosse Bunsencellen geliefert wurde. Der Glanz der Röhre longitudinal gesehen, war dabei blendend und bei frisch gefüllter Batterie häufig kaum zu ertragen. —

2. Beobachtungs- und Reductionsmethode.

Bei meinen früheren Untersuchungen über das vorliegende Spectrum wurden die Wellenlängen der Linien durch mikrometrische Verbindung derselben mit passend ausgewählten Metalllinien abgeleitet, deren Wellenlängen Thalén's Tafeln entnommen wurden. Unter den damaligen Verhältnissen hatte diese Methode volle Berechtigung, da eine Einregistrirung der Gaslinien in das Sonnenspectrum dabei mit bedeutenden Schwierigkeiten verbunden gewesen wäre, weniger mit Rücksicht auf die bei so kleiner Dispersion unsichere Identification der Sonnenlinien, als wegen des Umstandes, dass für die jedesmalige Beobachtung des Sonnenspectrums der Spalt stets namhaft hätte verengert werden müssen. Da der Spalt sich nur einseitig öffnet, so wären dabei erhebliche nicht zu ermittelnde Fehler zu befürchten gewesen, die aber durch Anwendung eines Vergleichspectrums von derselben Ordnung der Helligkeit und dadurch bedingte Unveränderlichkeit der Spaltbreite als ausgeschlossen angesehen werden dürfen. — Die Fehler, welche die Anwendung der Metallspectra als Normalskala wahrscheinlicherweise herbeiführt, sind bei passender Wahl der Linien mit Berücksichtigung der Güte der Thalén'schen Wellenlängen-Werthe gewiss nicht so gross, wie diejenigen, welche eine ständige Veränderung der Spaltbreite mit sich führen würde, und werden ohne Zweifel geringer sein, als die wahrscheinlichen Fehler der mit dem damaligen Apparate gemachten Messungen selbst. Im gegenwärtigen Falle sind die Verhältnisse andere; die grosse Dispersion des Apparats, in Verbindung mit der ungewöhnlichen Durchsichtigkeit der Prismen, hat jede Aenderung der Spaltbreite beim Uebergang vom Sonnenspectrum zum Gasspectrum und umgekehrt überflüssig gemacht, trotzdem dass der Spalt fein genug ist um vom ersteren Spectrum ein Bild zu geben, das in Bezug auf Reichthum an Einzelheiten den Vogel'schen Tafeln wenig nachsteht. — Die Benutzung des Sonnenspectrums als Vergleichsskala war hierdurch von selbst angezeigt und wurde mit Rücksicht auf die mit dem Apparate erreichbare Schärfe der Messungen im Uebrigen zur Nothwendigkeit, da der wahrscheinliche Fehler der Thalén'schen Wellenlängen der Metalllinien im Allgemeinen wohl nicht weniger als auf ± 0.4 bis 0.5 *Å.E.*[1]) veranschlagt werden

1) Die Wellenlängen werden hier stets in Einheiten der 7. Stelle oder in Zehnmillionentheilen des Millimeters ausgedrückt, welche Einheit ich der Kürze wegen mit dem Namen Ångström'sche Einheit (*Å.E.*) bezeichne.

kann, eine Grösse, die den aus den vorliegenden Messungen folgenden wahrscheinlichen Fehler einer Wellenlängendifferenz beträchtlich übertrifft. —

Bei dem ausserordentlichen Linienreichthum des Spectrums wäre es aber eine ebenso unnöthige, als namentlich in unserm Klima zeitraubende Arbeit gewesen, jede einzelne Gaslinie direct mit dem Sonnenspectrum zu vergleichen. Ich habe statt dessen zunächst im Spectrum des Gases eine Reihe möglichst gleichmässig vertheilter, leicht erkennbarer Linien ausgewählt und deren Wellenlängen mit der grösstmöglichen Schärfe durch directe Vergleichung mit dem Sonnenspectrum abgeleitet. — Auf diese Fundamentallinien wurden darauf die zwischenliegenden Linien des Spectrums durch mikrometrische Messung bezogen. Daraus erwuchs mir weiter der Vortheil, dass die Messung dieser letzteren Linien bei jeder Gelegenheit auch an trüben Tagen erfolgen konnte. Die Fundamentallinien wurden stets durch 6 Einzelmessungen mit den zum Vergleich gewählten Sonnenlinien verbunden, während für die übrigen Linien die Abstände von den Fundamentallinien durch 3 unabhängige Messungen bestimmt wurden. — Gewöhnlich wurde dabei für jede einzelne zu messende Linie nach jeder Einstellung auf die Hauptlinie zurückgegangen, nur wenn einige Linien zu einer dichten Gruppe zusammengedrängt lagen, habe ich die einzelnen Einstellungen unmittelbar nach einander folgen lassen. Diese Beobachtungsart ist durch die weiter unten näher zu besprechende Veränderlichkeit der Brechung der Prismen durch Temperaturvariationen nothwendig geworden. —

Um die durch mikrometrische Messung gefundenen Abstände der Linien von den Fundamentallinien, sowie diejenigen der letzteren von den Sonnenlinien auf Wellenlängendifferenzen zu reduciren, war es weiter nöthig, für jeden einzelnen Punkt des Spectrums den Werth eines Trommeltheils in Wellenlängen auszudrücken. Diese Reductionscoefficienten wurden durch Beobachtung einer grösseren Anzahl möglichst gleichmässig über das ganze Spectrum vertheilter Linienpaare des Sonnenspectrums erhalten, indem die Ångström's Tafeln entnommenen Wellenlängendifferenzen mit den entsprechenden in Trommeltheilen der Schraube ausgedrückten Abständen verglichen wurden. — Die so gewonnenen Zahlen wurden dann als für das arithmetische Mittel der Wellenlängen der jedesmal benutzten Sonnenlinien geltend angesehen. Um die kleinen noch übrigen Ungleichförmigkeiten im Gange derselben möglichst auszugleichen, wurden sie darauf durch Ausdrücke von der Form

$$f = a + b\lambda + c\lambda^2$$

dargestellt und die Coefficienten a, b, c nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnet. Dadurch gewinnt man noch den Vortheil, die Sicherheit der gefundenen Wellenlängen in ihrer Abhängigkeit von diesen Factoren näher beurtheilen zu können. — Der ersten in dieser Weise geführten Rechnung lagen die unmittelbar durch Beobachtung gefundenen f zu Grunde und mit den daraus abgeleiteten ausgeglichenen Factoren wurde eine grössere, bereits gemessene Partie des Spectrums reducirt. — Es ist nun klar, dass, wenn die Factoren die Dispersionsverhältnisse des Apparats genau darstellen, die Wellenlänge einer Hauptlinie,

die man mit Hülfe derselben aus derjenigen einer benachbarten Fundamentallinie berechnet, bis auf eine der Unsicherheit der Factoren und der Messungen entsprechende Grösse, mit demjenigen Wellenlängenwerth stimmen muss, welcher aus der direkten Vergleichung mit dem Sonnenspectrum sich ergiebt. Bei näherer Untersuchung der erwähnten Partie des Spectrums in dieser Beziehung zeigte sich nun, dass dies nicht der Fall war; die Wellenlängen der Hauptlinien, aus einander abgeleitet, wichen von den direct gemessenen immer systematisch ab und zwar derart, dass angenommen werden musste, dass sämmtliche Factoren zu klein waren. Nach vielem Umhersuchen liess sich schliesslich dieser Umstand auf die, zwischen den einzelnen Einstellungen der zur Bestimmung der f benutzten Sonnenlinien, durch Steigen der Temperatur bewirkte Verschiebung des Spectrums zurückführen und es wurde nöthig, den direkt beobachteten Werthen eine hierauf bezügliche Correction hinzuzufügen. Die Ableitung dieser Correction wird weiter unten Gegenstand näherer Erörterung werden. — Nach Anbringung derselben, wurde die Berechnung der Coefficienten a, b, c nach der Methode der kleinsten Quadrate nochmals wiederholt und daraus neue ausgeglichene Factoren berechnet. Wie wir später sehen werden, stimmen die mit diesen neuen Factoren aus einander berechneten Wellenlängen der Hauptlinien mit den direkten Bestimmungen innerhalb so enger Grenzen überein, dass darin nicht nur für die Richtigkeit der Factoren selbst, sondern auch für diejenige der Wellenlängen der zwischen den Hauptlinien liegenden Linien des Spectrums, ein vollgültiger Beweis erhalten wird. —

Da, wie schon oben angeführt wurde, die Prismen keinerlei Aenderung ihrer Stellung während der ganzen Beobachtungsreihe erlitten haben und die Dispersionscurve infolge dessen als ein Continuum angesehen werden kann, so wäre es völlig zulässig gewesen, die Reductionsfactoren durch ein einziges Coefficientensystem für das ganze Spectrum darzustellen. Indessen habe ich es vorgezogen, das Spectrum in drei beiläufig gleiche Theile einzutheilen und die Factoren jedes einzelnen derselben für sich zu behandeln. Diese Theile haben die folgende Ausdehnung:

Theil	I.	Von	C	bis	$\lambda = 569,0$
»	II.	»	$\lambda = 569,0$	»	F
»	III.	»	F	»	G

und die denselben entsprechenden definitiven Ausdrücke der f sind:

$$f_{\text{I}} = -0,1417 + 0,02303\,\lambda + 0,00219\,\lambda^2 \qquad \text{I.}$$
$$f_{\text{II}} = +0,1137 - 0,06268\,\lambda + 0,00938\,\lambda^2 \qquad \text{II.}$$
$$f_{\text{III}} = +0,0643 - 0,04487\,\lambda + 0,00780\,\lambda^2 \qquad \text{III.}$$

wo λ in Einheiten der 4. Stelle ausgedrückt ist. Daraus sind die folgenden Reductionstafeln berechnet:

Tafel I. $C - \lambda = 569$.

λ	f	λ	f	λ	f
656	0,1036	624	0,0873	592	0,0713
654	1027	622	0862	590	0704
652	1016	620	0853	588	0695
650	1005	618	0842	586	0685
648	0995	616	0833	584	0675
646	0985	614	0824	582	0665
644	0975	612	0814	580	0654
642	0964	610	0803	578	0645
640	0954	608	0793	576	0635
638	0943	606	0782	574	0626
636	0934	604	0773	572	0616
634	0923	602	0763	570	0608
632	0913	600	0753	568	0597
630	0903	598	0743	566	0588
628	0893	596	0734		
626	0883	594	0722		

Tafel II. $\lambda = 569 - F$.

λ	f	λ	f	λ	f
568	0,0603	540	0,0487	512	0,0386
566	0594	538	0479	510	0379
564	0585	536	0472	508	0373
562	0577	534	0464	506	0366
560	0568	532	0457	504	0360
558	0560	530	0449	502	0354
556	0552	528	0442	500	0348
554	0544	526	0435	498	0342
552	0536	524	0427	496	0335
550	0528	522	0421	494	0330
548	0519	520	0414	492	0324
546	0511	518	0407	490	0317
544	0503	516	0400	488	0311
542	0495	514	0394	486	0305

Tafel III. *F* — *G*.

λ	f	λ	f	λ	f
486	0,0303	466	0,0245	446	0,0193
484	0297	464	0240	444	0187
482	0291	462	0234	442	0183
480	0285	460	0229	440	0179
478	0279	458	0224	438	0175
476	0273	456	0219	436	0170
474	0268	454	0213	434	0165
472	0262	452	0207	432	0160
470	0256	450	0203	430	0155
468	0250	448	0198		

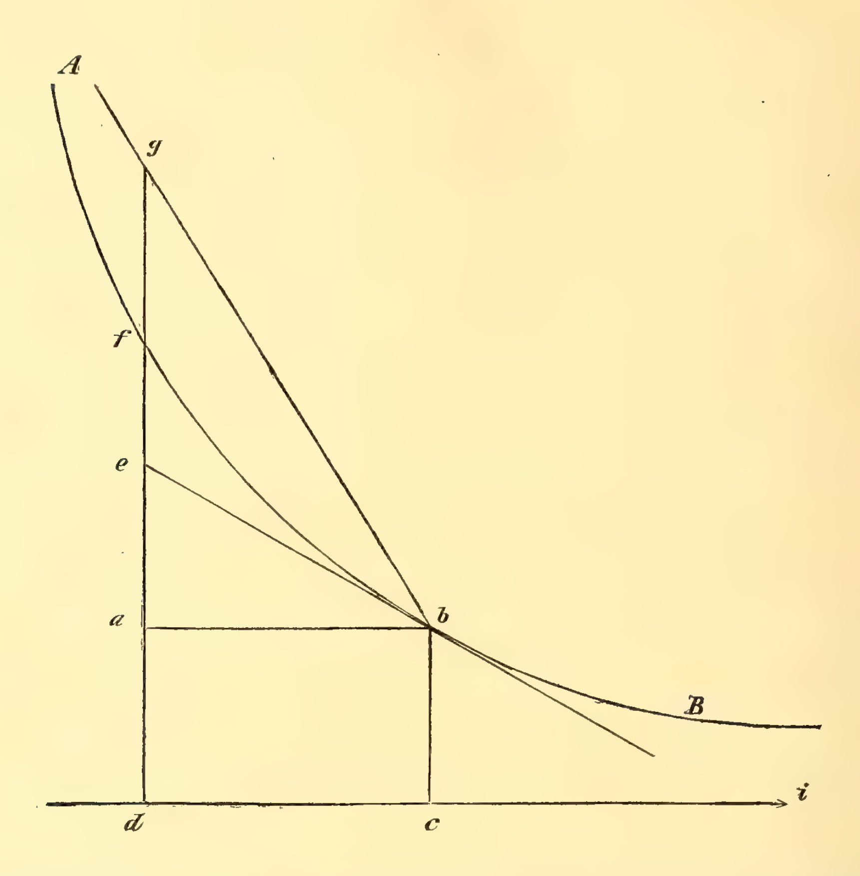
Da der wahrscheinliche Fehler eines einzelnen f ± 0,0002 bis ± 0,0003 beträgt, so ist der Anschluss der Tafeln an einander als befriedigend zu betrachten.

Aus Beobachtungen, die mit Apparaten von kleiner Dispersion angestellt sind und bei denen infolge dessen eine grössere Genauigkeit nicht erwartet werden darf, kann man ohne erheblich zu fehlen, die Wellenlängendifferenzen einfach derart ableiten, dass das mikrometrisch gemessene Intervall mit dem für die Wellenlänge der zu bestimmenden Linie geltenden Factor multiplicirt wird. Die dadurch erhaltene Wellenlängendifferenz ist jedoch stets um eine gewisse Grösse fehlerhaft, zu gross oder zu klein, je nachdem die zu bestimmende Linie weniger oder mehr brechbar ist, als diejenige Hauptlinie, auf welche sie bezogen wird. — So lange nun die Beobachtungsfehler von derselben Ordnung oder gar grösser sind als der Einfluss dieser Fehlerquelle, so liegt für die Berücksichtigung derselben keine Veranlassung vor, wenigstens wenn der Abstand der Linien nicht allzugross ist; — im gegenwärtigen Falle aber, wo der wahrscheinliche Fehler kaum ± 0.1 *Å. E.* beträgt, muss für die Reduction der Beobachtungen ein anderer Weg von grösserer Schärfe eingeschlagen werden. Dies lässt sich folgendermaassen erreichen.

Es sei in der Fig. *AB* ein Stück der Dispersionscurve, deren Abscissen die Mikrometerablesungen, die Ordinaten die Wellenlängen darstellen. Es sei ferner *bc* die Wellenlänge einer Hauptlinie $= \lambda_0$ und *df* diejenige der zu bestimmenden Linie $= \lambda_1$ so dass

$$af = \lambda_1 - \lambda_0 = \Delta\lambda$$

und ausserdem f_0 f_1 die Reductionsfactoren in den Punkten *b* und *f*. Da diese Factoren nichts Anderes sind, als die trigonometrischen Tangenten der Winkel, welche die Tangenten der



Curve in diesen Punkten mit der i-Axe bilden, so ist, wenn bg parallel der Tangente im Punkte f gezogen wird:

(1)
$$\begin{cases} ef = \Delta\lambda - f_0 \Delta i = \varepsilon \\ gf = f_1 \Delta i - \Delta\lambda = \varepsilon_1 \end{cases}$$

woraus:

(2)
$$\Delta\lambda = \frac{f_0 + f_1}{2} \Delta i + \frac{\varepsilon - \varepsilon_1}{2}$$

erhalten wird. Nun ist aber:

$$f_0 = a + b\lambda_0 + c\lambda_0^2$$

$$f_1 = a + b\lambda_1 + c\lambda_1^2$$

und

$$f_{0,1} = a + b\,\frac{\lambda_0 + \lambda_1}{2} + c\,.\left(\frac{\lambda_0 + \lambda_1}{2}\right)^2$$

wo mit $f_{0,1}$ der dem arithmetischen Mittel der Wellenlängen der beiden Linien entsprechende Factor bezeichnet wird. Man erhält hierdurch:

$$f_{0,1} = \frac{f_0 + f_1}{2} - c\,.\left(\frac{\lambda_1 - \lambda_0}{2}\right)^2$$

und:

$$\Delta\lambda = f_{0,1} \cdot \Delta i + c\left(\frac{\lambda_1 - \lambda_0}{2}\right)^2 \Delta i + \frac{\varepsilon - \varepsilon_1}{2} \tag{3}$$

Die beiden letzten Glieder dieses Ausdrucks sind sehr klein und es lässt sich zeigen, dass dieselben mit Rücksicht auf die aus dem wahrscheinlichen Fehler der Reductionsfactoren entspringende Unsicherheit der Wellenlängendifferenzen, vernachlässigt werden können. Da im Allgemeinen die grössten in Frage kommenden Werthe dieser Letztern nur 60 bis 70 *Å. E.* betragen, so wird z. B. in der Abtheilung I des Spectrums der Coefficient $c\left(\frac{\lambda_1 - \lambda_0}{2}\right)^2$ höchstens den Werth 0,000002 und in der Abtheilung II 0,000011 erreichen, welche Grössen ohne weiteres zu vernachlässigen sind. — Etwas grösser sind die Werthe des dritten Gliedes, aber immerhin doch nur von der Ordnung der wahrscheinlichen Fehler der Beobachtungen. Setzt man nämlich ganz allgemein:

$$\lambda = \alpha + \beta i + \gamma i^2 + \ldots \tag{4}$$

so wird für die Hauptlinie

$$\lambda_0 = \alpha + \beta i_0 + \gamma i_0^2$$

oder wenn die i von dieser Linie gerechnet werden:

$$\lambda - \lambda_0 = \Delta\lambda = \beta\Delta i + \gamma\Delta i^2$$

$$\alpha = \lambda_0$$

Nach (1) ist aber

$$\Delta\lambda = f_0 \Delta i + \varepsilon$$

und folglich auch:

$$\beta = f_0$$

$$\varepsilon = \gamma \cdot \Delta i^2$$

wo Δi in Trommeltheilen und ε in Einheiten der 7. Stelle auszudrücken sind. Da nach (1) weiter

$$\varepsilon + \varepsilon_1 = (f_1 - f_0)\,\Delta i$$

so folgt:

$$\varepsilon - \varepsilon_1 = 2\gamma \cdot \Delta i^2 - (f_1 - f_0)\,\Delta i \tag{5}$$

und man hat nur den Coefficienten γ numerisch zu bestimmen, um zur Kenntniss der Grösse $\varepsilon - \varepsilon_1$ zu gelangen. Mit Hülfe der Coefficienten a, b, c in den Ausdrücken für f lässt sich dies erreichen. Wir haben nämlich:

$$\frac{d\lambda}{di} = \beta + 2\gamma i + \ldots$$

und

$$\frac{d\lambda}{di} = f = a + b\lambda + c\lambda^2$$

Wenn man in dieser Gleichung λ nach (4) einführt und berücksichtigt, dass die Coefficienten a, b, c unter der Voraussetzung berechnet sind, dass λ in Einheiten der 4. Stelle ausgedrückt wird, während hier γ so bestimmt werden soll, dass ε in Einheiten der 7. Stelle erhalten wird, so gelangt man zur Identität:

$$\beta + 2\gamma i + \ldots = a + \frac{b}{10^3}(\alpha + \beta i + \gamma i^2 \ldots) + \frac{c}{10^6} \cdot (\alpha + \beta i + \gamma i^2 \ldots)^2$$

woraus weiter folgt:

$$\beta = a + \frac{b\alpha}{10^3} + \frac{c\alpha^2}{10^6} = f_0$$

$$2\gamma = \frac{b\beta}{10^3} + \frac{2c\alpha\beta}{10^6}$$

oder:

$$2\gamma = \frac{f_0}{10^3}\left\{b + \frac{2c \cdot \lambda_0}{10^3}\right\}$$

wo λ_0 in Einheiten der 7. Stelle auszudrücken ist. Die Gleichung (5) giebt nun:

$$\frac{\varepsilon - \varepsilon_1}{2} = \frac{f_0}{2 \cdot 10^3}\left\{b + \frac{2c\lambda_0}{10^3}\right\} \cdot \Delta i^2 - \tfrac{1}{2}(f_1 - f_0)\,\Delta i$$

in welchem Ausdrucke Alles numerisch bekannt ist.

Als Beispiel wähle ich aus meinen Beobachtungen zwei Fundamentallinien, deren Wellenlängen aus dem Sonnenspectrum abgeleitet

$$\lambda_0 = 5812{,}00, \qquad \lambda_1 = 5883{,}52$$

sind. Der Abstand derselben in Trommeltheilen der Schraube gemessen, betrug:

$$\Delta i = 1054{,}8$$

und da nach der Tafel:

$$f_0 = 0{,}0661$$

$$f_1 = 0{,}0696$$

und ausserdem:

$$b = +\,0{,}02303$$

$$c = +\,0{,}00219$$

so folgt:

$$\frac{\varepsilon - \varepsilon_1}{2} = -\,0{,}06\,\mathring{A}.E.$$

eine Grösse, die von derselben Ordnung ist, wie der aus den Beobachtungen selbst folgende wahrscheinliche Fehler der Wellenlängendifferenz. Da indessen der wahrscheinliche Fehler eines f nach dem Obigen $\pm\,0{,}0002$ beträgt, so ist die daraus folgende Unsicherheit von $\Delta\lambda$ bei einem Abstand der Linien von 1055 Trommeltheilen $= \pm\,0{,}21$ $\mathring{A}.E.$ oder dreimal so gross, wie das Glied $\frac{\varepsilon-\varepsilon_1}{2}$ und dies kann desshalb ohne Weiteres vernachlässigt werden. Für

die Reduction der Beobachtungen lässt sich demnach der in der Gleichung (2) gegebene strenge Ausdruck durch den folgenden ersetzen:

$$\Delta\lambda = f_{0,1} \cdot \Delta i.$$

3. Einfluss der Temperatur auf die Beobachtungen.

Der kleine Betrag der Veränderungen, welche die Refraction und Dispersion fester Körper durch Temperaturvariationen erleiden[1]), macht bei spectroskopischen Differentialbeobachtungen, die an Apparaten mit Glasprismen angestellt werden, bekanntlich jede hierauf bezügliche Correction vollständig überflüssig, indem eine solche Correction an Grösse stets weit hinter den direkten Beobachtungsfehlern zurückbleiben muss. Trotz der ausserordentlich viel grösseren Empfindlichkeit des Schwefelkohlenstoffs in dieser Hinsicht, glaubte ich anfangs auch bei der Reduction der vorliegenden Beobachtungen, dieselbe Annahme machen zu können, da in den wenigen Secunden, welche zwischen den Einstellungen auf zwei mit einander zu verbindende Linien vergehen, eine merkliche Aenderung der Brechung des Prismensystems mir höchst unwahrscheinlich erschien. Das unzutreffende dieser Annahme stellte sich indessen, wie schon oben angedeutet wurde, in so auffallender Weise heraus, dass mit Rücksicht auf die sonstige Schärfe der Beobachtungen, eine Vernachlässigung der hierauf bezüglichen Correction durchaus unstatthaft war. Es bleibt uns desshalb, ehe zu den Beobachtungen selbst übergegangen wird, noch übrig die Ermittelung dieser Correctionen näher zu besprechen.

Bekanntlich äussert sich der Einfluss der Temperaturvariationen der Flüssigkeiten auf ihre Brechungsverhältnisse dadurch, dass eine Steigerung der Temperatur eine Verminderung der Brechung und der Dispersion bewirkt. Beim Schwefelkohlenstoff ist diese Abnahme, namentlich was die Brechung betrifft, eine sehr beträchtliche, und das Spectrum muss infolge dessen bei steigender Temperatur sich nach der weniger brechbaren Seite hin bewegen. Diese Erscheinung trat mir auch bei meinen ersten Beobachtungen im Sonnenspectrum mit dem neuen Apparat stets entgegen und es gehörte nur eine ganz unbedeutende Temperaturänderung dazu, um das Spectrum um eine sehr bedeutende Strecke zu verschieben. So z. B. wurde einmal die Linie $\lambda = 5316$ eingestellt; nach etwa anderthalb Stunden befand sich aber die Mikrometerspitze mit der Linie $\lambda = 5303$ in Coincidenz, während gleichzeitig ein neben den Prismen aufgestelltes Thermometer, eine Temperatur-

1) Nach den Untersuchungen von Stefan (Wien. Sitz.-Ber. 1871, Bd. LXIII. 2, p. 223) sind Steinsalz und Sylvin diejenigen Körper, welche von Allen in Bezug auf ihre Brechungsverhältnisse am meisten durch Temperaturveränderungen beeinflusst werden, und zwar betragen die Aenderungen des Brechungsindex für D und 100° C. resp. $dn = -0{,}00373$ und $-0{,}00345$. Dies ist aber nur noch ein Zwanzigstel der entsprechenden Aenderung des Brechungsindex des Schwefelkohlenstoffs für dieselbe Linie und dieselbe Temperaturdifferenz. Für Glas ist nach denselben Bestimmungen dn noch kleiner oder $= +0{,}00023$ für $\Delta t = 100°$ C.

erhöhung von 0°3 C. zeigte. Unter der Annahme, dass die Temperatur des Schwefelkohlenstoffs um dieselbe Grösse höher geworden wäre, würde demnach jedem Zehntel-Grade in dieser Gegend des Spectrums eine Verschiebung von nicht weniger als 4 $\mathring{A}.E.$ entsprechen. Wenn nun auch diese grosse Ortsveränderung des Spectrums im gegenwärtigen Falle allerdings erst in etwa einer halben Stunde erfolgte, so ist dadurch in keiner Weise irgend welche Garantie dafür gegeben, dass nicht ähnliche Ortsveränderungen unter Umständen viel rascher stattfinden können, und da übrigens der wahrscheinliche Fehler einer Wellenlängendifferenz, aus den Messungen allein abgeleitet, nur etwa ± 0,05 $\mathring{A}.E.$ beträgt, so kann die einer Verschiebung vom zehnfachen Betrage entsprechende Temperatursteigerung von 0°01 C. in viel kürzerer Zeit erfolgen als derjenigen, welche für eine einzelne Messung des Abstandes zweier Linien erforderlich ist. — Diesen Thatsachen gegenüber leuchtet es ohne Weiteres ein, dass jeder Versuch die Temperaturcorrection direct aus etwa beobachteten Temperaturen der Flüssigkeit und den optischen Constanten der Prismen mit der nöthigen Sicherheit zu ermitteln, scheitern muss, da diese Temperaturen nicht mit der erforderlichen Genauigkeit erhalten werden können. Das einzige was übrig bleibt, ist desshalb, nach möglichster Beseitigung aller, auf die Temperaturzustände des Apparats störend einwirkenden Umstände, die noch übrig bleibenden Fehler womöglich aus den Beobachtungen selbst zu ermitteln.

Vor Allem kommt es also darauf an, denjenigen Ursachen nachzuspüren, welche die Temperaturänderungen herbeiführen. Da das Beobachtungszimmer nicht geheizt wird, sondern in der kälteren Jahreszeit seine Erwärmung von den benachbarten warmen Zimmern erhält und um schnelle Temperaturänderungen auszuschliessen, an den Beobachtungstagen stets abgeschlossen ist, so lassen sich nur drei Ursachen anführen, welche eine Steigerung der Temperatur bewirken können, nämlich: 1) die mit den Sonnenstrahlen durch den Spalt in den Apparat gelangende dunkle Wärme, 2) die durch die Anwesenheit des Beobachters bedingte Erwärmung und 3) diejenige, welche die Luft des Zimmers durch die Bestrahlung des dunklen, nach Süden liegenden Fensterladens durch die Sonne erfährt. — Was die erste betrifft, war es schon von Vornherein wahrscheinlich, dass ihr Einfluss verschwindend sein musste und es hat sich dies auch dadurch bestätigt, dass, wenn die Sonnenstrahlen vor dem Eintritt in's Instrument durch eine mit Alaunlösung gefüllte Celle geführt, und dadurch von ihrer dunklen Wärme befreit wurden, keine Verminderung der Ortsveränderung des Spectrums sich constatiren liess. Dasselbe gilt von der Anwesenheit des Beobachters. Als ich nämlich nach Einstellung einer Linie mich vom Apparat und vom Zimmer entfernte und nach einiger Zeit das Spectrum wieder beobachtete, so fand ich die Verschiebung nicht anders als bei fortdauerndem Aufenthalt neben dem Apparat. Es bleibt also nur übrig, den Grund zu der beobachteten stetigen Verschiebung des Spectrums nach der weniger brechbaren Seite hin, in der allmählichen Erhöhung der Zimmertemperatur durch die Bestrahlung des Fensterladens zu suchen. Wenn dem so ist, so müssen auch die schnellsten Aenderungen in der Lage des Spectrums den grössten Temperaturänderungen des Zimmers durch die Sonnenstrahlung der Zeit nach entsprechen, also in den Vormittagsstunden stattfinden und dies ist

es gerade, was die Beobachtungen zeigen. Eine Linie, welche vom Morgen an mit dem Mikrometer verfolgt wird, bewegt sich nämlich mit einer anfangs erheblichen, dann aber allmählich abnehmenden Geschwindigkeit nach dem Roth hin, bis sie etwa um 1 Uhr stationär wird und im Laufe des Nachmittags und der Nacht zur ursprünglichen Lage zurückkehrt. Im Laufe von 24 Stunden oscillirt demnach das Spectrum regelmässig einmal um eine der mittleren Tagestemperatur des Zimmers entsprechende Lage.

Ist nun die Bestrahlung des Fensterladens der einzige, oder wenigstens der hauptsächliche Grund der beobachteten Verschiebung des Spectrums, so steht es zu erwarten, dass nur diejenigen Beobachtungen, bei denen das Sonnenlicht zur Anwendung kommt, also diejenigen, auf welche die Ableitung der Reductionsfactoren und der Wellenlängen der Fundamentallinien beruhen, davon beeinflusst werden. Dies ist auch der Fall. Denn betrachtet man die successiven, bei diesen Beobachtungen an der Trommel des Mikrometers gemachten Ablesungen, so findet man ein stetiges Weiterrücken derselben, wie es auch sein muss, wenn das Spectrum sich nach dem Roth hin bewegt, und die Einstellungen, wie bei meinen Beobachtungen, in demselben Sinne erfolgen. — Bei den an trüben Tagen angestellten Beobachtungen des Gasspectrums dagegen, ist ein derartiges Fortrücken der abgelesenen Zahlen im Allgemeinen nicht vorhanden, — die Verschiedenheit der Einstellungen ist dann durchweg derart, dass sie nur auf unvermeidliche Beobachtungsfehler zurückzuführen ist. Aus diesem Grunde sind auch nur an die Beobachtungen zur Bestimmung der Reductionsfactoren und der Wellenlängen der Fundamentallinien Temperaturcorrectionen angebracht worden.

In Bezug auf diese Correctionen hat man nun zweierlei zu berücksichtigen, erstens die Aenderungen der Dispersion des Prismensystems und zweitens diejenigen der Refraction. Ohne weiteres leuchtet es ein, dass die ersteren den letzteren gegenüber als Grössen höherer Ordnung angesehen werden dürfen; — es ist demnach wahrscheinlich, dass bei kleinen Temperaturvariationen die daraus etwa folgenden Correctionen der Beobachtungen vollkommen zu vernachlässigen sein werden und dass dem wirklich so ist, lässt sich leicht zeigen. Um diesen Beweis zu führen, wollen wir die bis jetzt über die Brechungsverhältnisse des Schwefelkohlenstoffs in ihrer Abhängigkeit von der Temperatur angestellten numerischen Bestimmungen etwas näher betrachten. — Die ältesten, einigermaassen ausführlichen Untersuchungen in dieser Beziehung, über die wir verfügen, sind, mit Uebergehen der wenigen Versuche von Baden Powell[1]), diejenigen von Dale und Gladstone[2]). Dieselben geben von 5° zu 5° zwischen 0° und 42°,5 die Brechungsindices der Linien A, D, und H des Sonnenspectrums, aus deren Vergleichung unter einander die folgenden Aenderungen für 1° C. im Mittel hervorgehen:

$$\text{Bei } A \ldots \frac{\Delta n}{\Delta t} = -0{,}00074$$
$$D \ldots = -0{,}00084$$
$$H \ldots = -0{,}00096$$

1) The undulatory Theory, as applied to the dispersion of Light.

2) Phil. Trans. Vol. CXLVIII, p. 887, 1858.

Der von Dale und Gladstone für das benutzte Präparat angegebene Siedepunkt: + 43° C. weicht indessen recht erheblich von dem im Allgemeinen sonst gefundenen Werth + 46° bis + 47° ab, wonach die chemische Reinheit desselben wohl zweifelhaft erscheinen könnte. Da Lösungen von Schwefel und Phosphor in Schwefelkohlenstoff grössere Brechungsvermögen und Dispersion zeigen[1]) als das reine Präparat und auch in etwas anderer Weise durch Temperaturänderungen beeinflusst werden, so dürften aus diesem Grunde die obigen Zahlen wohl für bestätigungsbedürftig angesehen werden müssen. Soviel scheint jedoch aus den Untersuchungen von Dale und Gladstone hervorzugehen, dass die Aenderungen der Brechungsindices mit der Temperatur vom absoluten Betrag der letzteren unabhängig sind und dies wird auch durch die Versuche von Wüllner[2]) bestätigt. Aus seinen mit grosser Sorgfalt angestellten, und über ein Temperaturintervall von + 7° bis + 23° C. sich erstreckenden Beobachtungen, leitet nämlich Wüllner die folgenden Ausdrücke für die Brechungsindices der drei Linien des ersten Wasserstoffspectrums ab:

$$\begin{aligned} \text{Für } H_\alpha \ldots n &= 1{,}634066 - 0{,}000780\, t \\ H_\beta \ldots \quad &= 1{,}669076 - 0{,}000820\, t \\ H_\gamma \ldots \quad &= 1{,}692149 - 0{,}000850\, t \end{aligned}$$

durch welche, wie die Wüllner'sche Tafel zeigt, die Beobachtungen sehr gut dargestellt werden. Mit den Zahlen von Dale und Gladstone verglichen, zeigen die obigen in Bezug auf die Aenderungen der Brechungsverhältnisse mit der Temperatur eine recht befriedigende Uebereinstimmung, dagegen ist dies bei den Indices selbst nicht der Fall. Um diese mit einander in Harmonie zu bringen, würde man, wie Wüllner zeigt, die von Dale und Gladstone für H_α und H_β und + 15° C. z. B. gegebenen Werthe auf die resp. Temperaturen + 16,87 und + 16,67 beziehen müssen. Darauf scheint auch der niedrige Siedepunkt des von ihnen angewandten Schwefelkohlenstoffs hinzudeuten.

Für unseren gegenwärtigen Zweck, um den Einfluss der Aenderung der Dispersion auf die Beobachtungen zu beurtheilen, würden die Wüllner'schen Daten wohl so ziemlich ausreichen; — da sie indessen nur für drei Punkte des Spectrums gelten und ein solcher Einfluss viel besser sich übersehen lässt, wenn das Spectrum in mehrere kleinere Partieen getheilt wird, so eignet sich dazu die von Van der Willigen[3]) angestellte Beobachtungsreihe erheblich besser. Diese Beobachtungen beziehen sich nämlich auf sämmtliche Linien, für welche Van der Willigen in seinen Untersuchungen über das Sonnenspectrum die absoluten Wellenlängen bestimmt hat, und deren Anzahl auf etwa 60 steigt. Aus denselben gehen für die Brechungsverhältnisse des Schwefelkohlenstoffs bei + 18°75 und für die Aenderung derselben für 1° C. die folgenden Ausdrücke hervor:

---

1) Vergl. C. R., T. LXIV p. 1030.
2) Pogg. Ann. Bd. CXXXIII, p. 17.
3) Archives du Musée Teyler III, p. 55.

$$n = 1{,}583671 + 1483490 \,.\, \lambda^{-2} + 766867 \,.\, 10^{6} \,.\, \lambda^{-4} + 79422900 \,.\, 10^{12}\, \lambda^{-6}$$

$$\frac{\Delta n}{\Delta t} = -\, 0{,}000859 + 1666 \,.\, \lambda^{-2} - 6063 \,.\, 10^{6}\, \lambda^{-4} - 854434 \,.\, 10^{12}\, \lambda^{-6}$$

wo die Wellenlängen λ in Einheiten der 7. Stelle ausgedrückt sind. Daraus habe ich die folgende Tafel berechnet:

λ	n	U	$\frac{\Delta n}{\Delta t}$	$\Delta \frac{\Delta n}{\Delta t}$
660,0	1,61909		—0,00083,4	
		0,00372		—0,1
630,0	62281		83,5	
		436		0,1
600,0	62717		83,6	
		520		0,3
570,0	63237		83,9	
		627		0,4
540,0	63864		84,3	
		771		0,9
510,0	64635		85,2	
		964		1,6
480,0	65599		86,8	
		1238		2,7
450,0	66837		89,5	
		1633		4,5
420,0	68470		94,0	
		2240		7,9
390,0	70710		101,9	

Das Verhältniss der Zahlen der fünften und der dritten Columne zu einander, giebt nun, wie man findet, diejenige Grösse δ, um welche sich die Dispersion des betreffenden Spectraltheils für eine Temperatursteigerung von 1° C. vermindert, ausgedrückt in Theilen desselben Gebiets. Ist nun ein Reductionsfactor $f = \Delta\lambda/\Delta i$ bei einer gewissen Temperatur bestimmt worden, so würde derselbe bei einer um 1° höheren Temperatur den Werth

$$f' = \frac{\Delta\lambda}{\Delta i\,(1 + \delta)} = f - f \,.\, \delta$$

erhalten, oder die Fehler, denen Beobachtungen unterliegen, die bei einer um 1° höheren Temperatur angestellt sind, als die den Factoren entsprechenden, werden in den verschiedenen Spectraltheilen einem Fehler des entsprechenden Factors von dem folgenden Betrage proportional sein:

Zwischen $\lambda =$ 660	und $\lambda =$	630	$- f\delta$	$=$	$+$	0,000025
»	630	»	600	$=$		000020
»	600	»	570	$=$		000037
»	570	»	540	$=$		000035
»	540	»	510	$=$		000052
»	510	»	480	$=$		000058
»	480	»	450	$=$		000057
»	450	»	420	$=$		000048

Da aber der wahrscheinliche Fehler eines f im Allgemeinen $\pm$ 0,0002 bis $\pm$ 0,0003 beträgt, so findet man, dass die von der Aenderung der Dispersion herrührenden Fehler der Factoren erst bei Temperaturvariationen von 6° bis 7° eine Grösse erreichen, welche der den Factoren ohnehin anhaftenden Unsicherheit gleichkommt, und da solche Aenderungen der Temperatur im Beobachtungszimmer nie vorkommen, so ist der Einfluss der Dispersionsvariationen auf die Reductionsfactoren als verschwindend zu betrachten.

Dasselbe gilt auch in Bezug auf die Messungen der Spectrallinien des Gases. Denn angenommen, man hätte den Abstand einer Linie von der nächsten Fundamentallinie zu 10^r der Schraube gemessen — eine Grösse, die nur selten vorkommt — und zwar bei einer um 1° höheren Temperatur als diejenige, bei welcher die Factoren bestimmt wurden, so würde man denselben um die folgende, in Trommeltheilen ausgedrückte Grösse zu klein bekommen haben:

Im Roth	$d\,(\Delta i) = 1000\,.\,\delta$	$= -$ 0,3
» Grün	$=$	$= -$ 1,2
» Violett	$=$	$= -$ 3,5

Die entsprechenden Fehler der Wellenlängendifferenzen sind aber resp.: — 0,03, — 0,05, — 0,07 *Å. E.*; Alles Grössen von derselben Ordnung, wie die wahrscheinlichen Fehler der Mikrometermessungen und erheblich kleiner als die aus denjenigen der Factoren folgende Unsicherheit, die bei einem Abstand von 10^r eine Grösse von $\pm$ 0,2 bis $\pm$ 0,3 *Å. E.* erreicht. Es ist somit auch für die Messungen der Linien des Gasspectrums der Einfluss der Aenderung der Dispersion zu vernachlässigen.

Ganz anders gestalten sich aber die Verhältnisse, wenn wir den Einfluss der Aenderungen der Refraction auf die zu bestimmende Wellenlängendifferenz betrachten. Wenn nämlich in der Zeit, welche zwischen den Einstellungen auf zwei mit einander zu verbindende Linien verfliesst, eine Temperaturänderung des Schwefelkohlenstoffs eintritt, die genügend ist, um eine merkliche Aenderung der Brechung hervorzurufen, so muss die gemessene Distanz fehlerhaft ausfallen, und zwar zu gross oder zu klein, je nachdem die Einstellungen von der brechbareren zur weniger brechbaren Seite des Spectrums oder umgekehrt erfolgen. Bei den vorliegenden Messungen ist das erstere der Fall, und man ersieht daraus, dass einerseits die aus Messungen im Sonnenspectrum abgeleiteten Reductions-

factoren zu klein, andererseits die Wellenlängendifferenzen zwischen den Fundamentallinien und den benutzten Sonnenlinien zu gross erhalten werden müssen. — Da nun die hierauf bezüglichen Correctionen der Beobachtungen wegen der Unmöglichkeit zu einer genauen Kenntniss der Temperatur des Schwefelkohlenstoffs zu gelangen, sich direkt in befriedigender Schärfe nicht bestimmen lassen, so habe ich zu ihrer Ermittelung ein Verfahren angewandt, welches allerdings auf einer Hypothese beruht, aber wegen der dadurch erreichten Uebereinstimmung der Beobachtungen unter einander als in Ermangelung jeder direkten Methode berechtigt angesehen werden dürfte. Dies Verfahren beruht auf der folgenden Ueberlegung. Bei den nur sehr allmählich stattfindenden Aenderungen der Temperatur der Prismen, darf es als sehr wahrscheinlich angesehen werden, dass in der kurzen Zeit, welche nöthig ist, um nach Einstellung einer Linie A zu der zweiten B überzugehen, die Verschiebung des Spectrums annähernd dieselbe ist, wie diejenige, welche während des Zurückgehens auf A und abermaliger Einstellung derselben stattfindet. Ist nun diese zweite Einstellung der Linie A um a Trommeltheile grösser als vorher, so wird sehr nahe $\frac{1}{2}a$ diejenige Grösse sein, um welche das Spectrum sich während der Messung des Abstandes AB verschoben hat, oder um welche dieser Abstand zu gross beobachtet worden ist. Bei der zweiten Messung wird man in ebensolcher Weise die fragliche Distanz um $\frac{1}{2}a'$, wo a' nahe $= a$ ist, zu gross messen u. s. w. und wenn n Messungen vorliegen, an das Mittel derselben die Correction

$$-\frac{1}{n-1}\sum\frac{a}{2}$$

anzubringen haben. Um dies zu erläutern, führe ich aus meinen Beobachtungen die Bestimmung des Reductionsfactors für $\lambda = 509{,}9$ hier auf. Die benutzten Sonnenlinien waren:

$$\lambda = 5090{,}31$$
$$\lambda_1 = 5107{,}02$$

für welche die folgenden Einstellungen erhalten wurden:

Linie λ	Linie λ_1	Diff.	Corr.
$\overset{r}{0},130$	$\overset{r}{4},574$	$\overset{r}{4},444$	— 0,025
180	589	409	025
230	620	390	005
240	640	400	037
314	718	404	018
350	749	399	—
		4,408	— 0,022

woraus:

$$f = \frac{16{,}71}{438{,}6} = 0{,}0381$$

folgt. Um eine entsprechende Correction der letzten Messung zu erhalten, hätte die Linie λ nochmals allein eingestellt werden müssen. Die Correction beträgt in diesem speciellen Falle nur zwei Einheiten der letzten Stelle des Factors und ist demnach von unwesentlicher Bedeutung; bei geringerem Betrage der gemessenen Distanz, erhält dieselbe indessen bisweilen einen viel grösseren Werth. So z. B. im folgenden Fall:

$$\lambda = 6264{,}09$$
$$\lambda_1 = 6279{,}56$$

Linie λ	Linie λ_1	Diff.	Corr.
r 0,000	r 1,780	r 1,780	— 0,034
069	837	768	030
130	914	784	032
195	930	735	030
235	2,010	775	018
270	040	740	—
		1,764	— 0,029

woraus $f = 0{,}0890$ hervorgeht, während der uncorrigirte Werth 0,0877 beträgt. Bei einer in dieser Spectralgegend gemessenen Distanz von 10^r würde die Nichtberücksichtigung der Temperatur, wie man sieht, einen Fehler von nicht weniger als — 1,3 *A.E.* mit sich führen, eine Ungenauigkeit, welche bei den vorliegenden Beobachtungen durchaus unzulässig ist.

In dieser Weise sind alle Beobachtungen zur Ableitung der Reductionsfactoren und der Wellenlängen der Hauptlinien corrigirt worden. Bei den an trüben Tagen angestellten Messungen der übrigen Linien des Spectrums hat sich, wie schon oben erwähnt wurde, im Allgemeinen kein Bedürfniss herausgestellt, entsprechende Correctionen anzubringen, da dann die störende Ursache, nämlich die Erwärmung der Zimmerluft durch Bestrahlung des Fensterladens, nicht vorhanden war.

Dem Vorwurfe auf einer Hypothese zu beruhen, welcher dieser Art den Einfluss der Temperatur auf die Beobachtungen zu berücksichtigen, wohl mit einer gewissen Berechtigung gemacht werden könnte, lässt sich nicht besser begegnen, als durch Hinweis auf die gute Uebereinstimmung, welche zwischen den direkt aus dem Sonnenspectrum bestimmten Wellenlängen der Fundamentallinien und denjenigen stattfindet, die für jede derselben durch Verbindung mit der vorhergehenden Hauptlinie, unter Anwendung der corrigirten Factoren erhalten wird, während falls die Beobachtungen mit Hülfe der uncorrigirten Factoren reducirt werden, ganz unstatthafte Differenzen zu Tage treten. Um dies zu zeigen, habe ich in der Columne *A* der folgenden Tafel die Wellenlängenbestimmungen einiger Hauptlinien zusammengestellt, wie sie direkt durch Vergleichung mit dem Sonnenspectrum erhalten wurden,

während die Columnen B und C die Werthe geben, welche für jede derselben aus demjenigen jeder vorhergehenden Linie unter Anwendung der corrigirten und uncorrigirten Factoren resp. berechnet worden sind.

A	B	C	$A-B$	$A-C$
5812,00	—	—	—	—
5883,52	5883,25	5881,84	+0,27	+1,68
5930,76	5930,77	5929,27	—0,01	+1,49
5974,87	5974,81	5973,40	+0,06	+1,47
6017,46	6017,72	6016,59	—0,26	+0,87
6080,00	6080,26	6078,76	—0,26	+1,24
6120,98	6121,31	6120,27	—0,33	+0,71
6134,45	6134,48	6134,18	—0,03	+0,27
6182,19	6182,60	6181,56	—0,41	+0,63

Wie man sieht, ist die Uebereinstimmung der Werthe unter A und B eine genügend befriedigende, während diejenigen der dritten Columne um so beträchtliche Grössen zu klein sind, dass sie in keiner Weise als brauchbar angesehen werden können. Dasselbe gilt denn auch in Bezug auf die Wellenlängen der zwischen den einzelnen Hauptlinien liegenden übrigen Linien des Spectrums, falls sie mit Hülfe der uncorrigirten Reductionsfactoren berechnet werden und zwar ist dann der Fehler dem jedesmaligen Abstande der einzelnen Linien von der als Ausgangspunkt gewählten Hauptlinie proportional. Dagegen zeigt der kleine Betrag der Differenzen A—B, dass die oben für die Reductionsfactoren gegebenen definitiven Ausdrücke in sehr befriedigender Weise die Dispersionsverhältnisse des Apparats darstellen, da die Abweichungen vollkommen innerhalb der Grenzen der wahrscheinlichen Fehler der Factoren eingeschlossen sind. Diese letzteren können nämlich bei Linienabständen von dem Betrage der Obigen ohne Weiteres eine Unsicherheit der Wellenlängen von ± 0,2 bis ± 0,3 $\mathring{A}.E.$ hervorbringen.

Erheblich kleiner als der Einfluss der Temperatur auf die Reductionsfactoren ist die Einwirkung derselben auf die Wellenlängen der Fundamentallinien. Denn da die anzubringende Correction gewöhnlich nur — 0ᵔ02 bis 0ᵔ03 beträgt, so kann dadurch die Wellenlängendifferenz nur um höchstens etwa — 0,3 $\mathring{A}.E.$ im rothen Theil des Spectrums verändert werden, während in den brechbareren Theilen die Correction kaum — 0,1 $\mathring{A}.E.$ beträgt. Trotzdem ist dieselbe jedoch dabei nicht zu vernachlässigen, denn die Unsicherheit der Factoren, welche bei grossen Linienabständen einen Fehler von ± 0,3 $\mathring{A}.E.$ wohl herbeiführen kann, hat in Bezug auf die Wellenlängenbestimmung der Fundamentallinien einen ganz verschwindenden Einfluss, weil diese Linien stets mit sehr nahe liegenden Sonnenlinien verbunden werden. Die Wellenlängen der Hauptlinien besitzen demnach eine ganz erhebliche Genauigkeit, die relativ genommen, gewiss grösser ist, als die absolute Genauigkeit der Wellenlängen der Sonnenlinien.

4. Resultate der Beobachtungen.

Die nach der im Obigen erörterten Methode erhaltenen Wellenlängenbestimmungen sind in der folgenden Tafel zusammengestellt. Mit Rücksicht auf die Genauigkeit der Beobachtungen, habe ich es dabei nicht für unmotivirt erachtet, auch die zweite Decimale mit aufzuführen, da bei den helleren Linien und vollends bei den Fundamentallinien dieser Stelle, meiner Meinung nach, ein reeller Werth wohl kaum abgesprochen werden kann. Bei den schwächeren Linien mag dies vielleicht nicht immer zutreffen, aber selbst wenn in solchen Fällen die relative Genauigkeit der Wellenlängendifferenzen nicht grösser als ± 0,1 Å.E. angenommen wird, so habe ich jedoch daraus nicht Anlass genommen, für diese Linien die Wellenlängen abzurunden. — Die Fundamentallinien sind in der zweiten Columne durch die Buchstaben *a*, *b*, *c* . . . *a′ b′ c′* . . . der Reihe nach bezeichnet und können nach dieser Nomenclatur auf den Zeichnungen des Spectrums sofort wiedergefunden werden. — Einzelne Bemerkungen, wie in Bezug auf Duplicität (dpl.) oder Verschwommenheit (v) der Linien, haben auch in dieser Columne Platz gefunden. In der dritten Columne schliesslich sind die nach den Zahlen 1 . . . 6 geschätzten Intensitäten der Linien angegeben, welche Zahlen bei der Anfertigung der Zeichnungen als Richtschnur gedient haben. — Es braucht wohl kaum besonders bemerkt zu werden, dass diese Schätzungen einen nur beiläufigen und in jedem Falle nur in Bezug auf die nächste Nachbarschaft gültigen Werth haben können; — als kurze Bezeichnungen für schwache, mittelstarke und sehr intensive Linien, mögen sie indessen für die Charakteristik des Spectrums von einer gewissen Bedeutung sein.

Wellenlängen der Linien des zweiten Wasserstoffspectrums.

λ	Bemerkungen.	J	λ	Bemerkungen.	J	λ	Bemerkungen.	J
6422,67		1,2	6200,76		1,2	6150,74		1,2
6394,32		1,2	6198,67		4	45,70		1,2
58,54		1	96,14		3	43,33		1,2
37,60		1,2	82,19	*c*	4	40,68		1
23,87	*a*	4	75,57		2	38,80		1
00,75		1,2	73,57		3,4	34,45	*d*	6
6296,90		3,4	69,46		2,3	26,61	v.	4
83,39		3	67,07		1	20,98	*e*	6
73,00		1	63,95		2	18,42		1,2
69,63		1	61,22		3,4	12,04		1
37,26		3,4	58,68		1,2	07,53		1
32,09		1	54,94		2	6097,66		2
23,96	*b*	4	52,65		1,2	95,20		4

λ	Bemerkungen.	J	λ	Bemerkungen.	J	λ	Bemerkungen.	J
6093,00		1	5935,36		1	5795,17		1
90,00		3,4	30,77	*i*	5	93,33		2
83,85	v. dpl.	1	27,48		1	90,52		2
80,00	*f*	5	24,17		4	86,32		1
78,41		1	20,09		4	84,49		4
73,82		3	15,60		4	78,12		3
69,56		5	11,32		1	73,85		4
66,82	dpl.	3	09,02		2,3	72,02		1
62,88		3	04,66		1	65,42		2,3
55,67		1,2	03,06		1,2	61,94		1
52,06	v.	4	5899,97		1,2	59,35	} *m*	3,4
47,24		2,3	97,50		1	56,42	} *m*	3,4
44,44		1,2	95,41		1	39,55		1
42,30		1,2	93,36		1,2	37,90		1
40,23		1,2	91,15		1	34,77		4
31,07		6	87,87	} *k*	6	33,30		1,2
27,21		4	83,52	} *k*	6	29,85		4
22,87		3,4	78,08		4	26,56		4
20,43		4	75,45		1	21,63		1
17,46	*g*	6	71,38		4	14,17		1,2
11,02	dpl.	1	68,76		4	11,83		2
06,40		1	63,91		2	08,14		1
04,24		1	61,01		1,2	02,25		3
02,25		3,4	59,32		1	5699,34		1,2
5997,38		1	56,67		1	96,09		1,2
93,74		3	50,96		2	92,97		1,2
91,95		3	48,61		2	88,10	*n*	4
89,91		3	46,84		1	83,09		3,4
88,42		3	35,45		4	81,64		3,4
82,17		4	32,34		2,3	75,36		1
74,87	*h*	5	30,53		2,3	73,62		1
69,15		3	24,00		1	71,88		2
66,57		3,4	22,00		3,4	69,70		2
62,62		3	18,82		3	66,37		2
59,00		3,4	16,10		1	62,46		1
55,47		1	14,48		3	60,80		2,3
49,15		4	12,00	*l*	6	58,57		2
46,80		3,4	04,50		1,2	56,66		2
42,86		1	03,10		1	54,61		3
41,15		1	5799,92		1,2	51,50		1,2
37,91		5	97,80		1	46,41		1

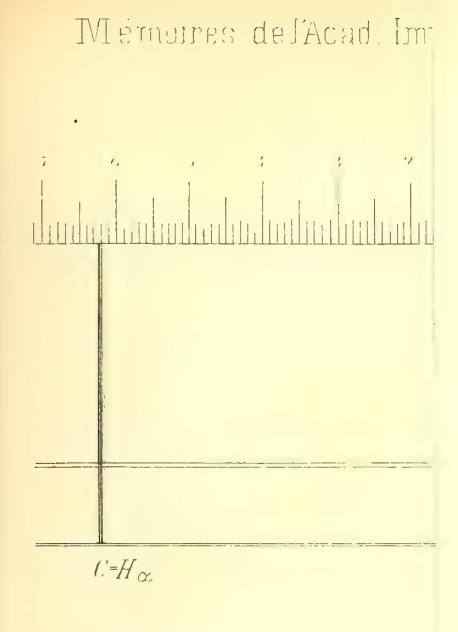
λ	Bemerkungen.	J	λ	Bemerkungen.	J	λ	Bemerkungen.	J
5645,17		1	5464,30		1	5265,78	x	3
41,54		3	59,90	s Hg.		63,65		3
33,43	o	3	56,18		1	60,94		2
30,97		1	53,96		1	56,23		2
29,30		2,3	51,45		1,2	37,36		2
25,80		2,3	45,85		1	30,30		1
22,89		1	38,98		1	28,05		2
21,24		1	33,83		3,4	25,43		2
19,05		1,2	29,96		1	21,66		2
15,33		1	27,84		1	19,73		1
10,80		4	25,00		3,4	13,67		2
07,84		1	19,03	t	4	04,39		1
02,46		2	17,36		1,2	01,93		1
5598,55		3	09,26		1	5198,93		2
95,65	p	3,4	08,18		1	95,90	y	3,4
90,25		1,2	06,26		1	90,09		1
78,33		1,2	04,50		1	87,55		1
73,11		1,2	00,48		2	80,14		2
71,25		1,2	5398,56		2	74,26		2
63,51		1	97,59		1	70,88		1
60,85		1	94,15		1	68,09		1
54,04		1,2	91,67		1	64,59		1
51,45		2,3	90,51		1	56,25		1
46,67		1	87,53	u	4	53,86		2
42,26		2,3	86,05		2	46,48	z	2,3
36,40	q	4	72,59		2	42,84		2,3
32,84		1	65,00		2,3	36,65		1
29,04		1	55,78		1	33,66		1
25,98		1,2	43,17		1	31,54		1
23,04		1	55,87		2,3	27,29		1
20,52		1	31,04		1	22,56		1,2
17,24		2,3	21,36		1	20,61		1
14,32		1	19,60		1	13,29	a′	3
06,78		1	17,28		2	08,45		1,2
04,50	r	4	13,18		1	06,46		1,2
5498,45		4	08,38		2	02,78		2,3
94,79		3	02,64	w	4	5099,06		1
93,07		1	5290,78		3	95,58		1
80,04		4	83,64		2,3	94,20		1
73,81		1,2	77,78		1	89,54		1
70,64		1	72,00		3	84,56	b′	3,4

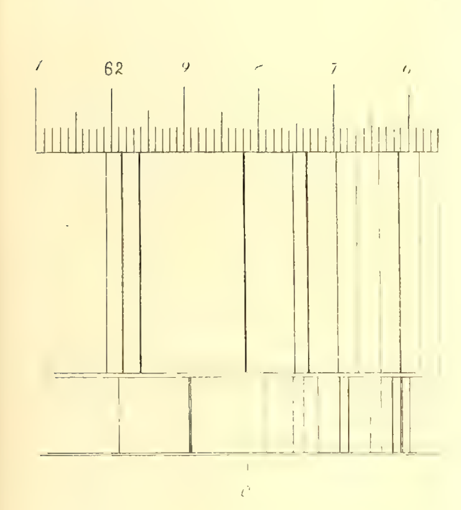
λ	Bemerkungen.	J	λ	Bemerkungen.	J	λ	Bemerkungen.	J
5081,00		3	4933,54		5	4742,53		1,2
79,83		3	31,50	*f'* (4933,54–27,95)	2	41,86		1,2
74,90		2	27,95		5	40,31		1
71,82		1,2	24,84		1,2	22,33		3
69,53		1,2	23,58		1	20,43		1
67,46		3,4	18,42		2	18,33	*m'*	4
63,32		3,4	08,16		2	13,14		2
61,22		2	05,50		2	10,33		1
54,22	*c'*	4,5	01,00		1	08,72		2,3
48,73		2	00,24		1	01,63	dpl.	1
47,11		2	4895,65		2	4691,22		1,2
40,91		3	90,46		2	89,39		2
38,94		3	87,68		1	85,97		1,2
29,60		3	85,45		1,2	85,47		1,2
19,80		1	83,14		1,2	83,67		1
15,87		3	77,16		1	83,00	*n'*	3
14,13		4	75,23	*g'*	3	81,66		2
12,21	*d'*	4,5	72,40		3	79,60		2
10,76		1,2	68,78		1	78,30		1,2
07,54		3	66,34		1	74,58		2
02,70		3,4	60,60	*h'* H_β		74,02		2
4997,26		2	55,77		2	72,51		1
95,80		2	48,57		3	70,76		2
89,53		1,2	42,67		1,2	67,00		1
88,64		1	41,45		1,2	64,90		2
82,54		1	37,31	*i'*	2,3	62,25		2,3
79,62		3	22,20		2	60,74		2
78,16		1	12,93		2	59,58		1,2
77,24		1	4796,81	*k'*	3	52,26		2,3
75,60		1	96,08		2	44,40		1
72,51	*e'*	4	92,97		2	33,60		1
68,44		2,3	89,93		1,2	33,10	*o'*	4,5
66,13		3	88,41		1,2	30,68		4
60,42		1	85,00		1,2	26,86		3,4
56,02		3	83,74		1,2	24,34		2,3
54,92		3	81,68		1	19,94		1
52,03		1	79,77		2	17,54		3
44,21		1	76,36		2	16,79		3
41,67		1	72,92		1	06,64		1,2
38,82		2	69,56		1	4582,03		3
35,80		1	62,53	*l'*	2,3	80,83		1

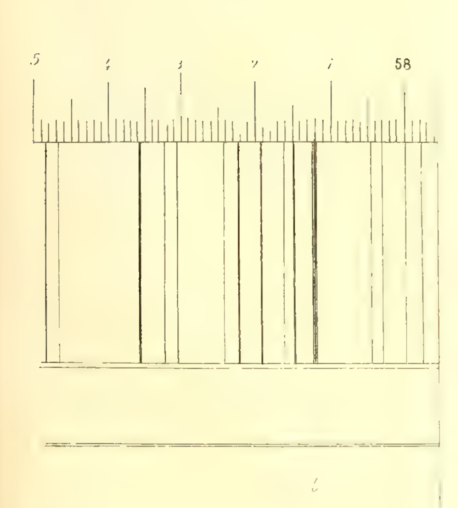
λ	Bemerkungen.	J	λ	Bemerkungen.	J	λ	Bemerkungen.	J
4579,44	p'	4	4537,05		1,2	4473,72		3
77,12		2	33,72	q'	3	66,64		2,3
74,80		2,3	32,06		1,2	60,62	s'	3
71,74	v.	4	28,07		2	58,47		1
67,21		4	23,02		2	56,36		2
64,38		1	22,27		1	55,28		1
62,86		2	20,40	Zwischen	1	52,60		1
61,41		2	14,83	diesen beiden	1	50,32		1
57,85	v.	2	09,85	Paaren feine	1	49,18		1
56,47	v.	2	04,88	Linien.	1	47,24	t'	3
53,33		3	01,03		1	44,72		3
50,23		2	4497,53	r' v.	4	43,63		1
48,97		1	92,84		1	17,04		2
47,09		1	89,75		3	12,00	u'	
42,87		1,2	85,20		2			
38,39		1,2	76,64		1			

Der Darstellung des Spectrums, welche diese Tafeln im Verein mit der Zeichnung gewähren, glaube ich wohl ohne Uebertreibung eine erhebliche Vollständigkeit beimessen zu können. Eine Vermehrung der Anzahl der Linien durch Anwendung noch grösserer Dispersion und Intensitätssteigerung des erregenden Inductionsstromes wird nur in beschränkterem Umfange möglich sein und jedenfalls nur auf sehr schwache Linien Bezug haben können. Uebrigens ist die Forcirung des Stromes nur bis auf eine gewisse, von der Beschaffenheit der Spectralröhren abhängige Grenze möglich und ich glaube bei den von mir angewandten Röhren, mich dieser Grenze nach Möglichkeit genähert zu haben.

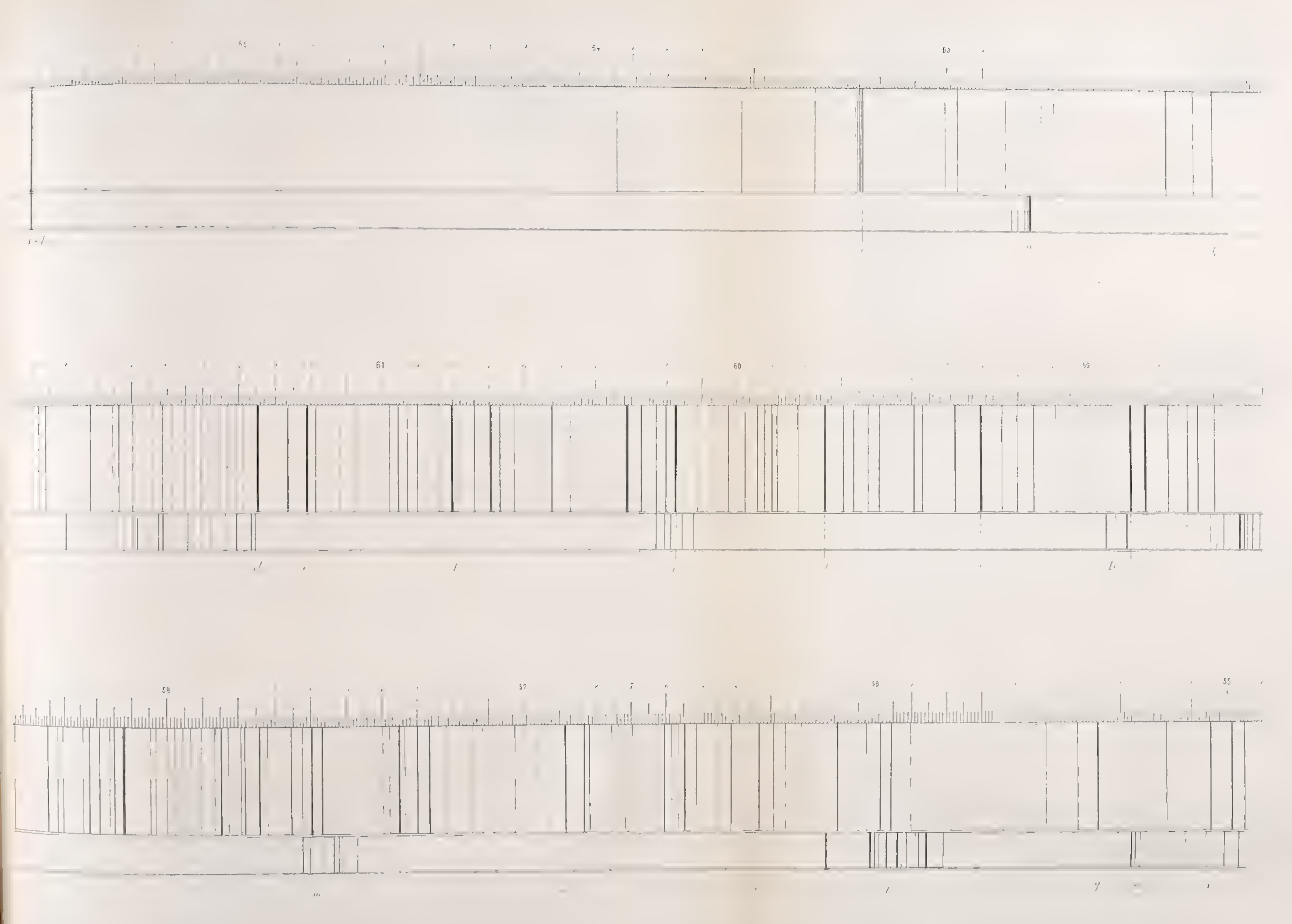
Die Vergleichung der Zeichnung mit der früher von mir publicirten lässt die Uebereinstimmung der Hauptlinien in beiden Fällen so befriedigend hervortreten, wie es in Anbetracht des beschränkteren Leistungsvermögens des kleineren Spectralapparates nur erwartet werden kann. Bei den vielfachen Modificationen, welche während dieser Untersuchungen in Bezug auf die Präparation des Gases und die angewandten Spectralröhren stattgefunden haben, liegt, meiner Meinung nach, darin nicht nur für die Beständigkeit des Spectrums, sondern auch für die schon früher von mir geäusserte Ansicht, über die wirkliche Zugehörigkeit desselben zum Wasserstoffe, ein sehr bindender Beweis. Sollte es unter den vielen schwachen Linien des Spectrums mir nicht vollständig gelungen sein, alle fremden Linien zu eliminiren, so hege ich doch die Hoffnung, dass dies nur selten der Fall sein wird, und jedenfalls nicht in solchen Fällen, die für die Charakteristik des Spectrums von irgend welcher Bedeutung wären.





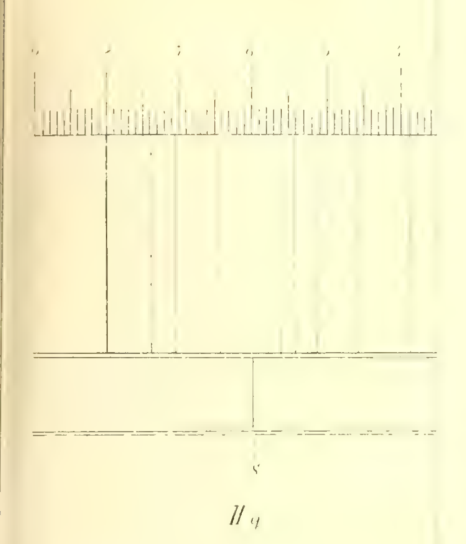


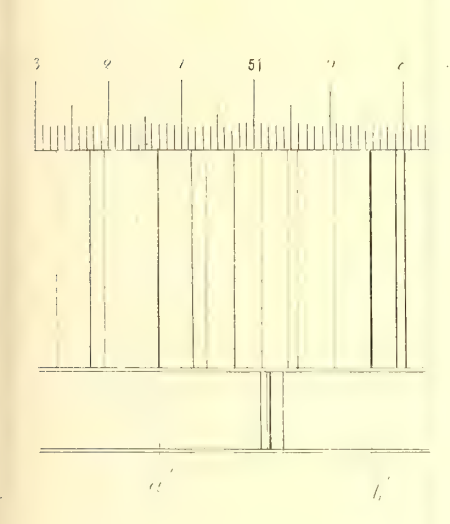
Hasselberg. del.

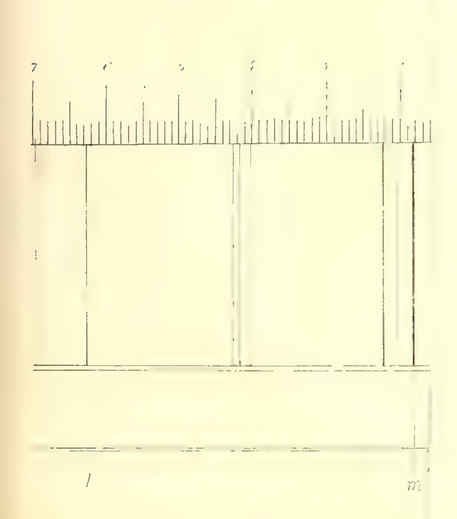


Hasselberg del

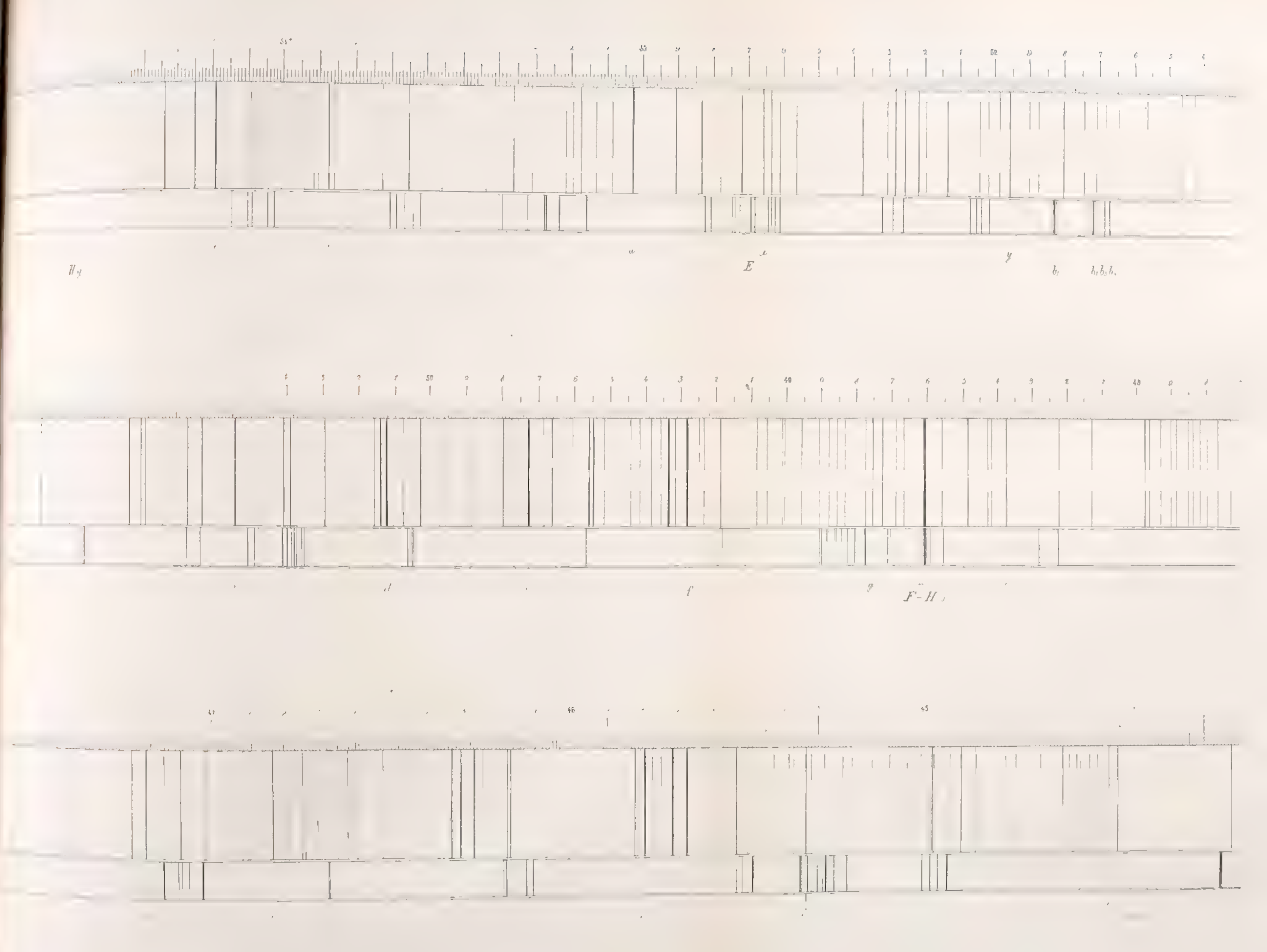
Metallographie v Ch.Ivanson. Petersb. Seite ... St.Petersb







Hasselberg. del.



Metallographie v. Ch. Ivanson. Petersb. Seite. Gr. Pr. N. 1. St. Petersb.

Ouvrages astronomiques et géodésiques publiés dans la VII. Série des Mémoires de l'Académie Impériale des sciences:

T. I, № 1. **Struve, O.** Nouvelle détermination de la parallaxe annuelle des étoiles α Lyrae et 61 Cygni. 1859. Pr. 45 K. = 1 Mk. 50 Pf.

№ 6. **Schubert, T. F.** Essai d'une détermination de la véritable figure de la terre. Avec 1 pl. 1859. Pr. 35 K. = 1 Mk. 20 Pf.

T. II, № 1. **Struve, O. u. Winnecke, Dr. A.** Pulkowaer Beobachtungen des grossen Cometen von 1858. Erste Abtheilung: Beobachtungen am Refractor, angestellt von O. Struve, Mitgliede der Akademie. Zweite Abtheilung: Beobachtungen am Heliometer nebst Untersuchungen über die Natur des Cometen von Dr. A. Winnecke, Adjunct-Astronomen der Hauptsternwarte. Mit 6 Taf. 1859. Pr. 1 R. 50 K. = 5 Mk.

№ 4. **Struve, O.** Beitrag zur Feststellung des Verhältnisses von Keppler zu Wallenstein. 1860. Pr. 30 K. = 1 Mk.

T. III, № 5. **Baeyer, J. J.** Ueber die Strahlenbrechung in der Atmosphäre. Avec 1 pl. lith. 1860. Pr. 65 K. = 2 Mk. 20 Pf.

T. IV, № 1. **Struve, O.** Beobachtung der totalen Sonnenfinsterniss vom 18. (6.) Juli 1860 in Pobes. Nach den Berichten der einzelnen Theilnehmer zusammengestellt. Mit 3 Taf. 1861. Pr. 85 K. = 1 Mk. 80 Pf.

T. V, № 4. **Struve, O.** Observations de la grande nébuleuse d'Orion, faites à Cazan et à Poulkova. I^e Partie: Mémoire de M. Liapounov sur les observations de Cazan. IIe Partie: O. Struve, Additions au mémoire de M. Liapounov et Observations de Poulkova. Avec 4 pl. lith. 1862. Pr. 1 R. 35 K. = 4 Mk. 50 Pf.

T. VI, № 7. **Winnecke, A.** Beobachtungen des Mars um die Zeit der Opposition 1862. 1863. Pr. 40 K. = 1 Mk. 30 Pf.

№ 11. **Sawitsch, A.** Opposition des Mars im Jahre 1862, beobachtet auf der kleinen akademischen Sternwarte zu St. Petersburg. 1863. Pr. 25 K. = 80 Pf.

T VII, № 7. **Winnecke, A.** Pulkowaer Beobachtungen des hellen Cometen von 1862, nebst einigen Bemerkungen. Mit 6 lith. Taf. 1864. Pr. 90 K. = 3 Mk.

T. VIII, № 2. **Linsser, C.** Vier von De l'Isle beobachtete Plejaden-Bedeckungen, bearbeitet und mit Hansen's Mond-Tafeln verglichen. 1864. Pr. 25 K. = 80 Pf.

T. X, № 1. **Gyldén, H.** Untersuchungen über die Constitution der Atmosphäre und die Strahlenbrechung in derselben. Erste Abhandlung. 1866. Pr. 70 K. = 2 Mk. 30 Pf.

T. XII, № 4. **Gyldén, H.** Untersuchungen über die Constitution der Atmosphäre und die Strahlenbrechung in derselben. Zweite Abhandlung. 1868. Pr. 45 K. = 1 Mk. 50 Pf.

№ 5. **Struve, O.** Beobachtungen des grossen Cometen von 1861. Mit 1 lith. Taf. 1868. Pr. 50 K. = 1 Mk. 70 Pf.

T. XVI, № 10. **Gyldén, H.** Studien auf dem Gebiete der Störungstheorie. I. Entwickelung einiger Verbindungen elliptischer Functionen. 1871. Pr. 1 R. 5 K. = 3 Mk. 50 Pf.

T. XVII, № 1. **Kortazzi, J.** Bestimmung der Längen-Differenz zwischen Pulkowa, Helsingfors, Åbo, Lowisa und Wiborg. 1871. Pr. 60 K. = 2 Mk.

№ 10. **Fuss, V. u. Nyrén, M.** Bestimmung der Längen-Differenz zwischen den Sternwarten, Stockholm und Helsingfors ausgeführt im Sommer 1870. 1871. Pr. 35 K. = 1 Mk. 20 Pf.

T. XVIII, № 3. **Fuss, V.** Beobachtungen und Untersuchungen über die astronomische Strahlenbrechung in der Nähe des Horizontes. 1872. Pr. 40 K. = 1 Mk. 30 Pf.

№ 5. **Asten, E. v.** Resultate aus Otto von Struve's Beobachtungen der Uranustrabanten 1872. Pr. 25 K. = 80 Pf.

№ 10. **Asten, E. v.** Untersuchungen über die Theorie des Encke'schen Cometen. I. Berechnung eines wichtigen Theiles der absoluten Jupitersstörungen des Encke'schen Cometen. 1872. Pr. 65 K. = 2 Mk. 20 Pf.

T. XIX, № 2. **Nyrén, M.** Bestimmung der Nutation der Erdachse. 1872. Pr. 55 K. = 1 Mk. 80 Pf.
№ 10. **Nyrén, M.** Die Polhöhe von Pulkowa. 1873. Pr. 35 K. = 1 Mk. 20 Pf.
T. XXIII, № 3. **Nyrén, M.** Das Aequinoctium für 1865,0, abgeleitet aus den am Passageninstrumente und am Verticalkreise in den Jahren 1861 — 1870 in Pulkowa angestellten Sonnenbeobachtungen. 1876. Pr. 30 K. = 1 Mk.
T. XXVI, № 2. **Asten, E. v.** Untersuchungen über die Theorie des Encke'schen Cometen. II. Resultate aus den Erscheinungen 1819—1875. 1878. Pr. 1 R. = 3 Mk. 30 Pf.
№ 4. **Hasselberg, Dr. B.** Studien auf dem Gebiete der Absorbtionsspectralanalyse. Avec 4 pl. 1878. Pr. 1 R. = 3 Mk. 30 Pf.
T. XXVII, № 1. **Hasselberg, Dr. B.** Ueber das durch electrische Erregung erzeugte Leuchten der Gaze bei niedriger Temperatur. 1879. Pr. 25 K. = 80 Pf.
№ 11. **Struve, O.** Études sur le mouvement relatif des deux étoiles du système de 61 Cygni. 1880. Pr. 35 K. = 1 Mk. 20 Pf.
T. XXVIII, № 6. **Backlund, O.** Zur Theorie des Encke'schen Cometen. 1881. Pr. 70 K. = 2 Mk. 30 Pf.
T. XXX, № 4. **Lindemann, Ed.** Zur Beurtheilung der Veränderlichkeit rother Sterne. 1882. Pr. 15 K. = 50 Pf.
№ 7. **Hasselberg, Dr. B.** Untersuchungen über das zweite Spectrum des Wasserstoffs. Avec 1 pl. 1882. Pr. 30 K. = 1 Mk.
№ 8. **Struve, Hermann.** Ueber den Einfluss der Diffraction an Fernröhren auf Lichtscheiben. 1882. Pr. 90 K. = 3 Mk.
T. XXXI, № 1. **Struve, Hermann.** Zur Theorie der Talbot'schen Linien. 1883. Pr. 15 K. = 50 Pf.
№ 2. **Struve, Ludwig.** Resultate aus den in Pulkowa angestellten Vergleichungen von Procyon mit benachbarten Sternen. 1883. Pr. 45 K. = 1 Mk. 50 Pf.
№ 4. **Lindstedt, And.** Beitrag zur Integration der Differentialgleichungen der Störungstheorie. 1883. Pr. 20 K. = 70 Pf.
№ 9. **Nyrén, M.** L'aberration des étoiles fixes. 1883. Pr. 40 K. = 1 M. 30 Pf.

Imprimé par ordre de l'Académie Impériale des sciences.

Novembre, 1883. C. Vessélofsky, Secrétaire perpétuel.

Imprimerie de l'Académie Impériale des sciences. (Vass.-Ostr., 9e ligne, № 12.)

MÉMOIRES
DE
L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES DE ST.-PÉTERSBOURG, VIIE SÉRIE.
TOME XXXI, № 15.

ALLGEMEINE JUPITERSTÖRUNGEN
DES
ENCKE'SCHEN COMETEN

FÜR DEN BAHNTHEIL ZWISCHEN 152° 21′ 7″,62 UND 170° WAHRER ANOMALIE.

VON

Theodor Wittram.

(Lu le 6 septembre 1883.)

1̇5̇2̇8̇3̇6̇

ST.-PÉTERSBOURG, 1883.
Commissionnaires de l'Académie Impériale des sciences:

à St.-Pétersbourg: MM Eggers & Cie et J. Glasounof;
à Riga: M. N. Kymmel;
à Leipzig: Voss' Sortiment (G. Haessel).

Prix: 40 Kop. = 1 Mrk. 30 Pf.

MÉMOIRES
DE
L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES DE ST.-PÉTERSBOURG, VII[E] SÉRIE.
TOME XXXI, N° 15.

ALLGEMEINE JUPITERSTÖRUNGEN

DES

ENCKE'SCHEN COMETEN

FÜR DEN BAHNTHEIL ZWISCHEN 152° 21′ 7″,62 UND 170° WAHRER ANOMALIE.

VON

Th. Wittram.

(Lu le 6 septembre 1883.)

ST.-PÉTERSBOURG, 1883.
Commissionnaires de l'Académie Impériale des sciences:

à St.-Pétersbourg: MM. Eggers & C[ie] et J. Glasounof;
à Riga: M. N. Kymmel;
à Leipzig: Voss' Sortiment (G. Haessel).

Prix: 40 Kop. = 1 Mrk. 30 Pf.

Imprimé par ordre de l'Académie Impériale des sciences.
Novembre, 1883. C. Vessélofsky, Secrétaire perpétuel.

Imprimerie de l'Académie Impériale des sciences.
(Vass.-Ostr., 9 ligne, № 12.)

EINLEITUNG.

Die vorliegende Arbeit bildet eine Fortsetzung der von Asten begonnenen, von Backlund weiter fortgeführten Untersuchungen über die absoluten Jupiterstörungen des Encke'schen Cometen. Die Gründe, welche Asten bewogen, die Bearbeitung der Theorie des Encke'schen Cometen in wesentlich anderer Weise zu unternehmen, als es Encke selbst gethan hatte, sind in der Einleitung zu seiner Abhandlung: Untersuchungen über die Theorie des Encke'schen Cometen, I, Mém. de l'Acad. de St. Pétersb. 1872, ausführlich und überzeugend auseinandergesetzt worden. In einer zweiten Abhandlung hat indessen Asten im Hinweis auf die Verkürzung der Umlaufszeit des Cometen Zweifel an der Berechtigung, grade für den Encke'schen Cometen absolute Störungen zu entwickeln, ausgesprochen, angesichts welcher es nicht überflüssig erscheint, eine Fortführung dieser, von ihm selbst begonnenen Untersuchungen in kurzen Worten zu motiviren.

Zunächst ist die Behauptung Asten's, die säculare Acceleration der mittleren täglichen Bewegung des Encke'schen Cometen gehöre «mit zu den am Besten begründeten astronomischen Facten» nur mit einigem Vorbehalt zuzugeben. Es liegen nämlich bisher in den Arbeiten von Encke und Asten keineswegs die definitiven Beweise dafür vor, dass die Acceleration der täglichen Bewegung eine fortwährend gleichförmig auftretende ist. Um dies zu erhärten, erinnere ich nur an einige Thatsachen, die aus den erwähnten Arbeiten und neueren Untersuchungen von Backlund bekannt sind. Asten selbst hat gezeigt, dass die durch das Gravitationsgesetz allein nicht zu erklärende, räthselhafte Einwirkung auf die Bewegung des Cometen nicht während des ganzen, von ihm bearbeiteten Zeitraums in gleicher Weise aufgetreten, sondern dass man gezwungen ist, noch andere störende Momente zu supponiren, wenn es sich darum handelt, die Erscheinungen nach 1868 mit den früheren zu verbinden. Seinen Versuch, diese Unregelmässigkeit in der Beschleunigung der Umlaufszeit durch die Wirkung eines kleinen Planeten zu erklären, bezeichnet er selbst als einen Nothbehelf, und sieht in dieser Hypothese nur den «Ausdruck des speculativen Be-

dürfnisses des Astronomen». Dann aber kann die Darstellung der Beobachtungen in dem Zeitraum 1819—1868, welche Asten erreicht hat, nicht befriedigen, da trotz Einführung von fünf weiteren Unbekannten ausser den Correctionen der als Ausgangspunkt dienenden Elemente in die Bedingungsgleichungen, der wahrscheinliche Fehler eines Normalorts doch noch immer zu ± 9″,0 herauskommt. Dabei erscheinen einige Resultate recht unwahrscheinlich, so z. B. die Erdmasse, welche auf eine Sonnenparallaxe von 9″,0 führt, während bei der jetzigen Kenntniss dieses Elements es kaum wahrscheinlich ist, dass der Newcomb'sche Werth der Sonnenparallaxe 8″,848 noch um mehr als einige Hundertel Secunde fehlerhaft ist. Ferner ist hier das Resultat anzuführen, welches Backlund[1]) aus der Verbindung der Erscheinungen 1871—1881 erhalten hat. Die Acceleration der mittleren täglichen Bewegung kommt ungefähr nur halb so gross heraus, als wie sie von Asten für den Zeitraum 1819—1868 abgeleitet worden ist. Dabei ist die Darstellung der Beobachtungen als sehr befriedigend zu bezeichnen, da der wahrscheinliche Fehler eines Normalorts nur ± 2″,78 beträgt.

Alle diese Thatsachen zusammen machen es in hohem Grade unwahrscheinlich, dass es gelingen wird, die Bewegungsanomalieen des Encke'schen Cometen durch eine einzige, so einfache Hypothese zu erklären, wie es die Annahme einer säcularen Aenderung der mittleren täglichen Bewegung ist. Was speciell die Hypothese des widerstehenden Mittels und ihre Einführung in die Theorie des Cometen anlangt, so hat bereits Backlund (Astr. Nachr. № 2414) nachgewiesen, dass Asten's Verfahren nicht einwurfsfrei war, welches darin bestand, dass er die mittlere Bewegung und den Excentricitätswinkel des Cometen sich sprungweise bei jedem Periheldurchgang um constante Quantitäten ändern liess. Auch die periodischen Störungen, welche in der mittleren Bewegung, dem Excentricitätswinkel und der Perihellänge auftreten, wenn man die Encke'sche Hypothese gelten lassen will, sind nicht unbeträchtlich und dürften in diesem Falle nicht unberücksichtigt gelassen werden.

Wenn demnach die Theorie des Encke'schen Cometen im Augenblicke noch keineswegs so vollkommen ist, wie man es angesichts der auf dieselbe verwandten Mühe und Sorgfalt erwarten könnte, so muss man die Gründe der bisher noch ungenügenden Darstellung der Gesammtheit des Beobachtungsmaterials vornehmlich in den angewandten Methoden, die Störungen zu berechnen und ferner in der Incorrectheit der benutzten Hypothesen suchen. Die Gesetze, nach welchen der Attraction fremde Einflüsse auf die Bewegung des Cometen einwirken, wird man aber erst genauer studiren können, wenn in Bezug auf den ersten Punct vollkommene Klarheit erreicht ist. Asten hat bereits die Ansicht ausgesprochen, dass die nicht zu vermeidende Ungenauigkeit der speciellen Störungen vermuthlich die Hauptschuld an der Unvollkommenheit der erzielten Darstellung trage. Gegenüber dieser äusserst plausibeln Annahme ist es gewiss nur zu billigen, dass der Versuch gemacht

1) Astr. Nachr. № 2539.

wird, die Anhäufung von Fehlern durch Anwendung exact entwickelter, allgemeiner Störungsausdrücke zu vermeiden. Freilich würde auch eine solchergestalt bearbeitete Theorie nur für einen begrenzten Zeitraum Geltung haben können, denn wenn auch eine eigentliche säculare Variation der mittleren Bewegung, wie sie eine Folge der Existenz eines widerstehenden Mittels sein müsste, als nicht genügend erwiesen betrachtet werden kann, so ist andrerseits eine allmälige Verkürzung der Umlaufszeit doch zu gut constatirt, um geleugnet zu werden. Mit der Zeit werden deshalb die Störungsausdrücke zu ungenau werden, um den Lauf des Cometen mit hinreichender Annäherung darzustellen. Diesen Mangel würde aber die Theorie des Encke'schen Cometen mit den Theorien anderer Himmelskörper theilen. Auch von diesen wissen wir bisher noch nicht mit Gewissheit, dass ihre mittleren Bewegungen säcularen Aenderungen nicht unterworfen sind, eine Frage, die direct mit dem delicaten Stabilitätsproblem des Sonnensystems zusammenhängt.

So lange man jedoch von den allgemeinen Störungsausdrücken nicht mehr prätendirt, als dass sie der Bewegung des Cometen innerhalb begrenzter Zeiträume genügen, erscheint Asten's apodictisch hingestellte Behauptung, die Integration der Störungsgleichungen sei nur möglich, wenn die mittlere Bewegung frei von Säcularänderungen ist, als nicht genügend motivirt. Dieser Ausspruch Asten's scheint durch die Befürchtung hervorgerufen zu sein, solche Aenderungen der mittleren Bewegung des Cometen könnten eine Commensurabilität derselben mit der mittleren Bewegung des störenden Planeten zu Stande bringen. Bekanntlich hat in einem solchen Falle ein etwas anderes Verfahren einzutreten, keineswegs aber wird eine vorhandene Commensurabilität an und für sich dem Problem verhängnissvoll. Handelt es sich lediglich um Störungen erster Ordnung, so ist es innerhalb gewisser Grenzen nahezu gleichgiltig, was für eine mittlere Bewegung angenommen wird. Ist dieselbe so beschaffen, dass sie mit der mittleren Bewegung des störenden Körpers fast commensurabel ist, so kann allerdings die Unbequemlichkeit eintreten, dass bei Ermittelung der Constanten gewisse Glieder aus der Differenz grosser Zahlen bestimmt werden müssen. Diese Schwierigkeit ist indessen ausschliesslich formeller Natur und könnte sogar dadurch gänzlich vermieden werden, dass man in einem solchen Falle die Commensurabilität gradezu voraussetzt.

Die kleine allmälige Aenderung der mittleren Bewegung des Encke'schen Cometen wird zunächst nur eine Störung zweiter Ordnung und zwar von verhältnissmässig unbedeutendem Betrage hervorbringen. Bei der strengen Entwickelung der Störungen zweiter Ordnung wäre dieser Umstand natürlich in Berücksichtigung zu ziehen. Ohne eingehende Untersuchungen dieser Frage lässt sich allerdings noch nicht übersehen, in welcher Weise das zu geschehen hat, allein es steht zu erwarten, dass man auch hierbei nicht auf unüberwindliche Hindernisse stossen wird. Keinenfalls aber kann die aussergewöhnliche Störung des Encke'schen Cometen die allgemeinen Entwickelungen ungiltig machen, wie dies noch neuerdings[2]) behauptet worden ist.

1) P. Harzer, V. J. S. der Astr. Ges. 18 Jahrg. I.

Abgesehen von dem Interesse, welches der erste Versuch, allgemeine Störungen eines Cometen nach strengeren Methoden, als bisher geschehen, vollständig zu entwickeln, jedenfalls an und für sich darbietet, hat die Berechnung der absoluten Jupiterstörungen des Encke'schen Cometen nicht zu unterschätzende, practische Vortheile. Bei vielen Umläufen, während welcher die Entfernung des Cometen vom Jupiter gross bleibt, darf man sich mit Berücksichtigung der Störungen erster Ordnung begnügen, in andern Fällen aber die Berechnung der Störungen zweiter Ordnung gesondert absolviren. Selbst wenn also die Entwickelung der absoluten Jupiterstörungen zweiter Ordnung auf unerwartet grosse Schwierigkeiten stossen sollte, würde die Möglichkeit, für die Störungen erster Ordnung allgemeine Ausdrücke benutzen zu können, eine bedeutende Arbeitsverminderung involviren. Auch jetzt, wo die Störungsausdrücke noch nicht für sämmtliche Theile der Bahn vorliegen und demgemäss die Bestimmung der Constanten, welche den Integralen hinzuzufügen sind, noch nicht vorgenommen werden kann, behält das seine Richtigkeit. Aus der zum Schlusse mitzutheilenden Vergleichung des Resultates der allgemeinen Störungsausdrücke mit speciellen Störungen, welche mit Hilfe eines beträchtlich verschiedenen Elementensystems berechnet wurden, geht hervor, dass selbst für jenen Umlauf, wo die Störungen in dem betreffenden Bahntheil eine bedeutende Grösse erreichten, die Uebereinstimmung eine befriedigende ist. Es lässt sich voraussehen, dass die Jupiterstörungen während des augenblicklich stattfindenden Umlaufs, während dessen dieselben klein ausfallen müssen, sich mit vollkommen genügender Schärfe für den durch die partielle Anomalie ω_2 repräsentirten Bahntheil aus meinen Reihen werden entnehmen lassen.

1. Ehe ich an die Darlegung der numerischen Rechnungen gehe, möge eine kurze Ableitung der Hansen'schen Störungsgleichungen vorausgeschickt werden.

Bezeichne $z = t + \delta z$ die gestörte Zeit, so werden die gestörten Coordinaten des Himmelskörpers in seiner Bahn aus den Gleichungen erhalten:

$$c_0 + n_0 t + n_0 \delta z = \bar{\varepsilon} - e_0 \sin \bar{\varepsilon}$$
$$\bar{r} \cos \bar{f} = a_0 (\cos \bar{\varepsilon} - e_0)$$
$$\bar{r} \sin \bar{f} = a_0 \sqrt{1 - e_0^2} \sin \bar{\varepsilon}$$
$$r = \bar{r} (1 + \nu)$$

wobei die Relationen gelten: $f + \pi = \bar{f} + \pi_0$ und $df = d\bar{f}$. Setzt man ferner $h = \frac{k}{\sqrt{p}}$, so erhält man:

$$r^2 df = \frac{k^2}{h} \cdot dt$$
$$\bar{r}^2 d\bar{f} = \frac{k^2}{h_0} \cdot dz$$
$$\frac{d\delta z}{dt} = \frac{h_0}{h} \cdot \frac{1}{(1+\nu)^2} - 1$$

Mit Hilfe der Identität:

$$\frac{1}{(1+\nu)^2} = \left(\frac{\nu}{1+\nu}\right)^2 + \frac{2}{1+\nu} - 1,$$

und wenn noch

$$W = \frac{2h_0}{h} \cdot \frac{1}{1+\nu} - \frac{h_0}{h} - 1$$

gesetzt wird, entsteht die Gleichung:

$$\frac{d\delta z}{dt} = \frac{h_0}{h} \cdot \left(\frac{\nu}{1+\nu}\right)^2 + W$$

Um W umzuformen, verfährt man am einfachsten folgendermaassen:

Aus der Gleichung für r folgt:

$$\frac{1}{1+\nu} = \frac{\bar{r}}{p} \cdot \left\{1 + e \cos(\bar{f} + \pi - \pi_0)\right\}$$

$$= \frac{1}{p}\left\{\bar{r} + \bar{r} \cos \bar{f}\, (e \cos(\pi - \pi_0) - e_0 + e_0) + \bar{r} \sin \bar{f} \cdot e \sin(\pi - \pi_0)\right\}$$

$$= \frac{p_0}{p}\left\{1 + \frac{\bar{r}}{a_0} \cos \bar{f}\left(\frac{e \cos(\pi - \pi_0) - e_0}{1 - e_0^2}\right) + \frac{\bar{r}}{a_0} \sin \bar{f} \cdot \frac{e \sin(\pi - \pi_0)}{1 - e_0^2}\right\}$$

Sei nun:

$$\frac{2h}{h_0} - \frac{h_0}{h} - 1 = \Xi$$

$$\frac{1}{1 - e_0^2} \cdot \frac{2h}{h_0}\,[e \cos(\pi - \pi_0) - e_0] = \Upsilon$$

$$\frac{1}{1 - e_0^2} \cdot \frac{2h}{h_0} \cdot e \sin(\pi - \pi_0) = \Psi$$

so erhält man:

$$W = \Xi + \Upsilon \cdot \frac{\bar{r}}{a_0} \cos \bar{f} + \Psi \cdot \frac{\bar{r}}{a_0} \sin \bar{f}$$

Vernachlässigt man alle Glieder, welche von der Ordnung des Quadrats der störenden Kräfte sind, so wird:

$$\Xi = \frac{3\delta h}{h} = \frac{\delta n}{n} + \frac{3e\,\delta e}{1 - e^2}$$

$$\Upsilon = \frac{2\delta e}{1 - e^2}$$

$$\Psi = \frac{2e\delta\pi}{1 - e^2}$$

(I) .... $\frac{d\delta z}{dt} = \Xi + \Upsilon \cdot \frac{r}{a} \cos f + \Psi \cdot \frac{r}{a} \sin f$

Aus der ersten Gleichung für W folgt unmittelbar, dass bis auf Grössen 2ter Ordnung:

$$1 - \nu = \frac{h}{2h_0}\left(W + \frac{h_0}{h} + 1\right) \quad \text{oder:}$$

$$\nu = -\tfrac{1}{2} W - \tfrac{1}{2} \frac{\delta h}{h}$$

(II) .... $w = -\frac{1}{2} \frac{d\delta z}{dt} - \frac{1}{6} \Xi$

ν kann man hier mit der Störung des Log. hyp. des Radius Vector identificiren und ist deshalb in Gl. (II), wie üblich, mit w bezeichnet worden.

Es erübrigt noch, eine Gleichung für die Störung des Sinus der Breite aufzustellen. Der Ausdruck für den Sinus der gestörten heliocentrischen Breite lautet:

$$\sin b = \sin i \,.\, \sin (f + \pi - \sigma)$$

andrerseits ist:

$$\sin b_0 = \sin i_0 \,.\, \sin (\bar{f} + \pi_0 - \Omega_0)$$

Daher wird die Störung des Sinus der Breite:

$$\delta s = \sin (\bar{f} + \pi_0 - \Omega_0) \cdot q - \cos (\bar{f} + \pi_0 - \Omega_0) \cdot p$$

wenn

$$q = \sin i \cos (\sigma - \Omega_0) - \sin i_0$$
$$p = \sin i \sin (\sigma - \Omega_0)$$

gesetzt wird.

Lässt man die Glieder zweiter Ordnung fort, so wird mit Berücksichtigung der Relation $d\sigma = \cos i \, d\Omega$:

$$q = \cos i \, \delta i$$
$$p = \sin i \cos i \, \delta \Omega$$

Um die Störungen der Hansen'schen Coordinaten berechnen zu können, ist es vor allem nothwendig, die Grössen Ξ, Υ, Ψ, p, q oder vielmehr ihre Differentialquotienten durch die Ableitungen der Störungsfunction auszudrücken. Da δn, δe, $\delta \pi$, δi und $\delta \Omega$ die Integrale von $\frac{dn}{dt}$, $\frac{de}{dt}$, etc. sind, so können in die Ausdrücke für $\frac{d\Xi}{dt}$, $\frac{d\Upsilon}{dt}$, etc. die Lagrange'schen Variationen der Elemente eingesetzt werden.

Letztere werden leicht auf die Form gebracht:

$$\begin{aligned}
\frac{dn}{dt} &= -3\,anh \left\{ e \sin f \left(\frac{d\Omega}{dr}\right) + \frac{p}{r^2} \left(\frac{d\Omega}{df}\right) \right\} \\
\frac{de}{dt} &= ph \left\{ \sin f \left(\frac{d\Omega}{dr}\right) + \frac{1}{r} (\cos f + \cos \varepsilon) \left(\frac{d\Omega}{df}\right) \right\} \\
\frac{d\pi}{dt} &= \frac{ph}{e} \left\{ -\cos f \left(\frac{d\Omega}{dr}\right) + \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{r}\right) \sin f \left(\frac{d\Omega}{df}\right) \right\} \\
\sin i \cdot \frac{d\Omega}{dt} &= h \sin (f + \pi - \Omega) \cdot \frac{z'}{r'} \left(\frac{d\Omega}{dH}\right) \\
\frac{di}{dt} &= h \cos (f + \pi - \Omega) \cdot \frac{z'}{r'} \left(\frac{d\Omega}{dH}\right)
\end{aligned}$$

wo $z' = - r' \sin J \sin (f' + \Pi')$ den Abstand des störenden Planeten von der Bahnebene des gestörten, H den Cosinus des Winkels zwischen den Radienvectoren der beiden Himmelskörper bedeutet. Die Bezeichnungen sind übrigens durchgehend die allgemein üblichen.

Aus der Zusammensetzung von δs ersieht man, dass wenn in den Ausdrücken für $\frac{d\Omega}{dt}$ und $\frac{di}{dt}$ an Stelle des Arguments der Breite die wahre Anomalie gesetzt wird, ersteres aus der Gleichung:

$$\text{(III)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \delta s = \delta q \sin f - \delta p \cos f$$

bestimmt werden muss, wo δq und δp wiederum die Integrale von $\frac{dq}{dt}$ und $\frac{dp}{dt}$ bezeichnen.

Führt man die angedeuteten Operationen aus, so entstehen die Ausdrücke:

$$\text{(IV)} \ldots\ldots \begin{cases} \frac{d\Xi}{dt} = -3h\left(\frac{d\Omega}{df}\right) \\ \frac{d\Upsilon}{dt} = 2ha\left\{\frac{1}{r}(\cos f + \cos \varepsilon)\left(\frac{d\Omega}{df}\right) + \sin f\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)\right\} \\ \frac{d\Psi}{dt} = 2ha\left\{\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{r}\right)\sin f\left(\frac{d\Omega}{df}\right) - \cos f\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)\right\} \\ \sec i \cdot \frac{dq}{dt} = -h \sin J \sin(f' + \Pi') \cos f \left(\frac{d\Omega}{d\mathrm{H}}\right) \\ \sec i \cdot \frac{dp}{dt} = -h \sin J \sin(f' + \Pi') \sin f \left(\frac{d\Omega}{d\mathrm{H}}\right) \end{cases}$$

Um eine für die Rechnung bequemere Form herzustellen, sei:

$$\cos \Pi' = \gamma \sin G \quad , \quad -\sin \Pi' = \gamma' \sin G' \quad , \Pi + G = \Gamma$$
$$\cos J \sin \Pi' = \gamma \cos G \quad , \cos J \cos \Pi' = \gamma' \cos G' \quad , \Pi + G' = \Gamma'$$
$$\frac{m'}{\Delta^3} = L \quad , \quad \frac{m'}{\Delta^3}\cdot\frac{r'}{a'}\cos f' = M \quad , \quad \frac{m'}{\Delta^3}\cdot\frac{r'}{a'}\sin f' = N$$
$$-\frac{m'}{r'^3} = l \quad , -\frac{m'}{r'^3}\cdot\frac{r'}{a'}\cos f' = m \quad , -\frac{m'}{r'^3}\cdot\frac{r'}{a'}\sin f' = n$$

Alsdann lässt sich den Ableitungen der Störungsfunction die Form geben:

$$\left(\frac{d\Omega}{dr}\right) = a'\gamma \sin(f + \Gamma)(M + m) + a'\gamma' \sin(f + \Gamma')(N + n) - r L$$
$$\left(\frac{d\Omega}{df}\right) = ra'\gamma \cos(f + \Gamma)(M + m) + ra'\gamma' \cos(f + \Gamma')(N + n)$$
$$\left(\frac{d\Omega}{d\mathrm{H}}\right) = rr'(L + l)$$

In den später mitzutheilenden Entwickelungen der Grössen L, M, N, m und n ist der Factor $\rho = \frac{1}{12}\cdot\frac{a'^2 a \cdot m'}{\sin 1''}$ enthalten. Man erhält somit die Differentialquotienten der Elementenstörungen Ξ, Υ, Ψ, δp und δq in Secunden ausgedrückt. Nach der partiellen Anomalie ω_2 genommen, entstehen für diese Differentialquotienten folgende Ausdrücke:

$$
\text{(V)}\left\{
\begin{aligned}
&{}^1/_{12}\,\frac{d\Upsilon}{d\omega_2} = 2\alpha\sec\varphi\cdot\frac{ndt}{d\omega_2}\Big\{[\cos\Gamma + A\cos(f+\Gamma)]\gamma(M+m) + [\cos\Gamma' + A\cos(f+\Gamma')]\gamma'(N+n) - \frac{r}{a}\sin f.\alpha.L\Big\}\\
&{}^1/_{12}\,\frac{d\Psi}{d\omega_2} = -2\alpha\sec\varphi\cdot\frac{ndt}{d\omega_2}\Big\{[\sin\Gamma - B\cos(f+\Gamma)]\gamma(M+m) + [\sin\Gamma' - B\cos(f+\Gamma')]\gamma'(N+n) - \frac{r}{a}\cos f.\alpha.L\Big\}\\
&{}^1/_{12}\,\frac{d\Xi}{d\omega_2} = -3\alpha\sec\varphi\cdot\frac{ndt}{d\omega_2}\Big\{\frac{r}{a}\cos(f+\Gamma)\,\gamma\,(M+m) + \frac{r}{a}\cos(f+\Gamma')\,\gamma'\,(N+n)\Big\}\\
&{}^1/_{12}\sec i\,\frac{dp}{d\omega_2} = -\alpha\sec\varphi\sin J\cdot\frac{ndt}{d\omega_2}\cdot\frac{r}{a}\sin f\,\Big\{\sin\Pi'\,(M+m) + \cos\Pi'\,(N+n)\Big\}\\
&{}^1/_{12}\sec i\,\frac{dq}{d\omega_2} = -\alpha\sec\varphi\sin J\cdot\frac{ndt}{d\omega_2}\cdot\frac{r}{a}\cos f\,\Big\{\sin\Pi'\,(M+m) + \cos\Pi'\,(N+n)\Big\}
\end{aligned}
\right.
$$

Der Kürze halber bezeichnen hier A, B, α der Reihe nach die Quantitäten: $\frac{r}{a(1-e^2)}(\cos f + e)$, $\frac{r}{a(1-e^2)}\cdot\sin f$ und $\frac{a}{a'}$.

Da alle Entwickelungen nach der vom Orte des Cometen abhängenden Variablen oder der partiellen Anomalie mit Hilfe der mechanischen Quadratur, nach der mittleren Anomalie des Jupiter dagegen analytisch ausgeführt werden sollen, so werden $(M+m)$, $(N+n)$, L für eine Reihe von Specialwerthen der partiellen Anomalie zu entwickeln sein. Nachdem ihre Factoren im Gleichungensystem (V) ebenfalls für dieselben Werthe von ω_2 berechnet sind, muss auf dasselbe die mechanische Quadratur angewandt werden. Auch in diesem Bahntheile genügte eine Theilung des Umkreises in 24 Theile.

2. Die nachfolgenden Rechnungen beziehen sich auf den Theil der Cometenbahn, welcher zwischen 152° 21′ 7″,62 und 170° der wahren Anomalie eingeschlossen und dessen partielle Anomalie von Asten mit ω_2 bezeichnet worden ist. — Zunächst sollen die Ausdrücke für die Coordinaten des Cometen und des Jupiter, in Reihen nach der partiellen Anomalie aufgestellt werden. — Wie schon Asten betont hat, ist es zweckmässig, bei der Partition der Bahn Theilpunkte in die Enden der grossen Axe zu verlegen, da dadurch in den Störungsausdrücken die partielle Anomalie ausschliesslich in Cosinusreihen auftritt. Freilich wären, wie Backlund in seinem Memoire: Zur Theorie des Encke'schen Cometen, Mém. de l'Acad. de St. Pétersb. 1881, nachweist, die obern Theile der Cometenbahn bedeutend leichter absolvirt worden, wenn man, auf den erwähnten Vortheil verzichtend, dieselben gleich anfangs etwas kleiner genommen, alsdann aber gemeinschaftlich behandelt hätte. Für die Entwickelung der negativen dritten Potenzen der Entfernungen und deren Producte in die Coordinaten des Jupiter hätte dann mit Vortheil eine Methode in Anwendung gebracht werden können, nach welcher diese Grössen sich als Potenzreihen nach $\left(\frac{k'}{\Delta}\right)$ darstellen lassen. (Mit Δ ist hier $\Delta am\,\frac{2K}{\pi}x$ bezeichnet). Im vorliegenden Falle ist indessen die Theilung der Bahn bereits gegeben und demgemäss sollen auch nur die in den folgenden Rechnungen angewandten Formeln zusammengestellt werden.

Führt man, wie Asten nach Gylden's Vorschlag es gethan hat, die partielle Anomalie ω durch die Gleichung ein:

$$(1) \ldots\ldots\ldots\ldots \sin \tfrac{1}{2} \varepsilon = k \sin am \frac{2K}{\pi} \omega \text{ , mod. } k$$

so lassen sich die Reihenentwickelungen für r , $r \cos f$, $r \sin f$ und nt sehr leicht erhalten. Die Zahlenwerthe der Coefficienten sind von Asten (Abhandl. I, pag. 11 und 12) gegeben, wobei der Modul k so angenommen wurde, dass die wahren Anomalien der Theilpunkte resp. 170° und 190° betragen. Wenn ω sich von $-\frac{\pi}{2}$ bis $+\frac{\pi}{2}$ ändert, so nimmt ε alle Werthe von — 146° 5′ 15″,66 bis + 146° 5′ 15″,66 an. Ein weiterer Theilpunkt wurde in das Perihel gelegt durch Einführung der neuen partiellen Anomalie ω_1 mittelst der Relation:

$$(2) \ldots\ldots\ldots\ldots \sin \omega = \sin^2 \tfrac{1}{2} \omega_1$$

und mit Hilfe derselben müssen die Ausdrücke für $\sin (2n-1)\,\omega$ und $\cos 2n\omega$ ermittelt werden. Man sieht aber leicht, dass sie die Form annehmen:

$$\begin{aligned} \sin (2n-1)\,\omega &= \Sigma\, S_m^{(n)} \cos m\omega_1 \\ \cos 2n\omega &= \Sigma\, S'^{(n)}_m \cos m\omega_1 \end{aligned}$$

wobei die Coefficienten $S_m^{(n)}$ und $S'^{(n)}_m$ auf verschiedenen Wegen erhalten werden können. Da diese Transformationsformeln in den Störungsrechnungen häufiger Anwendung finden, führe ich die Logarithmen ihrer Coefficienten auf, wodurch ihre Benutzung erheblich erleichtert wird.

m	$\log S_m^{(1)}$	$\log S_m^{(2)}$	$\log S_m^{(3)}$	$\log S_m^{(4)}$	$\log S_m^{(5)}$	$\log S_m^{(6)}$	$\log S_m^{(7)}$	$\log S_m^{(8)}$	$\log S_m^{(9)}$	$\log S_m^{(10)}$
0	9,6989700	9,3979400	9,273001	9,19382	9,1359	9,0900	9,0523	9,0201	8,992	8,967
1	9,6989700*n*	9,5740313	9,494850	9,43686	9,3911	9,3533	9,3212	9,2931	9,268	9,246
2		9,8750613*n*	— ∞	9,03892	9,1480	9,1772	9,1829	9,1792	9,171	9,162
3		9,0969100	9,892790*n*	9,43686*n*	8,9720*n*	8,0311*n*	8,5228	8,7689	8,870	8,923
4			9,494850	9,817069*n*	9,62518*n*	9,4113*n*	9,1917*n*	8,9529*n*	8,659*n*	8,178*n*
5			8,494850*n*	9,692129	9,62518*n*	9,6386*n*	9,5410*n*	9,4209*n*	9,294*n*	9,162*n*
6				9,03892*n*	9,78488	9,1450*n*	9,5186*n*	9,5380*n*	9,492*n*	9,122*n*
7				7,89279	9,3589*n*	9,7983	9,0926	9,1725*n*	9,409*n*	9,454*n*
8					8,5460	9,5625*n*	9,7321	9,4931	8,724	8,734*n*
9					7,2907*n*	8,9605	9,6862*n*	9,5569	9,589	9,341
10						8,0311*n*	9,2497	9,7443*n*	9,120	9,542
11						6,6887	8,5228*n*	9,4551	9,739*n*	8,976*n*
12							7,5015	8,8825*n*	9,596	9,360*n*
13							6,0866*n*	8,0585	9,154*n*	9,681
14								6,9617*n*	8,478	9,360*n*
15								5,4845	7,575*n*	8,807
16									6,414	8,048*n*
17									4,882*n*	7,08

m	$\log S'^{(1)}_m$	$\log S'^{(2)}_m$	$\log S'^{(3)}_m$	$\log S'^{(4)}_m$	$\log S'^{(5)}_m$	$\log S'^{(6)}_m$	$\log S'^{(7)}_m$	$\log S'^{(8)}_m$	$\log S'^{(9)}_m$
0	9,3979400	9,2730013	9,193820	9,135828	9,09007	9,0523	9,0201	8,992	8,967
1	0,0000000	9,6989700	9,574031	9,494850	9,43686	9,3945	9,3533	9,321	9,294
2	9,3979400*n*	9,8750613	9,712334	9,608793	9,53377	9,4754	9,4280	9,388	9,353
3	....	9,6989700*n*	9,640978	9,640978	9,59176	9,5412	9,4951	9,454	9,418
4	....	8,7958800	9,817069*n*	9,038918	9,43686	9,4890	9,4868	9,468	9,445
5	....	....	9,273001	9,837273*n*	9,23521*n*	8,8092	9,2283	9,333	9,370
6	....	....	8,193820*n*	9,536243	9,77145*n*	9,5496*n*	9,1345*n*	7,429	8,936
7	....	....	....	8,795880*n*	9,68867	9,5939*n*	9,6145*n*	9,447*n*	9,183*n*
8	....	....	....	7,591760	9,16579*n*	9,7624	9,1518*n*	9,541*n*	9,524*n*
9	....	....	....	....	8,29073	9,4146*n*	9,7668	9,009	9,287*n*
10	....	....	....	....	6,98970*n*	8,7456	9,5816*n*	9,696	9,453
11	....	....	....	....	....	7,7678*n*	9,0715	9,684*n*	9,517
12	....	....	....	....	....	6,3876	8,2934*n*	9,312	9,729*n*
13	....	....	....	....	....	....	7,2327	8,684*n*	9,487
14	....	....	....	....	....	....	5,786*n*	7,819	8,985*n*
15	....	....	....	....	....	....	....	6,689*n*	8,266
16	....	....	....	....	....	....	....	5,183	7,328*n*
17	....	....	....	....	....	....	....	....	6,137

Bei der Aufstellung des Ausdruckes für das Quadrat der Entfernung des Cometen vom Jupiter erwies es sich indessen, dass die Convergenz in Bezug auf die partielle Anomalie ω_1 noch nicht genügend war. Es war deshalb erforderlich, eine weitere Theilung vorzunehmen. Der neue Separationspunkt wurde so gewählt, dass in ihm die Anomalie ω_1 den Werth $100°$ hatte und die endgiltige partielle Anomalie ω_2 wurde dabei durch die Beziehung

$$\cos \omega_1 = - l'^2 - l^2 \cos \omega_2$$

definirt. Für $\omega_1 = 100°$ muss hier ω_2 den Werth $180°$, für $\omega_1 = 180°$ den Werth $0°$ erhalten. Die Constanten l^2 und l'^2 bestimmen sich daher aus den Gleichungen:

$$l^2 + l'^2 = 1$$
$$l^2 - l'^2 = \cos 100°$$

Die daraus hervorgehende Relation zwischen der ursprünglichen Anomalie ω und der definitiven ω_2:

(3) .... $\sin \omega = 1 - \cos^2 50° \,.\, \sin^2 \tfrac{1}{2}\, \omega_2$

hat in den Rechnungen häufig Verwendung gefunden.

Zur Verwandlung von $\cos n\omega_1$ in Cosinusreihen nach ω_2 hat bereits Asten eine bequeme Tafel gegeben.

Für den in Rede stehenden Bahntheil sind nun vor allen Dingen die Coordinaten des Cometen $\frac{r}{a} \cos f$ und $\frac{r}{a} \sin f$ sowie $\frac{r}{a}$ und nt in Reihen nach ω_2 auszudrücken. Durch successive Anwendung der S und T — Coefficienten (Asten I, pag. 22 und 23) wurde für die betreffenden Grössen erhalten:

$\frac{r}{a}\cos f =$		$\frac{r}{a}\sin f =$		$\frac{r}{a} =$		$nt =$		$\frac{ndt}{d\omega_2} =$	
$0{,}1396539n$		$9{,}6258313$		$0{,}1615408$		$0{,}1711193$			
$+9{,}5295234n$	$\cos\omega_2$	$+9{,}0674113n$	$\cos\omega_2$	$+9{,}4578422$	$\cos\omega_2$	$+9{,}7776645$	$\cos\omega_2$	$9{,}7776645n$	$\sin\omega_2$
$+8{,}608914$	$\cos 2\omega_2$	$+8{,}093898n$	$\cos 2\omega_2$	$+8{,}537232n$	$\cos 2\omega_2$	$+7{,}27923n$	$\cos 2\omega_2$	$+7{,}58026$	$\sin 2\omega_2$
$+6{,}4315n$	$\cos 3\omega_2$	$+7{,}43098$	$\cos 3\omega_2$	$+6{,}3600$	$\cos 3\omega_2$	$+7{,}59956n$	$\cos 3\omega_2$	$+8{,}076677$	$\sin 3\omega_2$
$+6{,}5980n$	$\cos 4\omega_2$	$+6{,}2038n$	$\cos 4\omega_2$	$+6{,}5263$	$\cos 4\omega_2$	$+6{,}4714$	$\cos 4\omega_2$	$+7{,}07350n$	$\sin 4\omega_2$
$+5{,}6415$	$\cos 5\omega_2$	$+4{,}892n$	$\cos 5\omega_2$	$+5{,}5695n$	$\cos 5\omega_2$	$+4{,}914$	$\cos 5\omega_2$	$+5{,}6128n$	$\sin 5\omega_2$
$+4{,}041n$	$\cos 6\omega_2$	$+4{,}041$	$\cos 6\omega_2$	$+3{,}977$	$\cos 6\omega_2$	$+4{,}491n$	$\cos 6\omega_2$	$+5{,}2695$	$\sin 6\omega_2$
$+3{,}30n$	$\cos 7\omega_2$					$+3{,}48$	$\cos 7\omega_2$	$+4{,}322n$	$\sin 7\omega_2$
								$+3{,}90$	$\sin 8\omega_2$

Späterhin werden ebenfalls die Reihenentwickelungen für $\cos f$ und $\sin f$ nach ω_2 gebraucht; mit ihrer Hilfe wird die Störung der Breite aus den Elementenstörungen δp und δq erhalten. Man bekommt dieselben, wenn man die Reihe für $\frac{a}{r}$ aufstellt, und diese dann mit denen für $\frac{r}{a}\cos f$ und $\frac{r}{a}\sin f$ multiplicirt. Die Entwickelung von $\frac{r}{a}$ hatte die Form:

$$\frac{r}{a} = a_0 + a_1 \cos\omega_2 + a_2 \cos 2\omega_2 + \ldots\ldots\ldots$$

Setzt man

$$F = \frac{a_1}{a_0}\cos\omega_2 + \frac{a_2}{a_0}\cos 2\omega_2 + \frac{a_3}{a_0}\cos 3\omega_2 + \ldots\ldots\ldots$$

so wird

$$\frac{a}{r} = \frac{1}{a_0}\left\{1 - F + F^2 - F^3 + \ldots\ldots\ldots\right\}$$

Die hier auftretenden mechanischen Multiplicationen lassen sich sehr rasch erledigen. Nachdem die solchergestalt erhaltene Reihe für $\frac{a}{r}$ mit $\frac{r}{a}\cos f$ und $\frac{r}{a}\sin f$ multiplicirt war, ergaben sich für $\cos f$ und $\sin f$ die Ausdrücke:

$\cos f =$			$\sin f =$		
	$9{,}975891n$			$9{,}485247$	
	$+8{,}67949n$	$\cos\omega_2$		$+9{,}158372n$	$\cos\omega_2$
	$+8{,}01883$	$\cos 2\omega_2$		$+8{,}11644$	$\cos 2\omega_2$
	$+7{,}2190n$	$\cos 3\omega_2$		$+7{,}0739n$	$\cos 3\omega_2$
	$+6{,}381$	$\cos 4\omega_2$		$+6{,}007$	$\cos 4\omega_2$
	$+5{,}518n$	$\cos 5\omega_2$		$+4{,}778n$	$\cos 5\omega_2$
	$+4{,}62$	$\cos 6\omega_2$		$+3{,}90n$	$\cos 6\omega_2$

Die Reihen, welche die Coordinaten des Jupiter ausdrücken, haben die Form:

$$\frac{r'}{a'}\cos f' = \Sigma\, C_i \cos ig'$$

$$\frac{r'}{a'}\sin f' = \Sigma\, D_i \sin ig'$$

wo $g' = c' + n't$, c' also, da wir die Zeit von dem Periheldurchgang des Cometen an rechnen, die mittlere Anomalie des Jupiter im Augenblicke desselben bezeichnet. Schreibt man dafür $g' = c' + \frac{n'}{n} \cdot nt$ und substituirt für nt die obige Reihe, so erhält man g' als Function von c' und ω_2. Hier wollen wir noch c' durch c_1', die mittlere Anomalie des Jupiter zur Zeit des Apheldurchgangs des Cometen ersetzen und an Stelle dieser wiederum eine neue Variable ξ einführen, welche um 147° 42′ kleiner als c_1' ist. Letztere Substitution ist von Asten zu dem Zweck eingeführt worden, um die im Ausdruck für das Quadrat der Entfernung auftretenden Sinusglieder in c_1' möglichst zu verkleinern, und musste auch in meinem Bahntheile beibehalten werden, um überall die Gleichförmigkeit der Argumente zu wahren. Da demnach:

$$c_1' = c' + \frac{n'}{n} \cdot \pi = 147^\circ\ 42' + \xi$$

ist, so erhält g' die Form:

$$g' = \xi + 97^\circ\ 40'\ 48''\!,05 + \frac{n'}{n} \cdot nt = \xi + \varphi$$

Für φ entsteht dann die Reihe:

$$\begin{aligned}\varphi = 121^\circ\ 17'\ 27''\!,38 &+ 34352''\!,69 \cos \omega_2 \\ &- 109,03 \cos 2\omega_2 \\ &- 227,96 \cos 3\omega_2 \\ &+ 16,97 \cos 4\omega_2 \\ &+ 0,47 \cos 5\omega_2 \\ &- 0,18 \cos 6\omega_2 \\ &+ 0,02 \cos 7\omega_2\end{aligned}$$

Aus diesem Ausdrucke wurden nun durch Substitution von $\omega_2 = 15°, 30°, \ldots\ldots$ 165° die Specialwerthe von φ ermittelt. Zur Controlle wurde noch ein anderes Verfahren eingeschlagen, welches sich auf obige Formel (3) stützt. Es wurden aus derselben die $\omega_2 = 15°$ etc. entsprechenden Werthe von ω bestimmt, welche darauf in die ursprüngliche Reihe für nt eingesetzt wurden. Nach Multiplication der so erhaltenen Werthe von nt mit $\frac{n'}{n}$ und Hinzufügung von $147^\circ\ 42' - \frac{n'}{n} \cdot \pi$ mussten wieder dieselben Grössen erhalten werden. Die nach beiden Methoden berechneten Specialwerthe von φ werden demnach:

ω_2	φ	ω_2	φ
15°	130° 26′ 22″,56	45°	128° 4′ 42″,35
30	129 32 14,47	60	126 8 17,90

ω_2	φ			ω_2	φ		
75°	123°	50′	3″,01	135°	114°	29′	38″,54
90	121	19	33,54	150	113	0	34,73
105	118	48	17,46	165	112	5	40,39
120	116	28	8,67				

Die Coefficienten C und D wurden Asten's Abhandlung entlehnt und sodann mit Hilfe der Winkel φ folgende Ausdrücke für die Coordinaten des Jupiter abgeleitet:

$$\frac{r'}{a'} \cos f'$$

ω_2	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°	165°
cos 0ξ	8,8594725n	8,8594725n	8,8594725n	8,8594725n	8,8594725n	8,8594725n	8,8594725n	8,8594725n	8,8594725n	8,8594725n	8,8594725n
cos ξ	9,8116244n	9,8034704n	9,7897184n	9,7702746n	9,7453089n	9,7155418n	9,6825085n	9,6486736n	9,6172443n	9,5916669n	9,5749617n
cos 2ξ	7,581753n	7,659354n	7,760556n	7,865154n	7,961424n	8,043864n	8,110587n	8,161762n	8,198725n	8,223298n	8,237223n
cos 3ξ	6,87140	6,88324	6,89973	6,91697	6,93099	6,93875	9,93895	6,93233	6,92150	6,91003	6,90148
cos 4ξ	5,5500n	5,5400n	5,5196n	5,4834n	5,4244n	5,3343n	5,2019n	5,0094n	4,7146n	4,1235n	4,0242
cos 5ξ	3,823	3,729	3,502	2,33	3,520n	3,844n	4,015n	4,115n	4,172n	4,203n	4,218n
sin ξ	9,8810527n	9,8867891n	9,8956836n	9,9068106n	9,9190360n	9,9311880n	9,9422525n	9,9515246n	9,9586601n	9,9636116n	9,9664922n
sin 2ξ	8,376152	8,373734	8,368877	8,360560	8,347820	8,330205	8,308236	8,283673	8,259379	8,238753	8,224929
sin 3ξ	6,65563n	6,62002n	6,55309n	6,43934n	6,23955n	5,78097n	5,73595	6,20423	6,39361	6,49357	6,54426
sin 4ξ	5,0680n	5,1432n	5,2395n	5,3358n	5,4193n	5,4841n	5,5289n	5,5555n	5,5682n	5,5721n	5,5722n
sin 5ξ	4,213	4,225	4,239	4,246	4,238	4,209	4,154	4,074	3,976	3,873	3,790

$$\frac{r'}{a'} \sin f'$$

cos ξ	9,8808040	9,8865404	9,8954349	9,9065619	9,9187873	9,9309393	9,9420038	9,9512759	9,9584114	9,9633629	9,9662435
cos 2ξ	8,3759815n	8,373564n	8,368706n	8,360390n	8,347649n	8,330034n	8,308065n	8,283503n	8,259209n	8,238583n	8,224758n
cos 3ξ	6,65553	6,61992	6,55299	6,43924	6,23945	5,7809	5,7358n	6,20413n	6,39351n	6,49347n	6,54416n
cos 4ξ	5,0668	5,1420	5,2383	5,3346	5,4181	5,4829	5,5277	5,5543	5,5670	5,5709	5,5710
cos 5ξ	4,212n	4,224n	4,238n	4,245n	4,237n	4,208n	4,153n	4,073n	3,975n	3,872n	3,789n
sin ξ	9,8113757n	9,8032217n	9,7894697n	9,7700259n	9,7450602n	9,7152931n	9,6822598n	9,6484249n	9,6169956n	9,5914182n	9,5747130n
sin 2ξ	7,581582n	7,659183n	7,760386n	7,864984n	7,961254n	8,043693n	8,110416n	8,161592n	8,198554n	8,223127n	8,237053n
sin 3ξ	6,87130	6,88314	6,89963	6,91687	6,93089	6,93865	6,93885	6,93223	6,92140	6,90993	6,90138
sin 4ξ	5,5488n	5,5388n	5,5184n	5,4822n	5,4232n	5,3331n	5,2007n	5,0082n	4,7134n	4,1223n	4,0230
sin 5ξ	3,822	3,728	3,501	2,33	3,519n	3,843n	4,014n	4,114n	4,171n	4,202n	4,217n

Ferner führe ich gleich hier die Specialwerthe von $\frac{r}{a} \cos f$, $\frac{r}{a} \sin f$, $\frac{r}{a}$ und $\frac{ndt}{d\omega_2}$ auf, die weiter unten gebraucht werden. Dieselben werden aus den oben gegebenen Reihen erhalten.

ω_2	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°	165°
$\frac{r}{a}\cos f$	0,2230829n	0,2179919n	0,2089959n	0,1954430n	0,1766828n	0,1523851n	0,1229708n	0,0900680n	0,0567951n	0,0275958n	0,0073944n
$\frac{r}{a}\sin f$	9,4782310	9,4986399	9,5291457	9,5654879	9,6031792	9,6382467	9,6677497	9,6900982	9,7051368	9,7139222	9,7181531

ω_2	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°	165°
$\frac{r}{a}$	0,2300030	0,2257588	0,2182798	0,2070621	0,1916351	0,1718333	0,1481416	0,1220183	0,0960252	0,0735800	0,0582587
$\frac{ndt}{d\omega_2}$	9,1638377n	9,4555824n	9,6144081n	9,7115360n	9,7667163n	9,7862528n	9,7710725n	9,7187675n	9,6223253n	9,4624288n	9,1691402n

3. Mit diesen Daten liessen sich nun sofort die Specialwerthe für das Quadrat der Entfernung zwischen Comet und Jupiter aufstellen. Es wurde indessen vorgezogen, dieselben aus dem allgemeinen, bereits von Asten gegebenen Ausdrucke für $(\Delta)^2$ abzuleiten, indem darin der Reihe nach $\omega_2 = 15°, 30°, \ldots. 165°$ gesetzt wurde. In den so erhaltenen Reihen ersetzte ich darauf c' durch ξ, wobei wiederum die Relation $c' = \xi + 97° \, 40' \, 48''{,}05$ in Anwendung kam. Das so gewonnene Resultat ist in folgender Tafel vereinigt:

$(\Delta)^2$

$\omega_2 =$	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°	165°
cos 0ξ	+43,344748	+43,031008	+42,493952	+41,723997	+40,729663	+39,553331	+38,278931	+37,023347	+35,911992	+35,050872	+34,510570
cos ξ	+40,608452	+40,176096	+39,430299	+38,347191	+36,922612	+35,195323	+33,263208	+31,283688	+29,453071	+27,971814	+27,008827
cos 2ξ	— 0,535294	— 0,512659	— 0,476023	— 0,427595	— 0,371225	— 0,312359	— 0,257088	— 0,210528	— 0,175494	— 0,152213	— 0,139306
cos 3ξ	— 0,009157	— 0,010238	— 0,011875	— 0,013833	— 0,015795	— 0,017432	— 0,018499	— 0,018931	— 0,018859	— 0,018534	— 0,018221
cos 4ξ	+ 0,001328	+ 0,001351	+ 0,001371	+ 0,001375	+ 0,001345	+ 0,001281	+ 0,001189	+ 0,001079	+ 0,000974	+ 0,000889	+ 0,000839
cos 5ξ	— 0,000064	— 0,000065	— 0,000063	— 0,000060	— 0,000053	— 0,000043	— 0,000034	— 0,000024	— 0,000018	— 0,000013	— 0,000010
sin ξ	+ 5,706350	+ 5,909648	+ 6,206209	+ 6,533197	+ 6,809959	+ 6,956271	+ 6,919799	+ 6,701362	+ 6,362418	+ 6,005913	+ 5,739619
sin 2ξ	— 0,803099	— 0,806608	— 0,809834	— 0,809354	— 0,801542	— 0,783903	— 0,756380	— 0,721930	— 0,685908	— 0,654555	— 0,633342
sin 3ξ	+ 0,033432	+ 0,032886	+ 0,031881	+ 0,030320	+ 0,028179	+ 0,025567	+ 0,022759	+ 0,020086	+ 0,017842	+ 0,016196	+ 0,015209
sin 4ξ	— 0,000624	— 0,000547	— 0,000421	— 0,000258	— 0,000074	+ 0,000109	+ 0,000272	+ 0,000394	+ 0,000474	+ 0,000511	+ 0,000523
sin 5ξ	— 0,000029	— 0,000033	— 0,000041	— 0,000049	— 0,000054	— 0,000057	— 0,000056	— 0,000054	— 0,000051	— 0,000048	— 0,000046

Dieser Ausdruck wurde nun zunächst nach Gylden's Vorschlag, der sich bereits in Asten's und Backlund's Arbeiten als nützlich erwiesen, mit einem Factor $(1 + x \cos \xi + y \sin \xi)$ multiplicirt; die Constanten x und y werden derart bestimmt, dass die Coefficienten von $\cos 2\xi$ und $\sin 2\xi$ im Producte verschwinden. Daraus erwächst der Vortheil, dass die Summe aller höheren Glieder blos eine Grösse zweiter Ordnung in Bezug auf die Excentricität des störenden Planeten wird. Die obigen Werthe von $(\Delta)^2$ haben die Form:

$$(\Delta)^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \cos \xi + \alpha_2 \cos 2\xi + \alpha_3 \cos 3\xi + \ldots.$$
$$+ \beta_1 \sin \xi + \beta_2 \sin 2\xi + \beta_3 \sin 3\xi + \ldots.$$

Dann wurden also x und y aus den Gleichungen bestimmt:

$$(\alpha_1 + \alpha_3) . x - (\beta_1 - \beta_3) . y + 2 \alpha_2 = 0$$
$$(\beta_1 + \beta_3) . x + (\alpha_1 - \alpha_3) . y + 2 \beta_2 = 0$$

Die Producte aller Specialwerthe von $(\Delta)^2$ in die zugehörigen Factoren sind im

nachstehenden Tableau zusammengestellt, dem die Logarithmen von $\frac{x}{2}$ und $\frac{y}{2}$ hinzugefügt sind.

$$(\Delta)^2 \{ 1 + x \cos \xi + y \sin \xi \}$$

$\omega_2 =$	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°	165°
cos 0ξ	+44,080030	+43,753613	+43,195132	+42,394893	+41,361857	+40,139910	+38,815859	+37,510687	+36,354562	+35,457992	+34,895034
cos ξ	+41,941694	+41,476443	+40,676715	+39,520800	+38,008712	+36,185799	+34,158303	+32,092084	+30,190212	+28,657083	+27,663002
cos 3ξ	— 0,003414	— 0,003748	— 0,004251	— 0,004847	— 0,005444	— 0,005935	— 0,006240	— 0,006338	— 0,006274	— 0,006136	— 0,006018
cos 4ξ	+ 0,000596	+ 0,000608	+ 0,000613	+ 0,000610	+ 0,000587	+ 0,000553	+ 0,000506	+ 0,000452	+ 0,000400	+ 0,000359	+ 0,000336
cos 5ξ	— 0,000032	— 0,000034	— 0,000035	— 0,000035	— 0,000034	— 0,000029	— 0,000026	— 0,000020	— 0,000018	— 0,000015	— 0,000013
sin ξ	+ 7,225652	+ 7,438211	+ 7,747180	+ 8,085765	+ 8,368971	+ 8,513246	+ 8,465327	+ 8,228106	+ 7,867389	+ 7,491181	+ 7,211411
sin 3ξ	+ 0,011438	+ 0,011333	+ 0,011115	+ 0,010728	+ 0,010142	+ 0,009372	+ 0,008510	+ 0,007667	+ 0,006946	+ 0,006408	+ 0,006080
sin 4ξ	— 0,000261	— 0,000224	— 0,000161	— 0,000082	+ 0,000006	+ 0,000091	+ 0,000169	+ 0,000227	+ 0,000264	+ 0,000279	+ 0,000281
sin 5ξ	— 0,000016	— 0,000017	— 0,000022	— 0,000027	— 0,000029	— 0,000031	— 0,000029	— 0,000028	— 0,000026	— 0,000024	— 0,000023
$\log \frac{x}{2}$	8,194203	8,186611	8,173843	8,155888	8,133019	8,106079	8,076704	8,047298	8,020749	7,999796	7,986482
$\log \frac{y}{2}$	8,244580	8,250400	8,259404	8,270644	8,282957	8,295140	8,306160	8,315311	8,322270	8,327043	8,329796

Um alle vorbereitenden Rechnungen beisammen zu haben, will ich gleich hier die Entwickelung von $(1 + x \cos \xi + y \sin \xi)^{3/2}$ aufstellen. Da x und y kleine Grössen sind, deren vierte Potenzen vernachlässigt werden dürfen, erhält man dieselbe sehr leicht.

Sei

$$\tfrac{1}{2} x = \mu \cos \varphi$$
$$\tfrac{1}{2} y = \mu \sin \varphi$$

so erhält man sofort:

$$\begin{aligned}(1 + x \cos \xi + y \sin \xi)^{3/2} = (1 + {}^3/_4\, \mu^2) + 3\mu\,(1 - {}^1/_8\, \mu^2)\,.\cos\,(\xi - \varphi)\\ + {}^3/_4\, \mu^2\,.\cos 2\,(\xi - \varphi)\\ - {}^1/_8\, \mu^3\,.\cos 3\,(\xi - \varphi)\\ = a_0 + a_1 \cos \xi + a_2 \cos 2\xi + \ldots\\ + b_1 \sin \xi + b_2 \sin 2\xi + \ldots\end{aligned}$$

An Stelle von a_0 ist $(a_0 - 1)$ angesetzt.

$$R^{3/2} = (1 + x \cos \xi + y \sin \xi)^{3/2}$$

ω_2	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°	165°
$\log (a_0 - 1)$	6,6178	6,6178	6,6177	6,6176	6,6174	6,6172	6,6169	6,6166	6,6163	6,6161	6,6159
$\log a_1$	8,671294	8,663702	8,650933	8,632979	8,610111	8,583170	8,553795	8,524388	8,497840	8,476888	8,463573
$\log a_2$	5,6803*n*	5,7816*n*	5,9066*n*	6,0297*n*	6,1388*n*	6,2298*n*	6,3019*n*	6,3563*n*	6,3950*n*	6,4204*n*	6,4346*n*
$\log a_3$	4,124	4,137	4,156	4,176	4,194	4,205	4,210	4,208	4,202	4,195	4,189
$\log b_1$	8,721671	8,727491	8,736495	8,747735	8,760048	8,772231	8,783251	8,792402	8,799361	8,804134	8,806887
$\log b_2$	6,6149	6,6131	6,6093	6,6026	6,5921	6,5773	6,5590	6,5387	6,5191	6,5029	6,4924
$\log b_3$	3,970*n*	3,940*n*	3,885*n*	3,794*n*	3,648*n*	3,391*n*	2,647*n*	3,146	3,465	3,604	3,669

Endlich werden noch die Producte $\frac{r'}{a'}\cos f' \,(1 + x\cos\xi + y\sin\xi)^{3/2}$ und $\frac{r'}{a'}\sin f'$ $(1 + x\cos\xi + y\sin\xi)^{3/2}$ gebraucht, die ebenfalls hier ihren Platz finden mögen.

$$\frac{r'}{a'}\cos f' . R^{3/2}$$

ω_2	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°	165°
cos 0ξ	9,0318643n	9,0318599n	9,0318474n	9,0318272n	9,0317917n	9,0317509n	9,0316944n	9,0316306n	9,0315648n	9,0315103n	9,0314752n
cos ξ	9,8138086n	9,8056582n	9,7919129n	9,7724788n	9,7475269n	9,7177784n	9,6847698n	9,6509648n	9,6195687n	9,5940234n	9,5773416n
cos 2ξ	7,00822	7,13207	7,27738	7,41481	7,53331	7,63043	7,70638	7,76304	7,80303	7,82906	7,84359
cos 3ξ	6,2991	6,3096	6,3253	6,3410	6,3528	6,3579	6,3551	6,3450	6,3308	6,3153	6,3058
cos 4ξ	5,072n	5,061n	5,037n	5,000n	4,934n	4,832n	4,681n	4,462n	4,041n	3,48	4,079
cos 5ξ	3,48	3,30	3,30	3,00	3,00n	3,48n	3,60n	3,70n	3,70n	3,70n	3,85n
sin ξ	9,8831158n	9,8888527n	9,8977479n	9,9088757n	9,9211018n	9,9332541n	9,9443185n	9,9535899n	9,9607245n	9,9656751n	9,9685549n
sin 2ξ	8,048465n	8,047076n	8,043947n	8,038175n	8,028868n	8,015783n	7,99951n	7,98170n	7,96475n	7,95104n	7,94226n
sin 3ξ	6,0422n	6,0017n	5,925n	5,792n	5,535n	4,602n	5,436	5,748	5,902	5,988	6,0334
sin 4ξ	4,633n	4,690n	4,799n	4,881n	4,949n	5,021n	5,057n	5,083n	5,097n	5,097n	5,097n
sin 5ξ	3,78	3,85	3,78	3,78	3,78	3,78	3,70	3,60	3,48	3,30	3,00

$$\frac{r'}{a'}\sin f' . R^{3/2}$$

ω_2	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°	165°
cos 0ξ	6,8836	6,8923	6,9069	6,9278	6,9548	6,9866	7,02309	7,06149	7,09861	7,12943	7,15020
cos ξ	9,8805215	9,8862579	9,8951525	9,9062797	9,9185053	9,9306573	9,9417222	9,9509940	9,9581298	9,9630815	9,9659622
cos 2ξ	8,046955	8,045562	8,042438	8,036669	8,027362	8,014293	7,99802	7,98023	7,96328	7,94958	7,94080
cos 3ξ	6,0426	6,0022	5,926	5,792	5,535	4,580	5,438n	5,750n	5,902n	5,988n	6,0334n
cos 4ξ	4,633	4,690	4,792	4,875	4,949	5,017	5,053	5,072	5,076	5,093	5,093
cos 5ξ	3,78n	3,85n	3,78n	3,85n	3,78n	3,78n	3,70n	3,60n	3,48n	3,30n	3,00n
sin ξ	9,8111015n	9,8029478n	9,7891962n	9,7697531n	9,7447887n	9,7150229n	9,6819915n	9,6481587n	9,6167318n	9,5911569n	9,5744536n
sin 2ξ	7,00629	7,13020	7,27561	7,41310	7,53163	7,62880	7,70472	7,76143	7,80139	7,82744	7,84197
sin 3ξ	6,2993	6,3101	6,3251	6,3404	6,3532	6,3583	6,3556	6,3454	6,3312	6,3164	6,3056
sin 4ξ	5,064n	5,053n	5,037n	5,000n	4,929n	4,826n	4,690n	4,447n	4,041n	3,48	4,079
sin 5ξ	3,48	3,30	3,30	3,00	3,00n	3,48n	3,60n	3,70n	3,70n	3,70n	3,78n

4. Der nächste Schritt besteht in der Entwickelung von $(\Delta)^{-3}$, $(\Delta)^{-3}\frac{r'}{a'}\cos f'$ und $(\Delta)^{-3}\frac{r'}{a'}\sin f'$. In der Berechnung dieser Ausdrücke liegt die Hauptschwierigkeit der ganzen zu absolvirenden Arbeit. Hansen hat zwar in der Partition der Bahn ein Mittel geliefert, mit dessen Hilfe die Entwickelungen in Bezug auf die von der Stellung des Cometen in seiner Bahn abhängende Variable genügend convergent werden. Dasselbe lässt sich aber nicht von den Reihen sagen, welche die mittlere Anomalie des Jupiter zu einem, während eines Umlaufes bestimmten Momente zum Argumente haben. Diese Schwierigkeit wird nun durch die fruchtbare Idee Gyldén's gehoben, welche durch Einführung einer elliptischen Amplitude an Stelle der mittleren Anomalie des Jupiter in den in Rede stehenden Reihen eine bedeutend grössere Convergenz erreichen lässt. Es ergeben sich aus dieser Substitution eine Reihe von Methoden zur Entwickelung von $(\Delta)^{-3}$, aus denen man

diejenige auszuwählen hat, welche im speciellen Falle den meisten Vortheil für die Anwendung verspricht. Meine ursprüngliche Absicht war es nun, die Entwickelungen der verschiedenen Specialwerthe von $(\Delta)^2$ nach mehreren dieser Methoden durchzuführen, um über die Vortheile, welche eine jede von ihnen bei der Anwendung darbietet, ein auf Erfahrung gegründetes Urtheil zu gewinnen. Für meinen Bahntheil boten sich vorzugsweise drei Methoden dar. Einmal die ältere Methode von Gyldén[3]), deren sich Asten ausschliesslich bedient hat. Zweitens die Methode, welche auf Grundlage einer von Gyldén im «Recueil de tables» gegebenen Transformation zuerst von Backlund[4]) vorgeschlagen und auf einige Specialwerthe im Bahntheile ω_4 angewandt worden ist. Ihre Eigenthümlichkeit besteht darin, dass die Grössen $(\Delta)^{-3}$ und deren Producte in die Coordinaten des Jupiter auf die Form $\sqrt{1 - k_1 \sin\psi} \sum \begin{matrix}\alpha_i \\ \beta_i\end{matrix} \left.\begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix}\right\} i\psi$ gebracht werden, wobei eine im «Recueil de tables» enthaltene Tafel dazu dient, gleichzeitig mit Fortschaffung des Radicals das definitive Argument einzuführen. Endlich wünschte ich auch eine ebenfalls von Backlund[5]) vorgeschlagene Abänderung der zweiten Methode durch practische Anwendung zu prüfen.

Die ältere, von Asten benutzte Methode Gyldén's habe ich in der That auf den ersten Specialwerth von $(\Delta)^{-3}$ (für $\omega_2 = 15°$) angewandt. Es stellte sich jedoch dabei heraus, dass die Rechnungsarbeit im Vergleich mit der zweiten Methode so bedeutend grösser war, dass die Entscheidung zu Gunsten dieser ausfiel. Ich nahm deshalb davon Abstand noch andere Specialwerthe nach der ältern Methode zu behandeln, sondern entwickelte zunächst die fünf folgenden bis $\omega_2 = 90°$ nach der zweiten Methode. Auf den Specialwerth $\omega_2 = 105°$ versuchte ich den letzterwähnten Vorschlag von Backlund anzuwenden. Derselbe bezweckt, die Grössen $(\Delta)^{-3}$, $(\Delta)^{-3} \frac{r'}{a'} \cos f'$ und $(\Delta)^{-3} \frac{r'}{a'} \sin f'$ unmittelbar in der Form $\sum \begin{matrix}a_i \\ b_i\end{matrix} \left.\begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix}\right\} i\varphi$ herzustellen, welche unverändert beibehalten werden könnte. Falls es indessen wünschenswerth erscheinen sollte das bei den übrigen Methoden auftretende elliptische Integral als Argument einzuführen, so kann dies durch eine ebenfalls im «Recueil de tables» gegebene Tafel bewerkstelligt werden. Bei diesem Versuche bin ich indessen zu einem negativen Resultate gelangt. Die Reihen, welche man erhält, wenn man $T_1^{-\frac{n}{2}} (1 - k_1 \cos\varphi)^{-n}$ bildet, convergiren nämlich äusserst schwach; die Glieder derselben erhalten dabei sämmtlich das nämliche Vorzeichen. Im Endresultate muss man natürlich die gleiche Convergenz wiederfinden, hat aber, um zu demselben zu gelangen, durch grosse Zahlen zu gehen. Aus diesen Gründen musste ich mich entschliessen, für die letzten Specialwerthe von $\omega_2 = 105°$ bis $\omega_2 = 165°$ wiederum auf die zweite Methode zurückzugreifen, deren Anwendung gerade in dieser Gegend, wo der Comet immer in grösserer Entfernung vom Jupiter bleibt, aus-

3) Transformation af ett uttryck, innehållande elliptiska transcendenter etc. Stockholm 1876 (Översigt).

4) Zur Theorie des Encke'schen Cometen, Mém. de l'Acad. de St. Pétersb. 1881.

5) Zur Entwickelung der absoluten Störungen eines Cometen, Bull. de l'Acad. de St. Pétersb., Tome V, 1880.

nehmend leicht wird. Da ich mithin schliesslich von 11 Specialwerthen doch bereits 10 nach ein und derselben Methode entwickelt hatte, zog ich es vor, dieselbe der Gleichförmigkeit wegen auch auf $\omega_2 = 15°$ anzuwenden, und die Rechnung nach der älteren Methode in diesem Falle nur als Controlle zu betrachten. Auf diese Weise hatte ich den Vortheil, durch Anwendung zweier ganz verschiedener Methoden, wenn auch nur auf einen Specialwerth, gegen systematische Fehler sicher gestellt zu sein, welche sich bei so umfangreichen Rechnungen leicht einschleichen können.

Ich lasse nun eine kurze Darlegung der von mir benutzten Methode folgen, um alle Grundlagen meiner Rechnung beisammen zu haben.

In dem Ausdruck für das Quadrat der Entfernung, multiplicirt mit dem Trinom $R = 1 + x \cos \xi + y \sin \xi$

$$\begin{aligned}(\Delta)^2 R = M_0 + M_1 \cos \xi + M_3 \cos 3\xi + M_4 \cos 4\xi + \dots \\ + N_1 \sin \xi + N_3 \sin 3\xi + N_4 \sin 4\xi + \dots\end{aligned}$$

sondern wir die drei grössten Glieder von den übrigen ab, indem wir setzen:

$$\begin{aligned}T_1 &= M_0 + M_1 \cos \xi + N_1 \sin \xi \\ T_2 &= M_3 \cos 3\xi + M_4 \cos 4\xi + \dots \\ &\quad + N_3 \sin 3\xi + N_4 \sin 4\xi + \dots\end{aligned}$$

Alsdann wird

$$(\Delta)^2 R = T_1 + T_2$$

und

$$(\Delta)^{-3} = R^{\frac{3}{2}} \left\{ T_1^{-\frac{3}{2}} - \tfrac{3}{2} T_1^{-\frac{5}{2}} \cdot T_2 + \tfrac{15}{8} T_1^{-\frac{7}{2}} \cdot T_2^2 \right\}$$

Alle höheren Glieder dürfen wegen der Kleinheit von T_2 unberücksichtigt bleiben. Gyldén führt nun an Stelle des Arguments ξ eine andere Veränderliche ein, welche mit jenem durch die Gleichung verbunden ist:

$$\xi = 2\, am\, \frac{2K}{\pi} \cdot \tfrac{1}{2} \chi \,, \text{ mod. } k$$

In der älteren Methode wurden alle Entwickelungen sofort nach χ ausgeführt und diese Grösse soll auch hier das schliessliche, in den Endresultaten auftretende Argument sein. Man kann aber die Entwickelungen convergenter erhalten, wenn man auf obige elliptische Amplitude zunächst die Landen'sche Transformation anwendet. Setzt man also

$$\varphi = am\, \frac{2K}{\pi} \cdot \tfrac{1}{2} \chi \,, \text{ mod. } k$$

so gilt auch die Relation:

$$\varphi_1 = am\, \frac{2K_1}{\pi} \cdot \chi \;, \; \text{mod. } k_1$$

wobei φ und φ_1 durch die Gleichung

$$tg\, \varphi_1 = \frac{(1+k')\, tg\, \varphi}{1 - k'\, tg^2\, \varphi}$$

verbunden sind. Ist ferner ψ die zu φ_1 gehörende Coamplitude, so hat man:

$$ctg\, \psi = k'_1\, tg\, \varphi_1 = \frac{2\sqrt{k'}\, tg\, \varphi}{1 - k'\, tg^2\, \varphi}$$

Hieraus ersieht man sofort, dass um letzterer Gleichung zu genügen, $\sqrt{k'}\, tg\, \varphi = tg\, (45^\circ - \frac{1}{2}\, \psi)$ gesetzt werden muss, oder:

$$tg\, (45 - \tfrac{1}{2}\, \psi) = \sqrt{\frac{1 - k_1}{1 + k_1}}\, tg\, \varphi$$

Der Zusammenhang zwischen $90 - \psi$ und $2\varphi = \xi$ ist mithin ganz derselbe, wie der zwischen der excentrischen und wahren Anomalie, wenn man k_1, dem transformirten Modul, die Rolle der Excentricität zuertheilt. Es lassen sich deshalb unmittelbar die Gleichungen hinschreiben:

$$\cos \xi = \frac{\sin \psi - k_1}{1 - k_1 \sin \psi}$$

$$\sin \xi = \frac{k_1' \cos \psi}{1 - k_1 \sin \psi}$$

Führt man diese Ausdrücke in T_1 ein, nachdem man demselben die Form gegeben:

$$T_1 = M_0\, (1 + m_1 \cos \xi + n_1 \sin \xi)$$

so wird, wenn noch

$$\frac{k_1'\, n_1}{1 - m_1\, k_1} = -\, \Phi_1 \sin \Lambda_1$$

$$\frac{m_1 - k_1}{1 - m_1\, k_1} = \Phi_1 \cos \Lambda_1$$

gesetzt wird:

$$T_1 = \frac{M_0\, (1 - m_1\, k_1)}{1 - k_1 \sin \psi} \left\{ 1 - \Phi_1 \cos (\psi + 90^\circ - \Lambda_1) \right\}$$

Die negativen gebrochenen Potenzen dieses Ausdrucks nehmen die Gestalt an:

$$T_1^{-\frac{n}{2}} = (1 - k_1 \sin \psi)^{\frac{n}{2}}\, S_n$$

Die Entwickelungen von S_3, S_5, S_7, welche hier erforderlich sind, werden nach bekannten Hansen'schen Vorschriften erledigt. $\frac{(\Delta)^{-3}}{\sqrt{1-k_1 \sin\psi}}$ erhält mithin die Form:

$$\frac{(\Delta)^{-3}}{\sqrt{1-k_1 \sin\psi}} = (1-k_1 \sin\psi).R^{\frac{3}{2}}\left\{S_3 - \tfrac{3}{2}(1-k_1\sin\psi).T_2\left(S_5 - \tfrac{5}{4}(1-k_1\sin\psi).T_2.S_7\right)\right\}$$

Setzt man an Stelle von $R^{\frac{3}{2}}$ die Producte dieser Grösse in $\frac{r'}{a'}\cos f'$ und $\frac{r'}{a'}\sin f'$, so erhält man aus dieser Formel gleicherweise die Entwickelungen von $\frac{(\Delta)^{-3}}{\sqrt{1-k_1\sin\psi}}\cdot\frac{r'}{a'}\left.\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\} f'$.

Hier ist vor allem die Ermittelung von Ausdrücken der Form:

$$(1-k_1\sin\psi)\left.\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\} i\xi \cdot \sum \begin{matrix}\alpha_n\\ \beta_n\end{matrix}\left.\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\} n\psi$$

in Reihen, welche nach den Vielfachen von ψ fortschreiten, erforderlich. Dieser Gegenstand ist von Backlund in dem Memoire: «Zur Theorie des Encke'schen Cometen» ausführlich behandelt worden. Ich begnüge mich daher, einige Hauptpunkte dieser Entwickelung zu recapituliren.

Aus den Gleichungen für $\cos\xi$ und $\sin\xi$ erhält man, wenn $e^{\sqrt{-1}\,\psi}$ mit t, $\frac{1-k_1'}{1+k_1'}$ mit k_2 bezeichnet wird:

$$e^{\sqrt{-1}\,\xi} = \frac{\sqrt{-1}\,t^{-1}}{1+k_2}\cdot(1+\sqrt{-k_2}\,t)^2\cdot\frac{1}{1-k_1\sin\psi}$$

Da ferner:

$$(1-k_1\sin\psi) = \frac{1}{1+k_2}(1+\sqrt{-k_2}.t)\,(1-\sqrt{-k_2}.t^{-1})$$

so wird:

$$\tfrac{1}{2}(1-k_1\sin\psi)\,e^{i\sqrt{-1}\,\xi}.e^{n\sqrt{-1}\,\psi} = \frac{(\sqrt{-1})^i\,t^{n-i}}{2(1+k_2)}\cdot\frac{(1+\sqrt{-k_2}.t)^{i+1}}{(1-\sqrt{-k_2}.t^{-1})^{i-1}}$$

$$= \Sigma\, A_p^{(i)}\, t^{n-2p} + \sqrt{-1}\;\Sigma\, B_p^{(i)}\, t^{n-2p+1}$$

Die Grössen $A_p^{(i)}$ und $B_p^{(i)}$ sind für die hier in Betracht kommenden Werthe $i=2$, 3, 4, 5 von Backlund a. a. O. pag. 46 gegeben.

Daraus erhält man:

$$(1-k_1\sin\psi)\,e^{i\sqrt{-1}\xi}\sum\begin{matrix}\alpha_n\\ \beta_n\end{matrix}\left.\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\}n\psi = \Sigma\Sigma\,\alpha_n A_p^{(i)}\left(t^{n-2p}+t^{-n-2p}\right)+\beta_n B_p^{(i)}\left(t^{n-2p+1}-t^{-n-2p+1}\right)$$

$$+\sqrt{-1}\,\Sigma\Sigma\,\alpha_n B_p^{(i)}\left(t^{n-2p+1}+t^{-n-2p+1}\right)+\beta_n A_p^{(i)}\left(-t^{n-2p}+t^{-n-2p}\right)$$

eine Formel, welche mir behufs bequemer Schematisirung der Rechnung gute Dienste geleistet hat. Es entstehen somit Reihen folgender Form:

$$(1-k_1 \sin\psi)\, e^{i\sqrt{-1}\,\xi} \,.\, S = \Sigma\,(a_m t^m + b_m t^{-m}) + \sqrt{-1}\,\Sigma(c_m t^m + d_m t^{-m})$$

aus denen man durch Trennung des Reellen vom Imaginären die verlangten Entwickelungen erhält. Aus der Formel für $\frac{(\Delta)^{-3}}{\sqrt{1-k_1 \sin\psi}}$ ist ersichtlich, in welcher Weise dieselben zu verwerthen sind. Nach Multiplication mit den betreffenden Coefficienten von T_2, $R^{\frac{3}{2}}$, $R^{\frac{3}{2}}\, \frac{r'}{a'} \left.\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\} f'$ und nach gehöriger Zusammenziehung lassen sich dann leicht die Reihen für

$$\frac{\rho\,(\Delta)^{-3}}{\sqrt{1-k_1 \sin\psi}}\,, \quad \frac{\rho\,(\Delta)^{-3}}{\sqrt{1-k_1 \sin\psi}}\cdot\frac{r'}{a'}\cos f'\,, \quad \frac{\rho\,(\Delta)^{-3}}{\sqrt{1-k_1 \sin\psi}}\cdot\frac{r'}{a'}\sin f'$$

aufstellen.

ρ ist hier der schon von Asten so bezeichnete Factor $\frac{1}{12}\,\frac{a'^2 . a . m'}{\sin 1''}$, also $\log \rho = 2{,}9918749$. Derselbe ist von Hause aus den Entwickelungen von S_3, S_5, S_7 einverleibt worden. Ich gebe nun einige Hauptmomente der solchergestalt geführten Rechnungen.

Die Constanten, welche bei der Ableitung von S_3, S_5, S_7 eine Rolle spielen, sind ausser dem Modul k_1 ($\log k_1 = 9{,}9042551$) die Grössen $\mu = M_0\,(1 - m_1\, k_1)$, Φ_1, $90° - \Lambda_1$. Ihre Werthe für $\omega_2 = 15° \,\ldots\ldots\, 165°$ sind:

ω_2	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°	165°
log μ	1,0185568	1,0204988	1,0239249	1,0291124	1,0363575	1,0458509	1,0575069	1,0707045	1,0841296	1,0958921	1,1039808
log Φ_1	9,8774667	9,8701115	9,8567915	9,8359284	9,8056397	9,7644389	9,7125648	9,6540440	9,5979304	9,5552213	9,5313603
$90°-\Lambda_1$	123°14′30″,44	124°50′46″,64	127°30′16″,24	131°12′26″,61	135°58′24″,25	141°53′18″,15	149°7′32″,41	157°49′16″,28	167°39′6″,41	177°15′17″,07	184°21′21″,92

S_3

ω_2	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°	165°
cos 0ψ	+64″,6636	+61″,6376	+56″,9554	+51″,1581	+44″,9637	+39″,0903	+34″,0567	+30″,1069	+27″,2517	+25″,3728	+24″,3213
cos ψ	—44,7692	—43,5301	—41,2415	—37,7918	—33,3651	—28,4557	—23,6705	—19,5045	—16,2345	—13,9409	—12,5981
cos 2ψ	—18,0288	—14,2813	— 9,0709	— 3,6761	+ 0,6998	+ 3,4050	+ 4,4891	+ 4,4521	+ 3,8775	+ 3,2116	+ 2,7239
cos 3ψ	+23,3100	+20,3400	+15,8365	+10,6155	+ 5,7692	+ 2,1884	+ 0,1400	— 0,6865	— 0,8187	— 0,6904	— 0,5457
cos 4ψ	— 8,1817	— 7,8963	— 7,0340	— 5,4536	— 3,4728	— 1,6910	— 0,5261	+ 0,0103	+ 0,1549	+ 0,1429	+ 0,1055
cos 5ψ	— 1,4243	— 0,5075	+ 0,4936	+ 1,0773	+ 1,0540	+ 0,6594	+ 0,2622	+ 0,0430	— 0,0256	— 0,0289	— 0,0198
cos 6ψ	+ 2,7663	+ 2,1126	+ 1,2204	+ 0,4065	— 0,0548	— 0,1535	— 0,0871	— 0,0212	+ 0,0033	+ 0,0057	+ 0,0036
cos 7ψ	— 1,1344	— 1,0291	— 0,7760	— 0,4227	— 0,1285	+ 0,0045	+ 0,0210	+ 0,0072	— 0,0002	— 0,0011	— 0,0006
cos 8ψ	— 0,0488	+ 0,0822	+ 0,1762	+ 0,1618	+ 0,0789	+ 0,0155	— 0,0030	— 0,0020	— 0,0001	+ 0,0002	+ 0,0001
cos 9ψ	+ 0,2880	+ 0,1824	+ 0,0601	— 0,0148	— 0,0245	— 0,0088	— 0,0003	+ 0,0005			
cos 10ψ	— 0,1395	— 0,1148	— 0,0676	— 0,0200	+ 0,0019	+ 0,0029	+ 0,0004	— 0,0001			
cos 11ψ	+ 0,0074	+ 0,0215	+ 0,0247	+ 0,0135	+ 0,0024	— 0,0005	— 0,0002				
cos 12ψ	+ 0,0276	+ 0,0132	0,0000	— 0,0039	— 0,0016						
cos 13ψ	— 0,0159	— 0,0115	— 0,0048	— 0,0002	+ 0,0005						
cos 14ψ	+ 0,0021	+ 0,0033	+ 0,0026	+ 0,0007	— 0,0001						
cos 15ψ	+ 0,0024	+ 0,0007	— 0,0004	— 0,0004							
cos 16ψ	— 0,0017	— 0,0010	— 0,0002								
cos 17ψ	+ 0,0003	+ 0,0004	+ 0,0002								

ω_2	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°	165°
sin ψ	—68″,3057	—62″,5237	—53″,7382	—43″,1579	—32″,2502	—22″,3215	—14″,1518	—7″,9512	—3″,5540	—0″,6685	+0″,9596
sin 2ψ	+41,4311	+38,5921	+33,8743	+27,6059	+20,5901	+13,8872	+ 8,3543	+4,3534	+1,7831	+0,3086	—0,4174
sin 3ψ	— 3,9950	— 5,2750	— 6,5640	— 7,0587	— 6,3896	— 4,8390	— 3,0558	—1,5817	—0,6179	—0,0999	+0,1271
sin 4ψ	— 8,7840	— 6,7716	— 4,0581	— 1,4787	+ 0,2364	+ 0,8823	+ 0,7949	+0,4611	+0,1807	+0,0277	—0,0331
sin 5ψ	+ 5,8026	+ 5,0233	+ 3,7381	+ 2,2051	+ 0,8886	+ 0,1228	— 0,1258	—0,1127	—0,0476	—0,0070	+0,0079
sin 6ψ	— 0,9768	— 1,1748	— 1,2216	— 0,9692	— 0,5353	— 0,1745	— 0,0080	+0,0227	+0,0116	+0,0017	—0,0018
sin 7ψ	— 0,8644	— 0,5035	— 0,1017	+ 0,1410	+ 0,1635	+ 0,0796	+ 0,0153	—0,0033	—0,0027	—0,0004	+0,0004
sin 8ψ	+ 0,6863	+ 0,5326	+ 0,3041	+ 0,0946	— 0,0108	— 0,0222	— 0,0071	+0,0001	+0,0006	+0,0001	—0,0001
sin 9ψ	— 0,1609	— 0,1738	— 0,1455	— 0,0769	— 0,0180	+ 0,0027	+ 0,0022	+0,0002	—0,0001		
sin 10ψ	— 0,0729	— 0,0234	+ 0,0182	+ 0,0257	+ 0,0114	+ 0,0011	— 0,0005	—0,0001			
sin 11ψ	+ 0,0745	+ 0,0499	+ 0,0189	— 0,0008	— 0,0036	— 0,0009	+ 0,0001				
sin 12ψ	— 0,0222	— 0,0213	— 0,0137	— 0,0040	+ 0,0003	+ 0,0003					
sin 13ψ	— 0,0051	+ 0,0006	+ 0,0037	+ 0,0023	+ 0,0003						
sin 14ψ	+ 0,0076	+ 0,0042	+ 0,0007	— 0,0006	— 0,0002						
sin 15ψ	— 0,0028	— 0,0023	— 0,0010								
sin 16ψ	— 0,0002	+ 0,0003	+ 0,0004								
sin 17ψ	+ 0,0007	+ 0,0003									

S_5

ω_2	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°	165°
cos 0ψ	+16″,649	+15″,056	+12″,754	+10″,178	+7″,760	+5″,789	+4″,348	+3″,379	+2″,771	+2″,412	+2″,228
cos ψ	—15,195	—14,142	—12,469	—10,386	—8,155	—6,151	—4,541	—3,375	—2,590	—2,104	—1,841
cos 2ψ	— 7,766	— 5,915	— 3,523	— 1,309	+0,225	+0,980	+1,161	+1,045	+0,849	+0,665	+0,550
cos 3ψ	+12,233	+10,295	+ 7,549	+ 4,670	+2,304	+0,789	+0,046	—0,205	—0,228	—0,184	—0,140
cos 4ψ	— 5,074	— 4,731	— 3,982	— 2,861	—1,663	—0,733	—0,206	+0,004	+0,052	+0,043	+0,034
cos 5ψ	— 1,020	— 0,352	+ 0,324	+ 0,656	+0,585	+0,336	+0,121	+0,018	—0,010	—0,012	—0,007
cos 6ψ	+ 2,248	+ 1,660	+ 0,912	+ 0,283	—0,035	—0,089	—0,046	—0,008	+0,002		
cos 7ψ	— 1,031	— 0,904	— 0,647	— 0,332	—0,089	+0,003	+0,013	+0,002			
cos 8ψ	— 0,049	+ 0,080	+ 0,163	+ 0,145	+0,065	+0,010	—0,002				
cos 9ψ	+ 0,318	+ 0,194	+ 0,060	— 0,014	—0,020	—0,010					
cos 10ψ	— 0,168	— 0,132	— 0,076	— 0,023	+0,002						
cos 11ψ	+ 0,010	+ 0,027	+ 0,030	+ 0,018							
cos 12ψ	+ 0,039	+ 0,018	0,000								
cos 13ψ	— 0,025	— 0,016	— 0,008								
cos 14ψ	+ 0,004	+ 0,005									

ω_2	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°	165°
sin ψ	—23,184	—20,312	—16,247	—11,840	—7,883	—4,824	—2,715	—1,375	—0,567	—0,101	+0,140
sin 2ψ	+17,845	+15,982	+13,158	+ 9,833	+6,613	+3,995	+2,160	+1,023	+0,391	+0,064	—0,084
sin 3ψ	— 2,097	— 2,669	— 3,129	— 3,106	—2,552	—1,742	—0,995	—0,471	—0,172	—0,027	+0,033
sin 4ψ	— 5,448	— 4,057	— 2,297	— 0,776	+0,113	+0,382	+0,312	+0,162	+0,062	+0,008	—0,011
sin 5ψ	+ 4,154	+ 3,477	+ 2,451	+ 1,343	+0,493	+0,063	—0,058	—0,047	—0,019	—0,003	+0,003
sin 6ψ	— 0,794	— 0,925	— 0,914	— 0,676	—0,343	—0,100	—0,004	+0,009	+0,008		
sin 7ψ	— 0,785	— 0,443	— 0,085	+ 0,111	+0,112	+0,054	+0,009	—0,001			
sin 8ψ	+ 0,690	+ 0,518	+ 0,284	+ 0,083	—0,009	—0,014	—0,004				
sin 9ψ	— 0,177	— 0,185	— 0,148	— 0,076	—0,014	+0,003					
sin 10ψ	— 0,088	— 0,027	+ 0,020	+ 0,030	+0,012						
sin 11ψ	+ 0,098	+ 0,062	+ 0,023								
sin 12ψ	— 0,031	— 0,029	— 0,020								
sin 13ψ	— 0,008	+ 0,001	+ 0,006								
sin 14ψ	+ 0,013	+ 0,006									

Das Glied $-\frac{5}{4}(1-k_1 \sin\psi)\, T_2 . S_7$ ist so klein, dass es schon von $\omega_2 = 75°$ an gänzlich vernachlässigt werden durfte. Ich lasse deshalb S_7 fort und gebe nur die Werthe von:

$$\frac{\rho\,(\Delta)^{-3}}{[R\,.\,(1-k_1\,\sin\psi)]^{\frac{3}{2}}}$$

ω_2	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°	165°
cos 0ψ	+64″,7516	+61″,7128	+57″,0133	+51″,1984	+44″,9893	+39″,1050	+34″,0648	+30″,1113	+27″,2542	+25″,3745	+24″,3222
cos 1ψ	—45,0096	—43,7489	—41,4285	—37,9408	—33,4762	—28,5347	—23,7250	—19,5422	—16,2619	—13,9621	—12,6159
cos 2ψ	—17,8978	—14,1463	— 8,9370	— 3,5527	+ 0,8036	+ 3,4859	+ 4,5484	+ 4,4945	+ 3,9082	+ 3,2354	+ 2,7441

ω_2	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°	165°
cos 3ψ	+23″,4030	+20″,4049	+15″,8658	+10″,6135	+ 5″,7487	+ 2″,1615	+ 0″,1151	—0″,7065	—0″,8343	—0″,7028	—0″,5581
cos 4ψ	— 8,3296	— 8,0211	— 7,1247	— 5,5056	— 3,4937	— 1,9626	— 0,5193	+0,0184	+0,1620	+0,1493	+0,1112
cos 5ψ	— 1,3584	— 0,4441	+ 0,5482	+ 1,1161	+ 1,0744	+ 0,6657	+ 0,2613	+0,0393	—0,0294	—0,0322	—0,0227
cos 6ψ	+ 2,7765	+ 2,1129	+ 1,2102	+ 0,3933	— 0,0653	— 0,1590	— 0,0888	—0,0216	+0,0027	+0,0049	+0,0027
cos 7ψ	— 1,1630	— 1,0492	— 0,7854	— 0,4238	— 0,1256	+ 0,0074	+ 0,0230	+0,0087	+0,0013	+0,0004	+0,0007
cos 8ψ	— 0,0340	+ 0,0954	+ 0,1854	+ 0,1660	+ 0,0797	+ 0,0152	— 0,0030	—0,0020	+0,0002	+0,0003	+0,0003
cos 9ψ	+ 0,2876	+ 0,1801	+ 0,0570	— 0,0173	— 0,0257	— 0,0093	— 0,0009	—0,0002	—0,0006	—0,0004	—0,0004
cos 10ψ	— 0,1436	— 0,1171	— 0,0682	— 0,0195	+ 0,0023	+ 0,0030	+ 0,0001		—0,0002	—0,0002	—0,0001
cos 11ψ	+ 0,0099	+ 0,0234	+ 0,0258	+ 0,0138	+ 0,0024	— 0,0005	— 0,0002			+0,0002	+0,0002
cos 12ψ	+ 0,0273	+ 0,0128	— 0,0004	— 0,0042	— 0,0016						
cos 13ψ	— 0,0164	— 0,0117	— 0,0048	— 0,0002	+ 0,0005						
cos 14ψ	+ 0,0026	+ 0,0036	+ 0,0027	+ 0,0007	— 0,0001						
cos 15ψ	+ 0,0021	+ 0,0006	— 0,0005	— 0,0004							
cos 16ψ	— 0,0017	— 0,0009	— 0,0001								
cos 17ψ	+ 0,0005	+ 0,0004									
sin 1ψ	—68,3706	—62,5688	—53,7591	—43,1568	—32,2353	—22,3006	—14,1309	—7,9331	—3,5391	—0,6561	+0,9707
sin 2ψ	+41,6808	+38,8116	+34,0472	+27,7280	+20,6682	+13,9324	+ 8,3792	+4,3675	+1,7916	+0,3146	—0,4128
sin 3ψ	— 4,2002	— 5,4669	— 6,7278	— 7,1850	— 6,4760	— 4,8914	— 3,0840	—1,5959	—0,6244	—0,1027	+0,1259
sin 4ψ	— 8,7527	— 6,7281	— 4,0047	— 1,4241	+ 0,2809	+ 0,9124	+ 0,8120	+0,4695	+0,1844	+0,0288	—0,0327
sin 5ψ	+ 5,8692	+ 5,0707	+ 3,7613	+ 2,2079	+ 0,8814	+ 0,1147	— 0,1302	—0,1141	—0,0467	—0,0049	+0,0100
sin 6ψ	— 1,0331	— 1,2226	— 1,2550	— 0,9872	— 0,5415	— 0,1754	— 0,0082	+0,0217	+0,0100	—0,0003	—0,0039
sin 7ψ	— 0,8516	— 0,4885	— 0,0864	+ 0,1514	+ 0,1683	+ 0,0806	+ 0,0148	—0,0039	—0,0032	—0,0008	+0,0001
sin 8ψ	+ 0,6964	+ 0,5378	+ 0,3043	+ 0,0925	— 0,0123	— 0,0223	— 0,0069	+0,0009	+0,0013	+0,0011	+0,0008
sin 9ψ	— 0,1704	— 0,1810	— 0,1491	— 0,0776	— 0,0176	+ 0,0030	+ 0,0023	+0,0004	+0,0001	+0,0001	+0,0002
sin 10ψ	— 0,0703	— 0,0206	+ 0,0202	+ 0,0265	+ 0,0113	+ 0,0008	— 0,0007	—0,0004	—0,0002	—0,0002	—0,0003
sin 11ψ	+ 0,0756	+ 0,0501	+ 0,0184	— 0,0013	— 0,0036	— 0,0009	+ 0,0001			0,0000	0,0000
sin 12ψ	— 0,0236	— 0,0221	— 0,0140	— 0,0039	+ 0,0003	+ 0,0003				+0,0002	+0,0002
sin 13ψ	— 0,0045	+ 0,0011	+ 0,0033	+ 0,0024	+ 0,0003						
sin 14ψ	+ 0,0075	+ 0,0040	+ 0,0004	— 0,0007	— 0,0002						
sin 15ψ	— 0,0029	— 0,0023	— 0,0010								
sin 16ψ	0,0000	+ 0,0004	+ 0,0004								
sin 17ψ	+ 0,0007	+ 0,0003									

Diese Ausdrücke sind nun der Reihe nach mit $(1 - k_1 \sin \psi) R^{\frac{3}{2}}$, $(1 - k_1 \sin \psi) R^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{r'}{a'} \cos f'$ und $(1 - k_1 \sin \psi) R^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{r'}{a'} \sin f'$ zu multipliciren. Das Resultat dieser Operationen ist in den folgenden Tafeln zusammengestellt:

$$\frac{\rho\, (\Delta)^{-3}}{\sqrt{1 - k_1 \sin \psi}}$$

ω_2	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°	165°
cos 0ψ	+87″,4695	+82″,4271	+74″,6864	+65″,2136	+55″,2405	+45″,9361	+38″,0867	+32″,0029	+27″,6344	+24″,7607	+23″,1463
cos ψ	—57,3465	—55,1054	—51,1648	—45,5444	—38,7213	—31,5608	—24,9575	—19,5150	—15,4566	—12,7326	—11,1890
cos 2ψ	—41,8071	—35,5890	—26,8453	—17,5399	— 9,5008	— 3,7297	— 0,2363	+ 1,5700	+ 2,3706	+ 2,6704	+ 2,7595
cos 3ψ	+41,1762	+36,5305	+29,4582	+21,1709	+13,2795	+ 7,0996	+ 3,0825	+ 0,8918	— 0,1198	— 0,5135	— 0,6396
cos 4ψ	—11,4819	—11,3992	—10,5818	— 8,6915	— 6,0668	— 3,5042	— 1,6299	— 0,5638	— 0,0809	+ 0,0940	+ 0,1422
cos 5ψ	— 4,3096	— 2,6024	— 0,6074	+ 0,8282	+ 1,2927	+ 1,0291	+ 0,5576	+ 0,2107	+ 0,0418	— 0,0170	— 0,0309
cos 6ψ	+ 5,1729	+ 4,1143	+ 2,6210	+ 1,1721	+ 0,2245	— 0,1295	— 0,1368	— 0,0625	— 0,0145	+ 0,0027	+ 0,0062
cos 7ψ	— 1,7306	— 1,6418	— 1,3259	— 0,8102	— 0,3229	— 0,0538	+ 0,0202	+ 0,0160	+ 0,0046	— 0,0002	— 0,0012
cos 8ψ	— 0,3035	— 0,0381	+ 0,1909	+ 0,2400	+ 0,1454	+ 0,0443	+ 0,0023	— 0,0034	— 0,0011	— 0,0001	+ 0,0003
cos 9ψ	+ 0,5638	+ 0,3845	+ 0,1645	+ 0,0108	— 0,0325	— 0,0176	— 0,0033	+ 0,0003	0,0000	+ 0,0001	
cos 10ψ	— 0,2265	— 0,1970	— 0,1264	— 0,0479	— 0,0035	+ 0,0042	+ 0,0010	+ 0,0002	— 0,0002	— 0,0002	
cos 11ψ	— 0,0099	+ 0,0214	+ 0,0367	+ 0,0245	+ 0,0065	— 0,0003	— 0,0005	— 0,0002			
cos 12ψ	+ 0,0564	+ 0,0310	+ 0,0057	— 0,0053	— 0,0031	— 0,0004					
cos 13ψ	— 0,0271	— 0,0208	— 0,0101	— 0,0015	+ 0,0007	+ 0,0001					
cos 14ψ	+ 0,0017	+ 0,0045	+ 0,0041	+ 0,0016	0,0000						
cos 15ψ	+ 0,0048	+ 0,0019	— 0,0005	— 0,0007	— 0,0001						
cos 16ψ	— 0,0030	— 0,0018	— 0,0005								
cos 17ψ	+ 0,0006	+ 0,0006	+ 0,0004								

ω_2	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°	165°
sin ψ	−120″,8608	−111″,6934	−97″,8831	−81″,4585	−64″,7995	−49″,9246	−37″,9466	−29″,0647	−22″,9183	−18″,9807	−16″,8035
sin 2ψ	+ 64,8499	+ 60,5854	+53,5732	+44,3920	+34,2822	+24,7627	+16,9716	+11,3198	+ 7,6172	+ 5,4148	+ 4,2809
sin 3ψ	+ 0,0803	− 2,4471	− 5,3207	− 7,2488	− 7,5481	− 6,4621	− 4,7739	− 3,1854	− 2,0154	− 1,2849	− 0,9026
sin 4ψ	− 17,7554	− 14,3727	− 9,7131	− 5,0642	− 1,6031	+ 0,2295	+ 0,7871	+ 0,7118	+ 0,4769	+ 0,2844	+ 0,1770
sin 5ψ	+ 9,6943	+ 8,5926	+ 6,7006	+ 4,3328	+ 2,1539	+ 0,7099	+ 0,0528	− 0,1185	− 0,1034	− 0,0601	− 0,0330
sin 6ψ	− 0,8430	− 1,3347	− 1,6566	− 1,4993	− 0,9631	− 0,4181	− 0,1012	+ 0,0072	+ 0,0208	+ 0,0123	+ 0,0056
sin 7ψ	− 1,8868	− 1,2442	− 0,4868	+ 0,0452	+ 0,2087	+ 0,1412	+ 0,0469	+ 0,0042	− 0,0039	− 0,0025	− 0,0009
sin 8ψ	+ 1,2024	+ 0,9724	+ 0,6088	+ 0,2449	+ 0,0287	− 0,0265	− 0,0156	− 0,0027	+ 0,0004	+ 0,0008	+ 0,0004
sin 9ψ	− 0,1958	− 0,2466	− 0,2347	− 0,1434	− 0,0464	− 0,0022	+ 0,0033	+ 0,0012	− 0,0001	− 0,0001	
sin 10ψ	− 0,1741	− 0,0811	+ 0,0056	+ 0,0361	+ 0,0213	+ 0,0041	− 0,0004	− 0,0003			
sin 11ψ	+ 0,1359	+ 0,0967	+ 0,0435	+ 0,0049	− 0,0048	− 0,0020	+ 0,0001				
sin 12ψ	− 0,0315	− 0,0338	− 0,0247	− 0,0091	− 0,0006	+ 0,0005					
sin 13ψ	− 0,0140	− 0,0027	+ 0,0045	+ 0,0041	+ 0,0009						
sin 14ψ	+ 0,0145	+ 0,0085	+ 0,0020	− 0,0008	− 0,0004						
sin 15ψ	− 0,0043	− 0,0038	− 0,0020	− 0,0003							
sin 16ψ	− 0,0006	+ 0,0003	+ 0,0007	+ 0,0002							
sin 17ψ	+ 0,0014	+ 0,0007									

$$\frac{\rho(\Delta)^{-3}}{\sqrt{1-k_1 \sin\psi}} \cdot \frac{r'}{a'} \cos f'$$

cos 0ψ	+56″,2448	+52″,2401	+46″,1571	+38″,8268	+31″,2501	+24″,3273	+18″,6137	+14″,2799	+11″,2288	+ 9″,2548	+ 8″,1589
cos ψ	−55,3265	−53,1635	−49,4866	−44,4369	−38,5234	−32,5196	−27,1513	−22,8511	−19,7250	−17,6699	−16,5217
cos 2ψ	−20,7801	−16,2991	−10,1837	− 4,0088	+ 0,8679	+ 3,8416	+ 5,1049	+ 5,2698	+ 4,9424	+ 4,5246	+ 4,2212
cos 3ψ	+29,8155	+25,8927	+20,0673	+13,4798	+ 7,5013	+ 3,1233	+ 0,5550	− 0,6122	− 0,9694	− 0,9775	− 0,9032
cos 4ψ	−11,1934	−10,6576	− 9,3488	− 7,1798	− 4,6025	− 2,3366	− 0,8368	− 0,0902	+ 0,1737	+ 0,2195	+ 0,2030
cos 5ψ	− 1,5223	− 0,3836	+ 0,8296	+ 1,4982	+ 1,4202	+ 0,9030	+ 0,3875	+ 0,0853	− 0,0297	− 0,0527	− 0,0493
cos 6ψ	+ 3,6124	+ 2,7321	+ 1,5553	+ 0,5047	− 0,0828	− 0,2107	− 0,1279	− 0,0393	− 0,0007	+ 0,0073	+ 0,0061
cos 7ψ	− 1,5783	− 1,4075	− 1,0417	− 0,5607	− 0,1709	+ 0,0062	+ 0,0316	+ 0,0142	+ 0,0031	+ 0,0007	+ 0,0008
cos 8ψ	− 0,0128	+ 0,1486	+ 0,2561	+ 0,2234	+ 0,1084	+ 0,0225	− 0,0037	− 0,0032	− 0,0003	+ 0,0005	+ 0,0005
cos 9ψ	+ 0,3752	+ 0,2322	+ 0,0707	− 0,0245	− 0,0346	− 0,0130	− 0,0011	0,0000	− 0,0004	− 0,0004	− 0,0004
cos 10ψ	− 0,1950	− 0,1572	− 0,0904	− 0,0257	+ 0,0031	+ 0,0042	+ 0,0007	+ 0,0001	− 0,0001	0,0000	+ 0,0001
cos 11ψ	+ 0,0164	+ 0,0334	+ 0,0351	+ 0,0185	+ 0,0033	− 0,0008				+ 0,0003	+ 0,0003
cos 12ψ	+ 0,0353	+ 0,0162	− 0,0010	− 0,0057	− 0,0022						
cos 13ψ	− 0,0222	− 0,0157	− 0,0063	− 0,0002	+ 0,0006						
cos 14ψ	+ 0,0038	+ 0,0056	+ 0,0034	+ 0,0014							
cos 15ψ	+ 0,0029	+ 0,0007	− 0,0007	− 0,0005							
cos 16ψ	− 0,0024	− 0,0013	− 0,0002								
cos 17ψ	+ 0,0006	+ 0,0004									

sin ψ	−79,3380	−72,2256	−61,6647	−49,3817	−37,2921	−26,9080	−18,9460	−13,3851	− 9,7905	− 7,6465	− 6,5287
sin 2ψ	+52,7016	+48,7591	+42,4309	+34,3770	+25,7590	+17,8558	+11,5287	+ 7,0062	+ 4,0540	+ 2,2809	+ 1,3525
sin 3ψ	− 6,3336	− 7,7270	− 9,0303	− 9,3400	− 8,3209	− 6,3782	− 4,2516	− 2,5008	− 1,3090	− 0,6091	− 0,2604
sin 4ψ	−10,9952	− 8,4031	− 4,9640	− 1,7545	+ 0,3520	+ 1,1618	+ 1,0973	+ 0,7200	+ 0,3738	+ 0,1587	+ 0,0560
sin 5ψ	+ 7,7455	+ 6,6489	+ 4,9013	+ 2,8812	+ 1,1819	+ 0,1906	− 0,1546	− 0,1627	− 0,0868	− 0,0283	− 0,0010
sin 6ψ	− 1,4883	− 1,6959	− 1,6919	− 1,3141	− 0,7290	− 0,2521	− 0,0245	+ 0,0268	+ 0,0163	+ 0,0019	− 0,0047
sin 7ψ	− 1,0736	− 0,6032	− 0,0896	+ 0,2087	+ 0,2261	+ 0,1125	+ 0,0252	− 0,0039	− 0,0049	− 0,0020	− 0,0004
sin 8ψ	+ 0,9270	+ 0,7099	+ 0,3985	+ 0,1207	− 0,0161	− 0,0307	− 0,0101	+ 0,0005	+ 0,0021	+ 0,0016	+ 0,0011
sin 9ψ	− 0,2407	− 0,2484	− 0,2004	− 0,1037	− 0,0242	+ 0,0037	+ 0,0033	+ 0,0006	0,0000	0,0000	+ 0,0002
sin 10ψ	− 0,0869	− 0,0224	+ 0,0294	+ 0,0360	+ 0,0154	+ 0,0014	− 0,0012	− 0,0006	− 0,0004	− 0,0003	− 0,0003
sin 11ψ	+ 0,1003	+ 0,0658	+ 0,0239	− 0,0018	− 0,0049	− 0,0012	+ 0,0003				
sin 12ψ	− 0,0328	− 0,0301	− 0,0185	− 0,0053	+ 0,0005	+ 0,0004					
sin 13ψ	− 0,0055	+ 0,0021	+ 0,0052	+ 0,0032	+ 0,0004						
sin 14ψ	+ 0,0100	+ 0,0053	+ 0,0007	− 0,0009	− 0,0003						
sin 15ψ	− 0,0041	− 0,0032	− 0,0014								
sin 16ψ	+ 0,0001	+ 0,0006	+ 0,0005								
sin 17ψ	+ 0,0008	+ 0,0002									

$$\frac{\rho\,(\Delta)^{-3}}{\sqrt{1-k_1 \sin\psi}} \cdot \frac{r'}{a'} \sin f'$$

ω_2	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°	165°
cos 0ψ	—55″,8065	—53″,0236	—48″,6590	—43″,1599	—37″,1720	—31″,3824	—26″,3152	—22″,2442	—19″,2206	—17″,1737	—15″,9983
cos ψ	+21,0953	+20,6431	+19,6189	+17,8267	+15,3142	+12,4055	+ 9,5416	+ 7,0801	+ 5,2015	+ 3,9282	+ 3,2061
cos 2ψ	+38,7782	+34,5438	+28,3271	+21,2480	+14,5136	+ 8,9851	+ 4,9531	+ 2,2591	+ 0,5676	— 0,4326	— 0,9565
cos 3ψ	—27,7974	—25,4241	—21,5815	—16,7086	—11,6217	— 7,1895	— 3,9157	— 1,8226	— 0,6357	— 0,0300	+ 0,2418
cos 4ψ	+ 4,5235	+ 5,0999	+ 5,4734	+ 5,1784	+ 4,1648	+ 2,8110	+ 1,5881	+ 0,7422	+ 0,2666	+ 0,0410	— 0,0482
cos 5ψ	+ 4,7596	+ 3,4650	+ 1,8039	+ 0,3588	— 0,4476	— 0,6156	— 0,4438	+ 0,2216	— 0,0749	— 0,0051	+ 0,0200
cos 6ψ	— 3,6888	— 3,1056	— 2,1945	— 1,1889	— 0,4084	— 0,0152	+ 0,0787	+ 0,0530	+ 0,0166	— 0,0026	— 0,0087
cos 7ψ	+ 0,8151	+ 0,8858	+ 0,8331	+ 0,5989	+ 0,2951	+ 0,0812	— 0,0023	— 0,0127	— 0,0058	— 0,0012	+ 0,0004
cos 8ψ	+ 0,4435	+ 0,2231	— 0,0049	— 0,1182	— 0,1019	— 0,0416	— 0,0054	+ 0,0033	+ 0,0025	+ 0,0016	+ 0,0011
cos 9ψ	— 0,4246	— 0,3164	— 0,1663	— 0,0407	+ 0,0128	+ 0,0132	+ 0,0039	+ 0,0001	+ 0,0001	— 0,0001	+ 0,0001
cos 10ψ	+ 0,1208	+ 0,1196	+ 0,0916	+ 0,0430	+ 0,0079	— 0,0024	— 0,0013	— 0,0006	— 0,0001	— 0,0001	— 0,0003
cos 11ψ	+ 0,0337	+ 0,0049	— 0,0166	— 0,0167	— 0,0064	— 0,0004	+ 0,0005	+ 0,0002			
cos 12ψ	— 0,0449	— 0,0285	— 0,0094	+ 0,0018	+ 0,0022	+ 0,0004					
cos 13ψ	+ 0,0156	+ 0,0141	+ 0,0081	+ 0,0020	— 0,0002						
cos 14ψ	+ 0,0018	— 0,0022	— 0,0025	— 0,0013	— 0,0002						
cos 15ψ	— 0,0044	— 0,0023	— 0,0002	+ 0,0004							
cos 16ψ	+ 0,0019	+ 0,0013	+ 0,0006								
cos 17ψ	— 0,0002	— 0,0002	+ 0,0003								
sin ψ	+88,0970	+82,8288	+74,6975	+64,6958	+54,1383	+44,2929	+36,0080	+29,6054	+25,0174	+22,0007	+20,3059
sin 2ψ	—36,5771	—35,0067	—32,1701	—28,0618	—23,0998	—18,0241	—13,5459	—10,0634	— 7,6309	— 6,0978	— 5,2730
sin 3ψ	— 7,3999	— 5,0701	— 2,0472	+ 0,7124	+ 2,4903	+ 3,1318	+ 2,9519	+ 2,4101	+ 1,8367	+ 1,3885	+ 1,1151
sin 4ψ	+14,1620	+12,0429	+ 8,9372	+ 5,5393	+ 2,6475	+ 0,7527	— 0,1616	— 0,4322	— 0,4113	— 0,3160	— 0,2406
sin 5ψ	— 5,7737	— 5,4038	— 4,5796	— 3,3116	— 1,9234	— 0,8270	— 0,2036	+ 0,0402	+ 0,0887	+ 0,0742	+ 0,0556
sin 6ψ	— 0,4184	+ 0,1063	+ 0,6200	+ 0,8242	+ 0,6692	+ 0,3639	+ 0,1254	+ 0,0150	— 0,0130	— 0,0122	— 0,0070
sin 7ψ	+ 1,6217	+ 1,1870	+ 0,6213	+ 0,1490	— 0,0791	— 0,0983	— 0,0470	— 0,0109	— 0,0001	+ 0,0003	— 0,0011
sin 8ψ	— 0,7622	— 0,6648	— 0,4703	— 0,2327	— 0,0577	+ 0,0089	+ 0,0124	+ 0,0034	— 0,0001	— 0,0007	— 0,0006
sin 9ψ	+ 0,0228	+ 0,0930	+ 0,1312	+ 0,1023	+ 0,0437	+ 0,0068	— 0,0013	— 0,0006	+ 0,0006	+ 0,0005	+ 0,0005
sin 10ψ	+ 0,1639	+ 0,0963	+ 0,0234	— 0,0152	— 0,0153	— 0,0045	0,0000	+ 0,0003	+ 0,0001	— 0,0002	0,0000
sin 11ψ	— 0,0909	— 0,0715	— 0,0387	— 0,0094	+ 0,0021	+ 0,0016	— 0,0002			— 0,0003	— 0,0003
sin 12ψ	+ 0,0104	+ 0,0171	+ 0,0165	+ 0,0078	+ 0,0011	— 0,0003					
sin 13ψ	+ 0,0152	+ 0,0057	— 0,0007	— 0,0026	— 0,0007						
sin 14ψ	— 0,0100	— 0,0069	— 0,0023	+ 0,0002	+ 0,0003						
sin 15ψ	+ 0,0019	+ 0,0023	+ 0,0016	+ 0,0003							
sin 16ψ	+ 0,0010	+ 0,0002	— 0,0003	— 0,0002							
sin 17ψ	— 0,0011	— 0,0006									

Diese Reihen müssen besonders sorgfältig controllirt werden. Es wurden zu diesem Zweck für jeden Specialwerth von ω_2 aus dem ursprünglichen Ausdrucke für $(\Delta)^2$ die Grösse $\rho\,(\Delta)^{-3}$, aus den Reihen für $\frac{r'}{a'}\cos f'$ und $\frac{r'}{a'}\sin f'$ die Werthe dieser Grösssen für $\psi = 0°, 20°, 270°$ berechnet und die so erhaltenen Zahlen mit den Resultaten der Substitution der speciellen Werthe von ψ in obige Reihen verglichen. Diese drei Vergleichungen controlliren sämmtliche Coefficienten und grade diese Werthe von ψ wurden gewählt, weil dieselben die Rechnung bequemer ausfallen lassen, als andere. Das folgende Tableau giebt eine Vorstellung von der Genauigkeit der Rechnung. Die Differenzen sind im Sinne Reihe — Controllrechnung in Einheiten der 4ten Stelle angesetzt. Der Kürze halber sind $\frac{\rho\,(\Delta)^{-3}}{\sqrt{1-k_1\sin\psi}}$, $\frac{\rho\,(\Delta)^{-3}}{\sqrt{1-k_1\sin\psi}}\cdot\frac{r'}{a'}\cos f'$, $\frac{\rho\,(\Delta)^{-3}}{\sqrt{1-k_1\sin\psi}}\cdot\frac{r'}{a'}\sin f'$ mit L', M', N' bezeichnet.

ω_2	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°	165°
L'	−2 −30 −12	+ 3 −15 −24	+ 4 +21 −18	+ 5 +2 −2	−2 +13 + 1	−3 0 − 1	−4 0 +7	+2 −10 − 4	−13 0 + 3	−5 +1 +4	−3 −2 +
M'	−4 +15 −14	+ 4 − 3 −15	−14 − 5 − 1	+10 −4 −1	−9 − 3 + 6	−1 −1 + 3	−2 +2 +6	−3 + 3 −11	− 7 +7 −16	+3 −4 +2	+1 +7 −
N'	0 + 3 +17	−21 +21 +36	+31 − 1 0	− 3 +2 −8	−4 −18 +18	−6 −7 −10	+4 0 −3	+1 − 1 +10	+15 0 + 2	+4 −1 −7	+3 −3 −1

5. Der von der gegenseitigen Entfernung der beiden Himmelskörper unabhängige Theil der Störungsfunction verlangt die Entwickelung von

$$m = -\frac{\rho m'}{r'^3} \cdot \frac{r'}{a'} \cos f'$$

und

$$n = -\frac{\rho m'}{r'^3} \cdot \frac{r'}{a'} \sin f'$$

Die Coefficienten dieser Reihenentwickelungen, welche die mittlere Anomalie des Jupiter zum Argumente haben, habe ich Asten entlehnt und dieselben durch Einführung von Exponentialfunctionen, sowie durch Benutzung der Specialwerthe des Winkels φ, auf die Form gebracht:

$$m + n\sqrt{-1} = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_i t^i + \sqrt{-1} \sum_{-\infty}^{+\infty} s_i t^i \quad ,$$

$$t = e^{\sqrt{-1}\,\xi}$$

Die so erhaltenen Ausdrücke und die im vorigen § für L', M', N' aufgestellten Reihen müssen in solche verwandelt werden, die nach dem Argumente χ fortschreiten. Dieser Theil der Arbeit ist recht zeitraubend und mühsam, obgleich in Gyldén's «Recueil de tables» alle Mittel dazu gegeben sind. Zur Verwandlung von $m + n\sqrt{-1}$ in Reihen nach χ braucht man zunächst die Entwickelung:

$$e^{i\sqrt{-1}\,\xi} = \sum_{-\infty}^{+\infty} H_p^{(i)} e^{p\sqrt{-1}\,\chi}$$

Die H-Coefficienten sind in der Tafel 6 des «Recueil de tables» enthalten, ihre Logarithmen im Anhange zu Backlund's Abhandlung gegeben. Dieselben sind aus den $\Gamma^{(n)}$ und $\Sigma^{(n)}$-Coefficienten zusammengesetzt, welche der Entwickelung $\cos 2n \, am \frac{2K}{\pi} \cdot \frac{1}{2}\chi$ und $\sin 2n \, am \frac{2K}{\pi} \cdot \frac{1}{2}\chi$ angehören. Ihre Berechnung wird in Gyldén's Mémoire: «Studien auf dem Gebiete der Störungstheorie», sowie im «Recueil de tables» ausführlich gelehrt, weshalb

ich auf eine Reproduction dieser Theorie verzichte. In gleicher Weise enthalten die Tafeln 4 und 5 die Coefficienten von:

$$e^{n\sqrt{-1}\,\varphi} = e^{n\sqrt{-1}\,am\,\frac{2K_1}{\pi}\cdot\chi} = \sum_{-\infty}^{+\infty} H'^{(n)}_p\, e^{p\sqrt{-1}\,\chi}$$

Geht aber χ in $\frac{\pi}{2} - \chi$ über, so wird φ mit dem Argument ψ identisch. Man erhält somit $\cos n\psi$ und $\sin n\psi$ in Reihen nach χ ausgedrückt. Da andererseits $\cos n\psi\sqrt{1 - k_1 \sin\psi}$ und $\sin n\psi\sqrt{1 - k_1 \sin\psi}$ sich sofort als trigonometrische Reihen nach ψ darstellen lassen, so sieht man leicht ein, wie die Ausdrücke für $\left.\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\} n\psi\sqrt{1 - k_1 \sin\psi}$ nach χ erhalten wurden, welche in Tafel 15 gegeben sind. Die Logarithmen dieser Zahlen finden sich ebenfalls bei Backlund. — Nach Anwendung der erwähnten Tafeln erhält man somit m, n, L, M, N, als trigonometrische Reihen nach χ.

$$m + n\sqrt{-1}$$

	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°	165°
$\log c_{-2}$	5,316	5,394	5,495	5,599	5,696	5,778	5,845	5,896	5,933	5,957	5,971
c_{-1}	7,11725	7,10909	7,09534	7,07590	7,05093	7,02116	6,98813	6,95430	6,92287	6,89729	6,88058
c_1	0,6546658	0,6465118	0,6327598	0,6133160	0,5883503	0,5585832	0,5255499	0,4917150	0,4602857	0,4347083	0,4180031
c_2	9,026890	9,104490	9,205693	9,310291	9,406561	9,489001	9,555724	9,606899	9,643862	9,668435	9,682360
c_3	8,66877*n*	8,68061*n*	8,69710*n*	8,71434*n*	8,72836*n*	8,73612*n*	8,73632*n*	8,72970*n*	8,71887*n*	8,70740*n*	8,69885*n*
c_4	7,5966	7,5866	7,5662	7,5300	7,4710	7,3809	7,2485	7,0560	6,7612	6,1701	6,0708*n*
c_5	6,067*n*	5,973*n*	5,746*n*	4,572*n*	5,764	6,088	6,259	6,359	6,416	6,447	6,462
$\log s_{-2}$	6,1104*n*	6,1079*n*	6,1031*n*	6,0948*n*	6,0820*n*	6,0644*n*	6,0424*n*	6,0179*n*	5,9936*n*	5,9730*n*	5,9591*n*
s_{-1}	7,18668	7,19241	7,20131	7,21243	7,22466	7,23681	7,24788	7,25715	7,26428	7,26923	7,27211
s_1	0,7240941*n*	0,7298305*n*	0,7387250*n*	0,7498520*n*	0,7620774*n*	0,7742294*n*	0,7852939*n*	0,7945660*n*	0,8017015*n*	0,8066530*n*	0,8095336*n*
s_2	9,821289	9,818871	9,814014	9,805697	9,792957	9,775342	9,753373	9,728810	9,704516	9,683890	9,670066
s_3	8,45300*n*	8,41739*n*	8,35046*n*	8,23671*n*	8,03692*n*	7,57840*n*	7,53332	8,00160	8,19099	8,29094	8,34163
s_4	7,1146*n*	7,1898*n*	7,2861*n*	7,3824*n*	7,4659*n*	7,5307*n*	7,5755*n*	7,6021*n*	7,6148*n*	7,6187*n*	7,6188*n*
s_5	6,457	6,469	6,483	6,490	6,482	6,453	6,398	6,318	6,220	6,117	6,034

$$m$$

	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°	165°
cos 0χ	—2″,0020	—1″,9579	—1″,8855	—1″,7876	—1″,6692	—1″,5380	—1″,4037	—1″,2775	—1″,1697	—1″,0881	—1″,0374
cos χ	+3,6569	+3,5717	+3,4319	+3,2434	+3,0155	+2,7635	+2,5070	+2,2663	+2,0614	+1,9065	+1,8108
cos 2χ	+1,8446	+1,8174	+1,7727	+1,7109	+1,6344	+1,5472	+1,4558	+1,3675	+1,2906	+1,2311	+1,1937
cos 3χ	+0,7383	+0,7360	+0,7321	+0,7257	+0,7165	+0,7041	+0,6893	+0,6735	+0,6584	+0,6460	+0,6377
cos 4χ	+0,2518	+0,2544	+0,2587	+0,2640	+0,2695	+0,2748	+0,2794	+0,2829	+0,2850	+0,2859	+0,2863
cos 5χ	+0,0730	+0,0748	+0,0780	+0,0824	+0,0874	+0,0927	+0,0979	+0,1025	+0,1061	+0,1088	+0,1103
cos 6χ	+0,0167	+0,0177	+0,0191	+0,0212	+0,0236	+0,0262	+0,0291	+0,0316	+0,0338	+0,0355	+0,0365
cos 7χ	+0,0021	+0,0025	+0,0030	+0,0037	+0,0046	+0,0056	+0,0068	+0,0079	+0,0088	+0,0096	+0,0102
cos 8χ	—0,0005	—0,0004	—0,0003	—0,0001	+0,0001	+0,0004	+0,0008	+0,0012	+0,0016	+0,0019	+0,0022
cos 9χ	—0,0006	—0,0006	—0,0005	—0,0005	—0,0004	—0,0004	—0,0003	—0,0002	—0,0001	0,0000	+0,0001
cos 10χ	—0,0002	—0,0003	—0,0002	—0,0004	—0,0003	—0,0003	—0,0003	—0,0002	—0,0002	—0,0002	—0,0001

	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°	165°
sin χ	+4″,3077	+4″,3555	+4″,4305	+4″,5243	+4″,6269	+4″,7281	+4″,8185	+4″,8921	+4″,9467	+4″,9834	+5″,0040
sin 2χ	+1,8898	+1,9201	+1,9678	+2,0299	+2,1015	+2,1766	+2,2486	+2,3123	+2,3636	+2,4004	+2,4225
sin 3χ	+0,4646	+0,4776	+0,4985	+0,5268	+0,5615	+0,5994	+0,6381	+0,6746	+0,7055	+0,7286	+0,7429
sin 4χ	+0,0454	+0,0496	+0,0566	+0,0665	+0,0792	+0,0941	+0,1100	+0,1256	+0,1398	+0,1504	+0,1572
sin 5χ	—0,0255	—0,0247	—0,0230	—0,0205	—0,0173	—0,0128	—0,0080	—0,0029	+0,0020	+0,0059	+0,0084
sin 6χ	—0,0198	—0,0199	—0,0198	—0,0198	—0,0193	—0,0186	—0,0176	—0,0164	—0,0154	—0,0144	—0,0137
sin 7χ	—0,0089	—0,0091	—0,0091	—0,0094	—0,0097	—0,0100	—0,0099	—0,0099	—0,0099	—0,0098	—0,0097
sin 8χ	—0,0032	—0,0032	—0,0033	—0,0037	—0,0037	—0,0040	—0,0042	—0,0043	—0,0045	—0,0044	—0,0045
sin 9χ	—0,0009	—0,0010	—0,0010	—0,0010	—0,0013	—0,0013	—0,0015	—0,0016	—0,0016	—0,0016	—0,0016
sin 10χ	—0,0002	—0,0002	—0,0003	—0,0003	—0,0003	—0,0004	—0,0004	—0,0005	—0,0005	—0,0005	—0,0006

n

	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°	165°
cos 0χ	+2″,5879	+2″,6183	+2″,6656	+2″,7254	+2″,7912	+2″,8569	+2″,9165	+2″,9658	+3″,0031	+3″,0284	+3″,0429
cos χ	—4,8949	—4,9497	—5,0347	—5,1409	—5,2579	—5,3727	—5,4753	—5,5591	—5,6213	—5,6628	—5,6860
cos 2χ	—1,9042	—1,9347	—1,9830	—2,0455	—2,1175	—2,1930	—2,2658	—2,3299	—2,3816	—2,4188	—2,4411
cos 3χ	—0,4646	—0,4776	—0,4985	—0,5268	—0,5613	—0,5992	—0,6379	—0,6742	—0,7051	—0,7284	—0,7427
cos 4χ	—0,0452	—0,0494	—0,0564	—0,0663	—0,0790	—0,0939	—0,1098	—0,1254	—0,1396	—0,1502	—0,1570
cos 5χ	+0,0255	+0,0247	+0,0230	+0,0205	+0,0173	+0,0128	+0,0080	+0,0029	—0,0020	—0,0059	—0,0084
cos 6χ	+0,0198	+0,0199	+0,0198	+0,0198	+0,0193	+0,0186	+0,0176	+0,0164	+0,0154	+0,0144	+0,0137
cos 7χ	+0,0089	+0,0091	+0,0091	+0,0094	+0,0097	+0,0100	+0,0099	+0,0099	+0,0099	+0,0098	+0,0097
cos 8χ	+0,0032	+0,0032	+0,0033	+0,0037	+0,0037	+0,0040	+0,0042	+0,0043	+0,0045	+0,0044	+0,0045
cos 9χ	+0,0009	+0,0010	+0,0010	+0,0010	+0,0013	+0,0013	+0,0015	+0,0016	+0,0016	+0,0016	+0,0016
cos 10χ	+0,0002	+0,0002	+0,0003	+0,0003	+0,0003	+0,0004	+0,0004	+0,0005	+0,0005	+0,0005	+0,0006

	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°	165°
sin χ	+3,2147	+3,1395	+3,0167	+2,8508	+2,6507	+2,4291	+2,2034	+1,9919	+1,8120	+1,6757	+1,5918
sin 2χ	+1,8286	+1,8016	+1,7571	+1,6959	+1,6202	+1,5338	+1,4432	+1,3557	+1,2794	+1,2205	+1,1835
sin 3χ	+0,7375	+0,7352	+0,7313	+0,7249	+0,7157	+0,7035	+0,6889	+0,6731	+0,6578	+0,6454	+0,6371
sin 4χ	+0,2516	+0,2542	+0,2585	+0,2638	+0,2693	+0,2748	+0,2794	+0,2829	+0,2850	+0,2859	+0,2863
sin 5χ	+0,0730	+0,0748	+0,0780	+0,0824	+0,0874	+0,0927	+0,0979	+0,1025	+0,1061	+0,1088	+0,1103
sin 6χ	+0,0167	+0,0177	+0,0191	+0,0212	+0,0236	+0,0262	+0,0291	+0,0316	+0,0338	+0,0355	+0,0365
sin 7χ	+0,0021	+0,0025	+0,0030	+0,0037	+0,0046	+0,0056	+0,0068	+0,0079	+0,0088	+0,0096	+0,0102
sin 8χ	—0,0005	—0,0004	—0,0003	—0,0001	+0,0001	+0,0004	+0,0008	+0,0012	+0,0016	+0,0019	+0,0022
sin 9χ	—0,0006	—0,0006	—0,0005	—0,0005	—0,0004	—0,0004	—0,0003	—0,0002	—0,0001	0,0000	+0,0001
sin 10χ	—0,0002	—0,0003	—0,0002	—0,0004	—0,0003	—0,0003	—0,0003	—0,0002	—0,0002	—0,0002	—0,0001

$$L = \rho\,(\Delta)^{-3}$$

ω_2	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°	165°
cos 0χ	+115″,8999	+108″,2198	+ 96″,6218	+ 82″,7387	+68″,5450	+55″,6648	+45″,0879	+37″,0748	+31″,4195	+27″,7422	+25″,6906
cos χ	—168,8778	—155,5224	—135,7065	—112,5588	—89,7066	—69,6692	—53,7921	—42,1405	—34,1224	—28,9988	—26,1692
cos 2χ	+ 57,7925	+ 49,7135	+ 38,5348	+ 26,8376	+16,8663	+ 9,6291	+ 5,0231	+ 2,3479	+ 0,8793	+ 0,1060	— 0,2650
cos 3χ	+ 9,7593	+ 11,9590	+ 14,0747	+ 14,7873	+13,6697	+11,2826	+ 8,5982	+ 6,3202	+ 4,6917	+ 3,6668	+ 3,1180
cos 4χ	— 23,1031	— 21,6594	— 18,0849	— 14,6239	— 9,9491	— 5,8630	— 2,9929	— 1,3142	— 0,4641	— 0,0777	+ 0,0792
cos 5χ	+ 12,7338	+ 10,5610	+ 7,3279	+ 3,8388	+ 1,0598	— 0,4955	— 0,9996	— 0,9502	— 0,7421	— 0,5617	— 0,4552
cos 6χ	— 2,2915	— 1,0169	+ 0,4992	+ 1,5652	+ 1,8007	+ 1,3933	+ 0,8120	+ 0,3730	+ 0,1319	+ 0,0242	— 0,0161
cos 7χ	— 1,7397	— 1,9996	— 2,0498	— 1,6606	— 0,9711	— 0,3443	+ 0,0030	+ 0,1115	+ 0,1093	+ 0,0838	+ 0,0654
cos 8χ	+ 1,6563	+ 1,4445	+ 1,0091	+ 0,4470	+ 0,0034	— 0,1720	— 0,1512	— 0,0797	— 0,0286	— 0,0053	+ 0,0030
cos 9χ	— 0,6075	— 0,3771	— 0,0708	+ 0,1590	+ 0,2052	+ 0,1218	+ 0,0326	— 0,0074	— 0,0152	— 0,0123	— 0,0089
cos 10χ	— 0,0223	— 0,1200	— 0,1949	— 0,1746	— 0,0815	— 0,0036	+ 0,0202	+ 0,0142	+ 0,0056	+ 0,0011	— 0,0004
cos 11χ	+ 0,1576	+ 0,1582	+ 0,1202	+ 0,0472	— 0,0108	— 0,0224	— 0,0101	— 0,0009	+ 0,0019	+ 0,0015	+ 0,0011
cos 12χ	— 0,0911	— 0,0640	— 0,0191	+ 0,0157	+ 0,0211	+ 0,0075	— 0,0015	— 0,0022	— 0,0011	— 0,0003	
cos 13χ	+ 0,0184	+ 0,0006	— 0,0168	— 0,0176	— 0,0059	+ 0,0021	+ 0,0020	+ 0,0004	— 0,0003	— 0,0002	
cos 14χ	+ 0,0099	+ 0,0143	+ 0,0128	+ 0,0048	— 0,0018	— 0,0020	— 0,0002	+ 0,0003			
cos 15χ	— 0,0104	— 0,0083	— 0,0030	+ 0,0016	+ 0,0020	+ 0,0002	— 0,0004				
cos 16χ	+ 0,0039	+ 0,0017	— 0,0013	— 0,0018	— 0,0003	+ 0,0004					
cos 17χ	+ 0,0003	+ 0,0011	+ 0,0015	+ 0,0004	— 0,0003	— 0,0001					
cos 18χ	— 0,0008	— 0,0011	— 0,0005	+ 0,0003	+ 0,0003						
cos 19χ	+ 0,0006	+ 0,0003	— 0,0001	— 0,0003	+ 0,0001						

ω_2	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°	165°
sin χ	—74″,1992	—70″,2641	—63″,7209	—54″,9931	—45″,1076	—35″,4069	—26″,9982	—20″,4352	—15″,7573	—12″,7254	—11″,0473
sin 2χ	+86,9323	+80,4273	+70,1019	+57,1623	+43,5511	+31,2607	+21,5305	+14,6228	+10,1397	+ 7,4711	+ 6,0889
sin 3χ	—51,1011	—44,8153	—35,5331	—25,0688	—15,4952	— 8,2465	— 3,6287	— 1,1124	+ 0,0786	+ 0,5688	+ 0,7416
sin 4χ	+13,0314	+ 9,2842	+ 4,4217	+ 0,0293	— 2,7115	— 3,6201	— 3,3192	— 2,5780	— 1,8774	— 1,3872	— 1,1160
sin 5χ	+ 4,7372	+ 5,7078	+ 6,4026	+ 6,1152	+ 4,8070	+ 3,0946	+ 1,6391	+ 0,7096	+ 0,2283	+ 0,0176	— 0,0621
sin 6χ	— 6,4358	— 5,9048	— 4,7637	— 3,1060	— 1,4387	— 0,2861	+ 0,2348	+ 0,3414	+ 0,2891	+ 0,2167	+ 0,1703
sin 7χ	+ 2,9154	+ 2,1793	+ 1,1210	+ 0,1140	— 0,4616	— 0,5413	— 0,3658	— 0,1768	— 0,0624	— 0,0105	+ 0,0081
sin 8χ	— 0,2478	+ 0,1277	+ 0,5108	+ 0,6519	+ 0,4969	+ 0,2285	+ 0,0400	— 0,0321	— 0,0407	— 0,0322	— 0,0246
sin 9χ	— 0,5523	— 0,5968	— 0,5396	— 0,3376	— 0,1000	+ 0,0362	+ 0,0577	+ 0,0342	+ 0,0125	+ 0,0025	— 0,0013
sin 10χ	+ 0,3997	+ 0,3204	+ 0,1734	+ 0,0156	— 0,0648	— 0,0561	— 0,0200	+ 0,0003	+ 0,0053	+ 0,0046	+ 0,0035
sin 11χ	— 0,1134	— 0,0472	+ 0,0302	+ 0,0669	+ 0,0461	+ 0,0100	— 0,0058	— 0,0055	— 0,0023	— 0,0005	+ 0,0001
sin 12χ	— 0,0247	— 0,0471	— 0,0551	— 0,0346	— 0,0043	+ 0,0079	+ 0,0049	+ 0,0009	— 0,0007	— 0,0006	— 0,0004
sin 13χ	+ 0,0420	+ 0,0381	+ 0,0229	+ 0,0017	— 0,0078	— 0,0044	0,0000	+ 0,0005	+ 0,0004		
sin 14χ	— 0,0194	— 0,0112	+ 0,0004	+ 0,0064	+ 0,0038	— 0,0002	— 0,0009	— 0,0003			
sin 15χ	+ 0,0020	— 0,0025	— 0,0052	— 0,0034	— 0,0001	+ 0,0011	+ 0,0002				
sin 16χ	+ 0,0032	+ 0,0041	+ 0,0029	+ 0,0002	— 0,0009	— 0,0002					
sin 17χ	— 0,0029	— 0,0019	— 0,0002	+ 0,0007	+ 0,0002	— 0,0001					
sin 18χ	+ 0,0009	+ 0,0003	— 0,0005	— 0,0004	+ 0,0001						
sin 19χ	+ 0,0001	+ 0,0004	+ 0,0005	0,0000	— 0,0002						

$$M = \varrho\,(\Delta)^{-3} \cdot \frac{r'}{a'} \cos f'$$

ω_2	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°	165°
cos 0χ	+ 74″,0222	+68″,0410	+59″,1204	+48″,6491	+38″,1687	+28″,9268	+21″,5699	+16″,1783	+12″,4961	+10″,1726	+ 8″,9049
cos χ	—107,1515	—96,9715	—82,0968	—65,1674	—48,8959	—35,2228	—24,9091	—17,7650	—13,1477	—10,3760	— 8,9193
cos 2χ	+ 29,2004	+23,5289	+15,9267	+ 8,4099	+ 2,5495	— 1,0867	— 2,8236	— 3,3604	— 3,3250	— 3,1149	— 2,9348
cos 3χ	+ 14,8933	+15,8188	+16,2433	+15,3286	+12,9953	+ 9,9242	+ 6,9730	+ 4,6681	+ 3,1126	+ 2,1815	+ 1,7024
cos 4χ	— 18,9864	—17,3206	—14,3771	—10,4546	— 6,4005	— 3,1204	— 1,0204	+ 0,0527	+ 0,4855	+ 0,6113	+ 0,6285
cos 5χ	+ 8,5591	+ 6,7231	+ 4,1147	+ 1,4867	— 0,3821	— 1,1939	— 1,2188	— 0,9183	— 0,6057	— 0,3899	— 0,2760
cos 6χ	— 0,6060	+ 0,2903	+ 1,2593	+ 1,7706	+ 1,6159	+ 1,0502	+ 0,4820	+ 0,1220	— 0,0400	— 0,0929	— 0,1035
cos 7χ	— 1,7693	— 1 8436	— 1,6956	— 1,2106	— 0,5719	— 0,0855	+ 0,1241	+ 0,1449	+ 0,1021	+ 0,0619	+ 0,0396
cos 8χ	+ 1,2558	+ 1,0288	+ 0,6301	+ 0,1785	— 0,1202	— 0,1853	— 0,1170	— 0,0413	— 0,0007	+ 0,0130	+ 0,0156
cos 9χ	— 0,3491	— 0,1663	+ 0,0543	+ 0,1869	+ 0,1690	+ 0,0738	+ 0,0027	— 0,0189	— 0,0160	— 0,0094	— 0,0053
cos 10χ	— 0,0864	— 0,1458	— 0,1739	— 0,1282	— 0,0410	+ 0,0137	+ 0,0207	+ 0,0094	+ 0,0011	— 0,0017	— 0,0024
cos 11χ	+ 0,1356	+ 0,1239	+ 0,0804	+ 0,0190	— 0,0193	— 0,0185	— 0,0050	+ 0,0019	+ 0,0023	+ 0,0012	+ 0,0005
cos 12χ	— 0,0618	— 0,0382	— 0,0032	+ 0,0187	+ 0,0158	+ 0,0028	— 0,0025	— 0,0017	— 0,0002	+ 0,0003	+ 0,0004
cos 13χ	+ 0,0057	— 0,0065	— 0,0164	— 0,0127	— 0,0019	+ 0,0029	+ 0,0016	— 0,0001	— 0,0002		
cos 14χ	+ 0,0108	+ 0,0125	+ 0,0094	+ 0,0017	— 0,0024	— 0,0013	+ 0,0002	+ 0,0002			
cos 15χ	— 0,0078	— 0,0058	— 0,0014	+ 0,0020	+ 0,0013	— 0,0002	— 0,0004				
cos 16χ	+ 0,0025	+ 0,0010	— 0,0015	— 0,0012	+ 0,0001	+ 0,0003					
cos 17χ	+ 0,0005	+ 0,0012	+ 0,0011	+ 0,0002	— 0,0003						
cos 18χ	— 0,0008	— 0,0011	— 0,0001	+ 0,0002	+ 0,0002						
cos 19χ	+ 0,0004	+ 0,0003	— 0,0001	— 0,0002	+ 0,0001						

sin χ	— 67,4327	—63,8099	—57,9369	—50,3364	—41,9884	—34,0356	—27,3325	—22,2320	—18,6743	—16,4055	—15,1624
sin 2χ	+ 70,5870	+64,8104	+55,8333	+44,8749	+33,6671	+23,8217	+16,2191	+10,9254	+ 7,5239	+ 5,4969	+ 4,4383
sin 3χ	— 35,9092	—30,7358	—23,2731	—15,1416	— 8,0361	— 2,9807	— 0,0350	+ 1,3610	+ 1,8744	+ 1,9905	+ 1,9801
sin 4χ	+ 5,9037	+ 3,1910	— 0,1551	— 2,8777	— 4,1678	— 4,0743	— 3,2260	— 2,2550	— 1,4908	— 1,0000	— 0,7401
sin 5χ	+ 5,5486	+ 5,9649	+ 5,9804	+ 5,1599	+ 3,6431	+ 2,0229	+ 0,8096	+ 0,1279	— 0,1670	— 0,2628	— 0,2827
sin 6χ	— 5,0990	— 4,4820	— 3,3490	— 1,8913	— 0,5833	+ 0,1908	+ 0,4294	+ 0,3777	+ 0,2553	+ 0,1595	+ 0,1073
sin 7χ	+ 1,8415	+ 1,2333	+ 0,4170	— 0,2730	— 0,5623	— 0,4742	— 0,2501	— 0,0766	+ 0,0078	+ 0,0357	+ 0,0416
sin 8χ	+ 0,1021	+ 0,3524	+ 0,5648	+ 0,5621	+ 0,3506	+ 0,1093	— 0,0244	— 0,0539	— 0,0410	— 0,0244	— 0,0148
sin 9χ	— 0,5097	— 0,5029	— 0,4033	— 0,2062	— 0,0192	+ 0,0606	+ 0,0511	+ 0,0202	+ 0,0016	— 0,0048	— 0,0061
sin 10χ	+ 0,2888	+ 0,2115	+ 0,0864	— 0,0274	— 0,0662	— 0,0398	— 0,0066	+ 0,0060	+ 0,0061	+ 0,0038	+ 0,0020
sin 11χ	— 0,0551	— 0,0054	+ 0,0457	+ 0,0580	+ 0,0296	+ 0,0002	— 0,0079	— 0,0041	— 0,0006	+ 0,0003	+ 0,0006
sin 12χ	— 0,0343	— 0,0459	— 0,0438	— 0,0210	+ 0,0022	+ 0,0077	+ 0,0029	— 0,0003	— 0,0008	— 0,0003	— 0,0001
sin 13χ	+ 0,0336	+ 0,0276	+ 0,0128	— 0,0028	— 0,0068	— 0,0025	+ 0,0007	+ 0,0006	+ 0,0002		
sin 14χ	— 0,0123	— 0,0054	+ 0,0032	+ 0,0058	+ 0,0021	— 0,0008	— 0,0007				
sin 15χ	— 0,0003	— 0,0034	— 0,0048	— 0,0022	+ 0,0008	+ 0,0008	— 0,0001				
sin 16χ	+ 0,0031	+ 0,0034	+ 0,0015	— 0,0003	— 0,0006	0,0000					
sin 17χ	— 0,0018	— 0,0011	+ 0,0005	+ 0,0006	+ 0,0001	— 0,0002					
sin 18χ	+ 0,0002	— 0,0001	— 0,0006	— 0,0003	+ 0,0002						
sin 19χ	+ 0,0002	+ 0,0006	+ 0,0005	— 0,0001							

$$N = \rho\,\Delta^{-3} \cdot \frac{r'}{a'} \sin f'$$

ω_2	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°	165°
cos 0χ	− 78″,1185	− 73″,7040	− 66″,8881	−58″,4863	−49″,5697	−41″,1748	−34″,0110	−28″,3796	−24″,2704	−21″,5244	−19″,9614
cos χ	+123,2010	+115,2069	+103,0559	+88,4126	+73,2986	+59,4949	+48,0704	+39,3381	+33,1160	+29,0340	+26,7403
cos 2χ	− 53,1559	− 47,5059	− 39,3642	−30,3091	−21,8851	−15,0654	−10,0918	− 6,7149	− 4,5354	− 3,2082	− 2,4964
cos 3χ	+ 2,7107	+ 0,2787	− 2,6906	− 5,1121	− 6,3265	− 6,3662	− 5,7001	− 4,8317	− 4,0617	− 3,5030	− 3,1742
cos 4χ	+ 13,0242	+ 12,8729	+ 12,0773	+10,3509	+ 7,9295	+ 5,4239	+ 3,3675	+ 1,9516	+ 1,0935	+ 0,6205	+ 0,3911
cos 5χ	− 9,4556	− 8,2990	− 6,4017	− 4,0892	− 1,9459	− 0,4502	+ 0,3136	+ 0,5671	+ 0,5761	+ 0,5146	+ 0,4614
cos 6χ	+ 2,7925	+ 1,8727	+ 0,6522	− 0,4200	− 0,9796	− 0,9982	− 0,7284	− 0,4317	− 0,2240	− 0,1078	− 0,0547
cos 7χ	+ 0,6027	+ 0,9265	+ 1,1923	+ 1,1656	+ 0,8363	+ 0,4151	+ 0,1087	− 0,0361	− 0,0757	− 0,0752	− 0,0670
cos 8χ	− 1,0719	− 1,0155	− 0,8153	− 0,4709	− 0,1266	+ 0,0708	+ 0,1116	+ 0,0800	+ 0,0411	+ 0,0177	+ 0,0073
cos 9χ	+ 0,5216	+ 0,3809	+ 0,1660	− 0,0368	− 0,1282	− 0,1049	− 0,0444	− 0,0053	+ 0,0090	+ 0,0108	+ 0,0094
cos 10χ	− 0,0652	+ 0,0166	+ 0,0986	+ 0,1224	+ 0,0773	+ 0,0183	− 0,0105	− 0,0125	− 0,0071	− 0,0030	− 0,0010
cos 11χ	− 0,0840	− 0,0994	− 0,0909	− 0,0497	− 0,0035	+ 0,0147	+ 0,0104	+ 0,0027	− 0,0010	− 0,0012	− 0,0012
cos 12χ	+ 0,0670	+ 0,0541	+ 0,0258	− 0,0036	− 0,0145	− 0,0080	− 0,0003	+ 0,0015	+ 0,0012	+ 0,0005	+ 0,0001
cos 13χ	− 0,0206	− 0,0088	+ 0,0066	+ 0,0123	+ 0,0065	− 0,0005	− 0,0020	− 0,0005	+ 0,0001		
cos 14χ	− 0,0030	− 0,0074	− 0,0091	− 0,0050	+ 0,0007	+ 0,0019	+ 0,0004	− 0,0001	− 0,0001		
cos 15χ	+ 0,0065	+ 0,0068	+ 0,0032	− 0,0003	− 0,0016	− 0,0006	+ 0,0002				
cos 16χ	− 0,0033	− 0,0024	+ 0,0002	+ 0,0013	+ 0,0004	− 0,0001					
cos 17χ	+ 0,0005	− 0,0007	− 0,0008	− 0,0005	+ 0,0002	+ 0,0001					
cos 18χ	+ 0,0004	+ 0,0008	+ 0,0003	− 0,0001	− 0,0001						
cos 19χ	− 0,0003	− 0,0002	− 0,0001	+ 0,0001							
sin χ	+32,6084	+31,3323	+28,9671	+25,4536	+21,1049	+16,5361	+12,3749	+ 9,0163	+6,5759	+4,9810	+ 4,0979
sin 2χ	−48,9916	−46,2487	−41,5928	−35,2975	−28,1734	−21,2946	−15,5106	−11,1784	−8,2331	−6,4113	− 5,4415
sin 3χ	+35,7960	+32,3931	+27,0971	+20,6962	+14,3369	+ 9,0314	+ 5,2381	+ 2,8538	+1,5027	+0,8037	+ 0,4828
sin 4χ	−13,0048	−10,4247	− 6,8305	− 3,1755	− 0,3599	+ 1,2278	+ 1,7759	+ 1,7327	+1,4842	+1,2398	+ 1,0812
sin 5χ	− 0,7539	− 1,8053	− 2,9240	− 3,5048	− 3,2864	− 2,5087	− 1,6167	− 0,9136	−0,4717	−0,2340	− 0,1251
sin 6χ	+ 3,8913	+ 3,8226	+ 3,4173	+ 2,5729	+ 1,5073	+ 0,5986	+ 0,0547	− 0,1665	−0,2110	−0,1940	− 0,1788
sin 7χ	− 2,3105	− 1,8936	− 1,2171	− 0,4590	+ 0,1026	+ 0,3253	+ 0,2987	+ 0,1886	+0,0964	+0,0432	+ 0,0111
sin 8χ	+ 0,4963	+ 0,2065	− 0,1414	− 0,3662	− 0,3697	− 0,2251	− 0,0790	+ 0,0012	+0,0264	+0,0284	+ 0,0251
sin 9χ	+ 0,2532	+ 0,3324	+ 0,3627	+ 0,2801	+ 0,1263	+ 0,0054	− 0,0372	− 0,0323	−0,0169	−0,0071	− 0,0024
sin 10χ	− 0,2760	− 0,2450	− 0,1635	− 0,0518	+ 0,0278	+ 0,0427	+ 0,0227	+ 0,0043	−0,0027	−0,0040	− 0,0036
sin 11χ	+ 0,1093	+ 0,0656	+ 0,0050	− 0,0370	− 0,0370	− 0,0139	+ 0,0016	+ 0,0045	+0,0027	+0,0012	+ 0,0003
sin 12χ	− 0,0013	+ 0,0188	+ 0,0346	+ 0,0287	+ 0,0087	− 0,0042	− 0,0044	− 0,0014	+0,0002	+0,0007	+ 0,0005
sin 13χ	− 0,0250	− 0,0261	− 0,0193	− 0,0051	+ 0,0043	+ 0,0040	+ 0,0009	− 0,0006	−0,0003	−0,0001	
sin 14χ	+ 0,0155	+ 0,0106	+ 0,0025	− 0,0037	− 0,0034	− 0,0003	+ 0,0007	+ 0,0003			
sin 15χ	− 0,0035	− 0,0001	+ 0,0034	+ 0,0029	+ 0,0004	− 0,0007	− 0,0004				
sin 16χ	− 0,0015	− 0,0025	− 0,0025	− 0,0007	+ 0,0004	+ 0,0004					
sin 17χ	+ 0,0017	+ 0,0014	+ 0,0004	− 0,0004	− 0,0005	+ 0,0001					
sin 18χ	− 0,0007	− 0,0004	+ 0,0003	+ 0,0003	+ 0,0001						
sin 19χ	+ 0,0001	− 0,0003	− 0,0006	0,0000	+ 0,0001						

6. Die Gleichungen, welche zur Berechnung der Differentialquotienten der Elementenstörungen dienen, haben die Form:

$$\frac{1}{12}\frac{d\Upsilon}{d\omega_2} = P_1\,(M+m) + Q_1\,(N+n) + R_1 . L$$

$$\frac{1}{12}\frac{d\Psi}{d\omega_2} = P_2\,(M+m) + Q_2\,(N+n) + R_2 . L$$

$$\frac{1}{12}\frac{d\Xi}{d\omega_2} = P_3\,(M+m) + Q_3\,(N+n)$$

$$\frac{1}{12}\sec i\,\frac{dp}{d\omega_2} = P_4\,(M+m) + Q_4\,(N+n)$$

$$\frac{1}{12}\sec i\,\frac{dq}{d\omega_2} = P_5\,(M+m) + Q_5\,(N+n)$$

Mit Hilfe der oben gegebenen Specialwerthe von $\frac{r}{a}\cos f$, $\frac{r}{a}\sin f$, $\frac{r}{a}$ und $\frac{ndt}{d\omega_2}$ erhalten dann die Constanten P, Q, R folgende Werthe, wobei die Zahlen Logarithmen sind.

ω_2	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°	165°
P_1	9,4098458	9,6987515	9,8520807	9,9399932	9,9809712	9,9801710	9,9380195	9,8529596	9,7208822	9,5277151	9,2103130
Q_1	9,5094220	9,7949993	9,9432137	0,0249539	0,0598521	0,0546620	0,0116812	9,9309300	9,8085385	9,6282153	9,3220854
R_1	8,4768485	8,7890021	8,9783336	9,1118037	9,2046753	9,2592793	9,2736020	9,2436455	9,1622419	9,0111308	8,7220731
P_2	9,5601486*n*	9,8638482*n*	0,0415140*n*	0,1627594*n*	0,2451787*n*	0,2925820*n*	0,3034176*n*	0,2732419*n*	0,1938054*n*	0,0454759*n*	9,7587091*n*
Q_2	8,6290838*n*	8,9820718*n*	9,2189528*n*	9,3921702*n*	9,5091337*n*	9,5691116*n*	9,5695748*n*	9,5077799*n*	9,3803914*n*	9,1776213*n*	8,845814*n*
R_2	9,2217004	9,5083541	9,6581838	9,7417588	9,7781789	9,7734177	9,7288231	9,6436153	9,5139002	9,3248044	9,0113144
P_3	9,6064124	9,8987047	0,0577900	0,1540030	0,2060684	0,2193916	0,1944879	0,1293945	0,0186202	9,8453241	9,5424257
Q_3	9,6177400	9,9006175	0,0440679	0,1185494	0,1430545	0,1235284	0,0615096	9,9568607	9,8071061	9,5998286	9,2733153
P_4	7,752903	8,065056	8,254388	8,387858	8,480729	8,535333	8,549656	8,519700	8,438296	8,287185	7,998127
Q_4	7,799848	8,112002	8,301333	8,434803	8,527675	8,582279	8,596602	8,566645	8,485241	8,334130	8,045073
P_5	8,497754*n*	8,784408*n*	8,934238*n*	9,0178129*n*	9,0542330*n*	9,0494718*n*	9,0048772*n*	8,919669*n*	8,789954*n*	8,600858*n*	8,287368*n*
Q_5	8,544700*n*	8,831354*n*	8,981183*n*	9,0647584*n*	9,1011785*n*	9,0964173*n*	9,0518227*n*	8,966615*n*	8,836900*n*	8,647804*n*	8,334314*n*

Zur Controlle dieser Zahlen wurde die Gleichung:

$$0 = 3\,\frac{r}{a}\cos f\,.\,P_1 + 3\,\frac{r}{a}\sin f\,.\,P_2 + 4\,.\,P_3$$

und ebenso die entsprechenden für Q und R benutzt. Die 4 letzten Coefficienten sind durch die Relation:

$$\frac{P_4\,.\,P_5}{Q_5\,.\,Q_5} = tg^2\,\Pi'$$

mit einander verbunden, welche ebenfalls zur Controlle angewandt wurde.

Nach Multiplication von $(M + m)$, $(N + n)$ und L mit den zugehörigen Coefficienten erhielt ich:

$$\frac{1}{12}\cdot\frac{d\Upsilon}{d\omega_2}$$

ω_2	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°	165°
cos 0χ	−2″,4285	− 4″,6561	− 6″,4451	− 7″,5416	− 7″,7748	− 7″,1795	− 5″,9924	− 4″,5587	−3″,1639	−1″,9493	−0″,9202
cos χ	+6,5763	+12,5275	+17,1387	+19,7031	+19,8097	+17,7143	+14,2337	+10,3801	+6,9047	+4,0990	+1,8865
cos 2χ	−8,0836	−15,1127	−20,0230	−21,9816	−20,8427	−17,3840	−12,9373	− 8,7240	−5,3931	−3,0145	−1,3331
cos 3χ	+5,0349	+ 8,8848	+10,6163	+ 9,9232	+ 7,4085	+ 4,3042	+ 1,7470	+ 0,2187	−0,4026	−0,4684	−0,2781
cos 4χ	−1,3121	− 1,8628	− 1,2846	+ 0,1255	+ 1,5486	+ 2,2612	+ 2,1422	+ 1,5666	+0,9516	+0,4942	+0,2018
cos 5χ	−0,4478	− 1,1142	− 1,9173	− 2,4461	− 2,3258	− 1,6382	− 0,8291	− 0,2617	−0,0011	+0,0637	+0,0442
cos 6χ	+0,6887	+ 0,2718	+ 1,5465	+ 1,3393	+ 0,7556	+ 0,1705	− 0,1345	− 0,1793	−0,1184	−0,0565	−0,0203
cos 7χ	−0,3085	− 0,4595	− 0,3449	− 0,0214	+ 0,2724	+ 0,3432	+ 0,2359	+ 0,1061	+0,0319	+0,0049	−0,0005
cos 8χ	+0,0269	− 0,0286	− 0,1686	− 0,2816	− 0,2554	− 0,1230	− 0,0101	+ 0,0293	+0,0256	+0,0139	+0,0056
cos 9χ	+0,0608	+ 0,1316	+ 0,1782	+ 0,1451	+ 0,0487	− 0,0253	− 0,0359	− 0,0181	−0,0039	+0,0008	+0,0010
cos 10χ	−0,0438	− 0,0699	− 0,0556	− 0,0047	+ 0,0365	+ 0,0334	+ 0,0111	− 0,0011	−0,0029	−0,0016	−0,0005
cos 11χ	+0,0124	+ 0,0097	− 0,0111	− 0,0300	− 0,0244	− 0,0051	+ 0,0043	+ 0,0033	+0,0008	+0,0001	0,0000
cos 12χ	+0,0030	+ 0,0107	+ 0,0185	+ 0,0145	+ 0,0019	− 0,0050	− 0,0028	− 0,0003	+0,0005	+0,0003	+0,0001
cos 13χ	−0,0047	− 0,0088	− 0,0075	− 0,0004	+ 0,0048	+ 0,0026	− 0,0003	− 0,0004			
cos 14χ	+0,0019	+ 0,0025	− 0,0001	− 0,0032	− 0,0018	+ 0,0006	+ 0,0006				
cos 15χ	−0,0002	+ 0,0008	+ 0,0015	+ 0,0016	− 0,0003	− 0,0009	− 0,0002				
cos 16χ	−0,0003	− 0,0009	− 0,0010	+ 0,0002	+ 0,0005	+ 0,0003					
sin χ	−6,8677	−12,5335	−16,0600	−17,0356	−15,7204	−12,9227	− 9,6131	− 6,5513	− 4,1109	−2,3277	−1,0367
sin 2χ	+5,9878	+10,5730	+12,8323	+12,6575	+10,7355	+ 8,1057	+ 5,6032	+ 3,6198	+ 2,1983	+1,2233	+0,5407
sin 3χ	+1,1668	+ 2,7848	+ 4,8366	+ 6,7163	+ 7,6402	+ 7,2674	+ 5,9301	+ 4,2643	+ 2,7582	+1,5904	+0,7162

ω_2	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°	165°
sin 4χ	—2″,2022	—4″,1531	—5″,4160	—5″,5285	—4″,4518	—2″,7561	—1″,2134	—0″,2504	—0″,1553	+0″,2196	+0″,1337
sin 5χ	+1,3412	+2,2402	+2,3498	+1,6424	+0,5686	—0,2575	—0,5575	—0,4783	+0,2889	—0,1380	—0,0509
sin 6χ	—0,2454	—0,2178	+0,1646	+0,6812	+0,9498	+0,8211	+0,4873	+0,2022	+0,0542	+0,0038	—0,0041
sin 7χ	—0,1877	—0,4337	—0,6684	—0,7135	—0,4984	—0,1856	+0,0198	+0,0749	+0,0575	+0,0300	+0,0117
sin 8χ	+0,1782	+0,3109	+0,3236	+0,1826	—0,0124	—0,1128	—0,0976	—0,0451	—0,0118	—0,0001	+0,0013
sin 9χ	—0,0661	—0,0816	—0,0211	+0,0719	+0,1088	+0,0690	+0,0153	—0,0085	—0,0091	—0,0048	—0,0018
sin 10χ	—0,0031	—0,0277	—0,0659	—0,0774	—0,0425	—0,0005	+0,0131	+0,0075	+0,0018	—0,0002	—0,0004
sin 11χ	+0,0177	+0,0351	+0,0395	+0,0197	—0,0070	—0,0140	—0,0066	—0,0002	+0,0010	+0,0005	+0,0001
sin 12χ	—0,0099	—0,0141	—0,0060	+0,0076	+0,0114	+0,0039	—0,0011	—0,0012	—0,0004	+0,0001	+0,0001
sin 13χ	+0,0017	—0,0002	—0,0056	—0,0076	—0,0028	+0,0013	+0,0015	0,0000			
sin 14χ	+0,0012	+0,0032	+0,0045	+0,0019	—0,0013	—0,0011	—0,0001	+0,0002			
sin 15χ	—0,0011	—0,0020	—0,0009	+0,0008	+0,0012	+0,0002	—0,0005				
sin 16χ	+0,0004	+0,0004	—0,0008	—0,0010	—0,0002	+0,0004					

$$\frac{1}{12} \cdot \frac{d\Psi}{d\omega_2}$$

ω_2	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°	165°
cos 0χ	—3″,6326	—6″,5913	— 8″,3630	— 8″,7580	— 7″,9531	— 6″,4782	— 4″,8653	—3″,4537	—2″,3318	—1″,4425	—0″,6906
cos 1χ	+4,4170	+7,5488	+ 8,5563	+ 7,4281	+ 4,8863	+ 2,2523	+ 0,4313	—0,3475	—0,4211	—0,2396	—0,0837
cos 2χ	+0,6970	+2,2450	+ 4,9109	+ 8,0678	+10,5140	+11,2106	+10,0284	+7,6842	+5,1265	+2,9612	+1,3178
cos 3χ	—4,1470	—8,2252	—11,7437	—13,8031	—13,6876	—11,5683	— 8,4517	—5,4665	—3,2156	—1,7280	—0,7480
cos 4χ	+2,4028	+4,2606	+ 4,9848	+ 4,2176	+ 2,2771	+ 0,1256	— 1,3218	—1,7959	—1,5843	—1,0834	—0,5331
cos 5χ	—0,6121	—0,7700	— 0,2216	+ 0,8394	+ 1,7771	+ 2,0281	+ 1,5995	+0,9287	+0,4003	+0,1169	+0,0166
cos 6χ	—0,2874	—0,7345	— 1,2906	— 1,6442	— 1,4928	— 0,9212	— 0,3292	+0,0098	+0,1029	+0,0829	+0,0396
cos 7χ	+0,3260	+0,6112	+ 0,7305	+ 0,5495	+ 0,1419	— 0,2052	— 0,3056	—0,2291	—0,1218	—0,0519	—0,0179
cos 8χ	—0,1344	—0,1888	— 0,0992	+ 0,1023	+ 0,2529	+ 0,2328	+ 0,1097	+0,0129	—0,0216	—0,0209	—0,0107
cos 9χ	+0,0036	—0,0361	— 0,1191	— 0,1746	— 0,1325	— 0,0333	+ 0,0286	+0,0337	+0,0177	+0,0059	+0,0013
cos 10χ	+0,0306	+0,0665	+ 0,0865	+ 0,0605	— 0,0014	— 0,0353	— 0,0265	—0,0071	+0,0020	+0,0027	+0,0014
cos 11χ	—0,0193	—0,0300	— 0,0185	+ 0,0109	+ 0,0289	+ 0,0177	+ 0,0012	—0,0045	—0,0025	—0,0007	0,0000
cos 12χ	+0,0043	+0,0021	— 0,0095	— 0,0176	— 0,0104	+ 0,0019	+ 0,0043	+0,0017	—0,0004	—0,0005	—0,0002
cos 13χ	+0,0019	+0,0058	+ 0,0093	+ 0,0058	— 0,0023	— 0,0043	— 0,0014	+0,0006	+0,0002		
cos 14χ	—0,0021	—0,0038	— 0,0030	+ 0,0013	+ 0,0029	+ 0,0006	— 0,0006	—0,0003			
cos 15χ	+0,0008	+0,0009	— 0,0004	— 0,0019	— 0,0006	+ 0,0007	+ 0,0005				
cos 16χ	—0,0002	0,0000	+ 0,0010	+ 0,0004	— 0,0005	— 0,0004					
sin 1χ	+9,0400	+17,4954	+24,5739	+29,3143	+30,9676	+29,4400	+25,4056	+19,9916	+14,2898	+8,9927	+4,2954
sin 2χ	—9,8325	—18,5799	—25,0948	—28,4001	—28,1968	—25,1150	—20,3864	—15,2356	—10,4685	—6,4095	—3,0128
sin 3χ	+2,8045	+ 4,4892	+ 4,2778	+ 2,1426	— 1,0136	— 3,8329	— 5,3562	— 5,4439	— 4,5239	—3,1174	—1,5647
sin 4χ	+0,5533	+ 1,6004	+ 3,2093	+ 4,8238	+ 5,5927	+ 5,1014	+ 3,7259	+ 2,2102	+ 1,0730	+0,4208	+0,1239
sin 5χ	—1,1877	— 2,3355	— 3,1695	— 3,2576	— 2,4592	— 1,2103	— 0,1704	+ 0,3389	+ 0,4201	+0,3077	+0,1520
sin 6χ	+0,6206	+ 1,0184	+ 0,9695	+ 0,4263	— 0,2979	— 0,7392	— 0,7335	— 0,4841	— 0,2379	—0,0914	—0,0268
sin 7χ	—0,0816	— 0,0106	+ 0,2625	+ 0,5859	+ 0,6945	+ 0,5058	+ 0,2136	+ 0,0212	— 0,0423	—0,0389	—0,0195
sin 8χ	—0,0983	— 0,2338	— 0,3620	— 0,3622	— 0,1926	+ 0,0124	+ 0,1079	+ 0,0942	+ 0,0511	+0,0206	+0,0067
sin 9χ	+0,0828	+ 0,1441	+ 0,1392	+ 0,0462	— 0,0645	— 0,0967	— 0,0549	— 0,0093	+ 0,0082	+0,0087	+0,0045
sin 10χ	—0,0264	— 0,0276	+ 0,0113	+ 0,0618	+ 0,0691	+ 0,0298	— 0,0049	— 0,0115	— 0,0063	—0,0021	—0,0001
sin 11χ	—0,0035	— 0,0174	— 0,0372	— 0,0381	— 0,0124	+ 0,0109	+ 0,0123	+ 0,0039	— 0,0004	—0,0006	—0,0003
sin 12χ	+0,0085	+ 0,0165	+ 0,0174	+ 0,0043	— 0,0093	— 0,0088	— 0,0016	+ 0,0015	+ 0,0010	+0,0001	+0,0001
sin 13χ	—0,0041	— 0,0054	— 0,0005	+ 0,0063	+ 0,0058	+ 0,0008	— 0,0017	— 0,0007	— 0,0001		
sin 14χ	+0,0007	— 0,0007	— 0,0037	— 0,0040	— 0,0003	+ 0,0016	+ 0,0006	— 0,0002			
sin 15χ	+0,0005	+ 0,0017	+ 0,0023	+ 0,0006	— 0,0016	— 0,0006	+ 0,0004				
sin 16χ	—0,0005	— 0,0010	0,0000	+ 0,0007	+ 0,0004	— 0,0002					

$$\frac{1}{12} \cdot \frac{d\Xi}{d\omega_2}$$

cos 0χ	— 2″,2249	— 4″,2102	— 5″,7004	— 6″,4554	— 6″,3663	— 5″,5344	— 4″,2675	— 2″,9381	—1″,8175	—0″,9980	—0″,4313
cos 1χ	+ 7,2474	+13,7358	+18,6285	+21,1272	+20,8465	+18,1354	+14,0189	+ 9,7070	+6,0622	+3,3689	+1,4719
cos 2χ	—10,2906	—19,2545	—25,5445	—28,0810	—26,6423	—22,1735	—16,3783	—10,8741	—6,5599	—3,5586	—1,5334
cos 3χ	+ 7,2471	+12,9526	+15,8617	+15,4786	+12,4626	+ 8,3568	+ 4,6885	+ 2,2104	+0,8789	+0,2963	+0,0811

ω_2	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°	165°
cos 4χ	−2″,1868	−3″,3152	−2″,8231	−1″,0154	+1″,0595	+2″,3678	+2″,5938	+2″,1056	+1″,4160	+0″,8156	+0″,3629
cos 5χ	−0,4231	−1,1984	−2,2706	−3,1089	−3,1547	−2,4063	−1,3836	−0,5828	−0,1532	+0,0055	+0,0272
cos 6χ	+0,9283	+1,7495	+2,2042	+2,0286	+1,3001	+0,4820	−0,0192	−0,1691	−0,1403	−0,0774	−0,0311
cos 7χ	−0,4604	−0,7138	−0,6038	−0,1768	+0,2642	+0,4325	+0,3415	+0,1821	+0,0735	+0,0241	+0,0067
cos 8χ	+0,0640	+0,0092	−0,1795	−0,3595	−0,3638	−0,2070	−0,0484	+0,0223	+0,0301	+0,0192	+0,0084
cos 9χ	+0,0754	+0,1717	+0,2463	+0,2187	+0,0946	−0,0161	−0,0456	−0,0291	−0,0100	−0,0017	+0,0003
cos 10χ	−0,0620	−0,1023	−0,0894	−0,0221	+0,0415	+0,0470	+0,0203	+0,0015	−0,0033	−0,0023	−0,0010
cos 11χ	+0,0200	+0,0191	−0,0088	−0,0384	−0,0362	−0,0111	+0,0039	+0,0047	+0,0016	+0,0003	−0,0001
cos 12χ	+0,0029	+0,0127	+0,0250	+0,0220	+0,0052	−0,0060	−0,0042	−0,0009	+0,0006	+0,0004	+0,0001
cos 13χ	−0,0062	−0,0121	−0,0114	−0,0019	+0,0059	+0,0041	+0,0002	−0,0005	−0,0001		
cos 14χ	+0,0032	+0,0040	+0,0006	−0,0042	−0,0029	+0,0003	+0,0008	+0,0002			
cos 15χ	−0,0004	+0,0008	+0,0019	+0,0025	−0,0001	−0,0011	−0,0004				
cos 16χ	−0,0004	−0,0011	−0,0015	0,0000	+0,0007	+0,0004					
sin χ	−10,6483	−19,6648	−25,7222	−28,1225	−27,0239	−23,3653	−18,4359	−13,3910	−8,9492	−5,3505	−2,4744
sin 2χ	+9,7240	+17,4922	+21,9376	+22,7205	+20,5747	+16,8238	+12,6924	+8,9383	+5,8607	+3,4653	+1,5933
sin 3χ	+0,8300	+2,3887	+4,7845	+7,3092	+8,9119	+8,9914	+7,7725	+5,9356	+4,0784	+2,4811	+1,1596
sin 4χ	−2,8853	−5,5238	−7,3865	−7,8332	−6,6972	−4,5992	−2,5083	−1,0435	−0,2755	+0,0121	+0,0533
sin 5χ	+1,9492	+3,3277	+3,6554	+2,8302	+1,3805	+0,1204	−0,4955	−0,5659	−0,4067	−0,2297	−0,0985
sin 6χ	−0,4474	−0,5105	−0,0448	+0,6839	+1,1596	+1,1157	+0,7410	+0,3645	+0,1367	+0,0385	+0,0074
sin 7χ	−0,2169	−0,5348	−0,8778	−1,0007	−0,7703	−0,3627	−0,0549	+0,0614	+0,0653	+0,0392	+0,0165
sin 8χ	+0,2456	+0,4406	+0,4847	+0,3148	+0,0439	−0,1241	−0,1349	−0,0762	−0,0295	−0,0081	−0,0016
sin 9χ	−0,1016	−0,1352	−0,0609	+0,0719	+0,1420	+0,1049	+0,0344	−0,0044	−0,0109	−0,0073	−0,0031
sin 10χ	+0,0020	−0,0278	−0,0827	−0,1081	−0,0687	−0,0102	+0,0149	+0,0111	+0,0039	+0,0006	−0,0002
sin 11χ	+0,0230	+0,0477	+0,0573	+0,0336	−0,0041	−0,0184	−0,0108	−0,0016	+0,0010	+0,0006	+0,0002
sin 12χ	−0,0144	−0,0214	−0,0117	+0,0078	+0,0156	+0,0071	−0,0006	−0,0017	−0,0007	+0,0001	+0,0001
sin 13χ	+0,0032	+0,0011	−0,0068	−0,0107	−0,0049	+0,0012	+0,0021	+0,0003			
sin 14χ	+0,0014	+0,0041	+0,0065	+0,0034	−0,0013	−0,0017	−0,0003	+0,0003			
sin 15χ	−0,0015	−0,0028	−0,0017	+0,0007	+0,0018	+0,0003	−0,0007				
sin 16χ	+0,0006	+0,0007	−0,0011	−0,0013	−0,0005	+0,0005					

$$\frac{1}{12}\,\frac{dp}{d\omega_2}\sec i$$

ω_2	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°	165°
cos 0χ	−0″,0687	−0″,1524	−0″,2573	−0″,3729	−0″,4725	−0″,5250	−0″,5132	−0″,4438	−0″,3392	−0″,2232	−0″,1094
cos χ	+0,1603	+0,3421	+0,5487	+0,7536	+0,9053	+0,9551	+0,8884	+0,7324	+0,5363	+0,3404	+0,1627
cos 2χ	−0,1715	−0,3454	−0,5096	−0,6333	−0,6823	−0,6438	−0,5366	−0,3993	−0,2672	−0,1579	−0,0721
cos 3χ	+0,1027	+0,1897	+0,2411	+0,2386	+0,1827	+0,0984	+0,0213	−0,0262	−0,0423	−0,0366	−0,0201
cos 4χ	−0,0242	−0,0323	−0,0130	+0,0310	+0,0791	+0,1061	+0,1023	+0,0784	+0,0503	+0,0275	+0,0117
cos 5χ	−0,0106	−0,0281	−0,0523	−0,0725	−0,0739	−0,0545	−0,0270	−0,0060	+0,0038	+0,0056	+0,0034
cos 6χ	+0,0144	+0,0281	+0,0364	+0,0329	+0,0172	−0,0005	−0,0100	−0,0102	−0,0066	−0,0031	−0,0012
cos 7χ	−0,0061	−0,0093	−0,0064	+0,0025	+0,0113	+0,0136	+0,0093	+0,0041	+0,0010	0,0000	−0,0001
cos 8χ	+0,0004	−0,0012	−0,0049	−0,0083	−0,0077	−0,0034	+0,0005	+0,0018	+0,0014	+0,0008	+0,0003
cos 9χ	+0,0013	+0,0030	+0,0043	+0,0036	+0,0008	−0,0015	−0,0016	−0,0007	−0,0001	+0,0001	+0,0001
cos 10χ	−0,0009	−0,0015	−0,0011	+0,0002	+0,0014	+0,0012	+0,0003	−0,0001	−0,0002	−0,0001	
cos 11χ	+0,0003	+0,0001	−0,0004	−0,0008	−0,0007	0,0000	+0,0002	+0,0002			
cos 12χ	+0,0001	+0,0003	+0,0004	+0,0003	0,0000	−0,0002	−0,0001				
sin χ	−0,1315	−0,2443	−0,3211	−0,3487	−0,3296	−0,2806	−0,2224	−0,1679	−0,1203	−0,0776	−0,0381
sin 2χ	+0,1128	+0,2001	+0,2410	+0,2312	+0,1870	+0,1365	+0,0991	+0,0759	+0,0587	+0,0410	+0,0211
sin 3χ	+0,0298	+0,0772	+0,1478	+0,2259	+0,2813	+0,2903	+0,2555	+0,1974	+0,1368	+0,0840	+0,0395
sin 4χ	−0,0467	−0,0940	−0,1333	−0,1479	−0,1268	−0,0792	−0,0293	+0,0038	+0,0170	+0,0165	+0,0094
sin 5χ	+0,0270	+0,0466	+0,0500	+0,0328	+0,0018	−0,0234	−0,0316	−0,0258	−0,0157	−0,0077	−0,0029
sin 6χ	−0,0044	−0,0026	+0,0083	+0,0239	+0,0334	+0,0298	+0,0179	+0,0070	+0,0012	−0,0006	−0,0006
sin 7χ	−0,0042	−0,0103	−0,0170	−0,0193	−0,0137	−0,0040	+0,0029	+0,0043	+0,0031	+0,0016	+0,0006
sin 8χ	+0,0037	+0,0068	+0,0073	+0,0036	−0,0020	−0,0050	−0,0041	−0,0018	−0,0003	+0,0001	+0,0001
sin 9χ	−0,0013	−0,0015	−0,0001	+0,0025	+0,0037	+0,0022	+0,0003	−0,0006	−0,0005	−0,0003	−0,0001
sin 10χ	−0,0001	−0,0007	−0,0018	−0,0021	−0,0011	+0,0002	+0,0007	+0,0003	+0,0001		
sin 11χ	+0,0004	+0,0007	+0,0009	+0,0004	−0,0004	−0,0005	−0,0002				
sin 12χ	−0,0002	−0,0003	−0,0001	+0,0003	+0,0004	+0,0001					

$$\frac{1}{12}\,\frac{dq}{d\omega_2}\sec i$$

ω_2	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°	165°
cos 0χ	+0″,3817	+0″,7985	+1″,2307	+1″,5904	+1″,7697	+1″,7150	+1″,4642	+1″,1148	+0″,7627	+0″,4596	+0″,2129
cos χ	—0,8909	—1,7923	—2,6253	—3,2145	—3,3909	—3,1202	—2,5338	—1,8398	—1,2053	—0,7008	—0,3169
cos 2χ	+0,9532	+1,8103	+2,4382	+2,7013	+2,5560	+2,1033	+1,5308	+1,0032	+0,6005	+0,3252	+0,1403
cos 3χ	—0,5705	—0,9941	—1,1536	—1,0180	—0,6841	—0,3214	—0,0606	+0,0659	+0,0949	+0,0752	+0,0393
cos 4χ	+0,1345	+0,1691	+0,0623	—0,1321	—0,2964	—0,3466	—0,2921	—0,1970	—0,1130	—0,0567	—0,0227
cos 5χ	+0,0590	+0,1473	+0,2505	+0,3088	+0,2768	+0,1780	+0,0771	+0,0150	—0,0086	—0,0114	—0,0066
cos 6χ	—0,0801	—0,1470	—0,1743	—0,1402	—0,0646	+0,0017	+0,0284	+0,0256	+0,0147	+0,0065	+0,0022
cos 7χ	+0,0342	+0,0486	+0,0304	—0,0107	—0,0425	—0,0441	—0,0266	—0,0103	—0,0023	0,0000	+0,0002
cos 8χ	—0,0020	+0,0061	+0,0237	+0,0356	+0,0291	+0,0114	—0,0012	—0,0045	—0,0032	—0,0016	—0,0006
cos 9χ	—0,0073	—0,0157	—0,0206	—0,0152	—0,0031	+0,0047	+0,0046	+0,0019	+0,0003	—0,0001	—0,0001
cos 10χ	+0,0050	+0,0078	+0,0055	—0,0008	—0,0051	—0,0038	—0,0010	+0,0003	+0,0004	+0,0002	
cos 11χ	—0,0014	—0,0008	+0,0018	+0,0038	+0,0026	+0,0003	—0,0007	—0,0003			
cos 12χ	—0,0004	—0,0014	—0,0022	—0,0015	0,0000	+0,0007	+0,0003				
cos 13χ	+0,0005	+0,0010	+0,0008	—0,0001	—0,0006	—0,0002					
cos 14χ	—0,0002	—0,0004	+0,0001	+0,0004	+0,0002	—0,0001					
sin χ	+0,7303	+1,2811	+1,5361	+1,4875	+1,2343	+0,9165	+0,6342	+0,4218	+0,2702	+0,1597	+0,0741
sin 2χ	—0,6270	—1,0475	—1,1532	—0,9864	—0,7007	—0,4462	—0,2826	—0,1906	—0,1319	—0,0843	—0,0410
sin 3χ	—0,1654	—0,4049	—0,7073	—0,9639	—1,0533	—0,9486	—0,7288	—0,4957	—0,3074	—0,1729	—0,0770
sin 4χ	+0,2598	+0,4926	+0,6379	+0,6309	+0,4746	+0,2585	+0,0835	—0,0096	—0,0382	—0,0339	—0,0182
sin 5χ	—0,1500	—0,2443	—0,2396	—0,1381	—0,0069	+0,0765	+0,0900	+0,0647	+0,0353	+0,0159	+0,0056
sin 6χ	+0,0241	+0,0137	—0,0396	—0,1020	—0,1249	—0,0973	—0,0511	—0,0175	—0,0026	+0,0012	+0,0011
sin 7χ	+0,0233	+0,0537	+0,0811	+0,0822	+0,0513	+0,0130	—0,0081	—0,0110	—0,0071	—0,0033	—0,0012
sin 8χ	—0,0205	—0,0353	—0,0347	—0,0157	+0,0074	+0,0162	+0,0117	+0,0046	+0,0009	—0,0002	—0,0002
sin 9χ	+0,0072	+0,0082	0,0000	—0,0108	—0,0136	—0,0072	—0,0008	+0,0015	+0,0012	+0,0006	+0,0001
sin 10χ	+0,0006	+0,0037	+0,0083	+0,0090	+0,0040	—0,0008	—0,0018	—0,0009	—0,0001	+0,0001	+0,0001
sin 11χ	—0,0021	—0,0041	—0,0044	—0,0017	+0,0013	+0,0017	+0,0006	—0,0001	—0,0002		
sin 12χ	+0,0011	+0,0015	+0,0005	—0,0011	—0,0013	—0,0004	+0,0002	+0,0001			
sin 13χ	—0,0002	+0,0001	+0,0007	+0,0009	+0,0003	—0,0002	—0,0002				
sin 14χ	—0,0001	—0,0004	—0,0005	—0,0002	+0,0002	+0,0001					

7. Auf jede Horizontalreihe der obigen Zahlen ist nun die mechanische Quadratur anzuwenden. Bei der angewandten Art der Theilung der Bahn erhalten die Differentialquotienten der Elementenstörungen die Form:

$$\sum\sum s^{(i)}{}_p \sin p\,\omega_2 \left.\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\} i\chi$$

Zur Ermittelung der Coefficienten wurde das von Asten aufgestellte Schema benutzt. Die Richtigkeit der numerischen Rechnung bei Anwendung der mechanischen Quadratur wird am besten durch die Forderung controllirt, dass die Coefficienten der höheren Glieder klein ausfallen müssen. Indessen wurden noch stets aus den erhaltenen Reihen einige Specialwerthe berechnet, die mit den Ausgangswerthen identisch werden müssen. Ausserdem wurde in einigen Fällen auch von der Controllgleichung

$$0 = 3\,\frac{r}{a}\cos f\cdot\frac{d\Upsilon}{d\omega_2} + 3\,\frac{r}{a}\sin f\cdot\frac{d\Psi}{d\omega_2} + 4\,\frac{d\Xi}{d\omega_2}$$

Gebrauch gemacht.

Durch Integration nach ω_2 erhält man dann:

Y

	cos ω_2	cos $2\omega_2$	cos $3\omega_2$	cos $4\omega_2$	cos $5\omega_2$	cos $6\omega_2$	cos $7\omega_2$	cos $8\omega_2$	cos $9\omega_2$	cos $10\omega_2$	cos $11\omega_2$
cos 0χ	+ 83″,8415	+ 9″,8540	—0″,7643	—0″,2382	+0″,0025	+0″,0032	0″,0000	+0″,0004			
cos χ	—208,311	—30,740	+1,450	+0,771	+0,016	—0,011	—0,003	—0,002	0″,000	+0″,001	+0″,001
cos 2χ	+212,155	+43,917	+0,992	—1,002	—0,111	+0,009	+0,003	+0,001			
cos 3χ	— 69,185	—33,011	—5,483	+0,303	+0,211	+0,015	—0,004	—0,001			
cos 4χ	— 12,169	+ 6,579	+4,840	+0,786	—0,092	—0,043	—0,002	+0,005			
cos 5χ	+ 18,034	+ 5,822	—0,784	—0,871	—0,133	+0,024	+0,009	0,000			
cos 6χ	— 7,131	— 4,930	—1,392	+0,161	+0,179	+0,022	—0,007	—0,002			
cos 7χ	— 0,758	+ 1,025	+1,065	+0,295	—0,039	—0,035	—0,003	+0,002			
cos 8χ	+ 1,396	+ 0,612	—0,145	—0,232	—0,061	+0,010	+0,007	0,000			
cos 9χ	— 0,605	— 0,509	—0,210	+0,025	+0,052	+0,013	—0,003	—0,002			
cos 10χ	+ 0,028	+ 0,124	+0,141	+0,058	—0,005	—0,012	—0,002	+0,001			
cos 11χ	+ 0,094	+ 0,041	—0,020	—0,036	—0,015	+0,001	+0,003	0,000			
cos 12χ	— 0,052	— 0,044	—0,021	+0,003	+0,009	+0,003	0,000	—0,001			
cos 13χ	+ 0,009	+ 0,015	+0,015	+0,008	0,000	—0,003	—0,001				
cos 14χ	+ 0,003	+ 0,001	—0,003	—0,004	—0,002		+0,001				
cos 15χ	— 0,003	— 0,003	—0,002	0,000	+0,001						
cos 16χ	+ 0,001	+ 0,001	+0,002	+0,001							
sin χ	+163,115	+35,836	+2,585	—0,240	—0,057	—0,004	0,000	0,000			
sin 2χ	—112,400	—31,848	—4,921	—0,271	+0,074	+0,018	0,000	—0,001			
sin 3χ	— 75,860	— 6,317	+3,857	+1,090	+0,037	—0,027	—0,004	0,000			
sin 4χ	+ 38,910	+16,716	+1,569	—0,783	—0,215	+0,001	+0,007	+0,001			
sin 5χ	— 7,207	— 7,794	—3,148	—0,227	+0,169	+0,040	—0,002	—0,002			
sin 6χ	— 5,915	— 0,444	+1,382	+0,608	+0,030	—0,037	—0,008	+0,001	+0,001		
sin 7χ	+ 3,761	+ 2,169	+0,291	—0,279	—0,121	—0,003	+0,008	+0,001			
sin 8χ	— 0,645	— 0,933	—0,566	—0,076	+0,061	+0,024	0,000	—0,002			
sin 9χ	— 0,323	— 0,006	+0,208	+0,136	+0,016	—0,014	—0,005	0,000			
sin 10χ	+ 0,299	+ 0,194	+0,036	—0,048	—0,032	—0,003	+0,003	+0,001			
sin 11χ	— 0,082	— 0,094	—0,067	—0,014	+0,011	+0,007	+0,001	—0,001			
sin 12χ	— 0,011	+ 0,009	+0,024	+0,020	+0,004	—0,003	—0,002				
sin 13χ	+ 0,020	+ 0,014	+0,002	—0,006	—0,005	—0,001	+0,001				
sin 14χ	— 0,009	— 0,009	—0,006	—0,002	+0,001	+0,001					
sin 15χ	+ 0,001	+ 0,002	+0,003	+0,002	+0,001						
sin 16χ	+ 0,002	+ 0,001		—0,001	—0,001						

Ψ

	cos ω_2	cos $2\omega_2$	cos $3\omega_2$	cos $4\omega_2$	cos $5\omega_2$	cos $6\omega_2$	cos $7\omega_2$	cos $8\omega_2$	cos $9\omega_2$	cos $10\omega_2$	cos $11\omega_2$
cos 0χ	+ 84″,2675	+18″,0988	+2″,0740	—0″,1305	—0″,0598	—0″,0005	+0″,0033	+0″,0021	—0″,0001	—0″,0013	—0″,0014
cos χ	— 48,099	—26,934	—6,742	—0,025	+0,166	+0,007	—0,010	—0,007		+0,005	+0,005
cos 2χ	—109,834	+ 0,571	+8,005	+0,955	—0,135	—0,027	+0,002	+0,001		—0,001	—0,001
cos 3χ	+132,925	+25,692	—2,154	—0,592	—0,105	+0,036	+0,007	+0,001			
cos 4χ	— 15,245	—19,672	—4,068	+0,577	+0,294	+0,011	—0,009	—0,001			
cos 5χ	— 12,933	+ 1,693	+3,576	+0,695	—0,137	—0,057	—0,001	+0,002			
cos 6χ	+ 10,653	+ 4,279	—0,362	—0,724	—0,119	+0,032	+0,011	0,000	—0,001		
cos 7χ	— 1,408	— 2,497	—1,019	+0,095	+0,151	+0,020	—0,008	—0,003			
cos 8χ	— 0,910	+ 0,136	+0,591	+0,227	—0,027	—0,032	—0,003	+0,002			
cos 9χ	+ 0,682	+ 0,433	—0,005	—0,143	—0,049	+0,007	+0,007	+0,001			
cos 10χ	— 0,179	— 0,225	—0,139	0,000	+0,034	+0,010	—0,002	—0,002			
cos 11χ	— 0,034	+ 0,024	+0,065	+0,040	0,000	—0,008	—0,002	0,000			
cos 12χ	+ 0,046	+ 0,029	0,000	—0,018	—0,010	0,000	+0,002	+0,001			
cos 13χ	— 0,016	— 0,019	—0,014	—0,001	+0,005	+0,003	0,000				
cos 14χ	+ 0,002	+ 0,004	+0,006	+0,005	+0,001	—0,001	—0,001				
cos 15χ	+ 0,001	+ 0,001	0,000	—0,002	—0,001						
cos 16χ		— 0,001	—0,001		+0,001						

	$\cos\omega_2$	$\cos 2\omega_2$	$\cos 3\omega_2$	$\cos 4\omega_2$	$\cos 5\omega_2$	$\cos 6\omega_2$	$\cos 7\omega_2$	$\cos 8\omega_2$	$\cos 9\omega_2$	$\cos 10\omega_2$	$\cos 11\omega_2$
$\sin\chi$	—341″,538	—30″,875	+3″,936	+0″,709	+0″,010	—0″,007	—0″,002	—0″,001			
$\sin 2\chi$	+301,598	+43,882	—0,166	—0,859	—0,138	+0,001	+0,004	+0,001			
$\sin 3\chi$	+ 24,024	—26,315	—6,941	—0,020	+0,226	+0,030	—0,003	—0,001			
$\sin 4\chi$	— 48,816	— 6,569	+4,108	+1,243	—0,023	—0,053	—0,005	+0,001			
$\sin 5\chi$	+ 19,008	+10,808	+1,090	—0,824	—0,227	+0,013	+0,011	+0,001			
$\sin 6\chi$	+ 1,302	— 3,498	—2,222	—0,178	+0,175	+0,041	—0,004	—0,003			
$\sin 7\chi$	— 4,027	— 1,028	+0,742	+0,467	+0,025	—0,038	—0,008	+0,001	+0″,001		
$\sin 8\chi$	+ 1,303	+ 1,231	+0,300	—0,172	—0,099	—0,003	+0,008	+0,001			
$\sin 9\chi$	— 0,046	— 0,331	—0,333	—0,073	+0,041	+0,021	0,000	—0,002			
$\sin 10\chi$	— 0,234	— 0,083	+0,080	+0,086	+0,016	—0,010	—0,005	0,000			
$\sin 11\chi$	+ 0,111	+ 0,102	+0,039	—0,020	—0,022	—0,003	+0,002	+0,001			
$\sin 12\chi$	— 0,018	— 0,033	—0,035	—0,013	+0,005	+0,005	+0,001				
$\sin 13\chi$	— 0,011	— 0,003	+0,008	+0,010	+0,004	—0,001	—0,001				
$\sin 14\chi$	+ 0,009	+ 0,008	+0,003	—0,002	—0,003	—0,001					
$\sin 15\chi$	— 0,003	— 0,004	—0,003	—0,002	+0,001	+0,001					
$\sin 16\chi$			+0,001	+0,001	+0,001						

Ξ

	$\cos\omega_2$	$\cos 2\omega_2$	$\cos 3\omega_2$	$\cos 4\omega_2$	$\cos 5\omega_2$	$\cos 6\omega_2$	$\cos 7\omega_2$	$\cos 8\omega_2$	$\cos 9\omega_2$	$\cos 10\omega_2$	$\cos 11\omega_2$
$\cos 0\chi$	+ 65″,0969	+11″,6570	—0″,4342	—0″,2642	+0″,0022	+0″,0032	—0″,0004	0″,0000	+0″,0002	+0″,0002	+0″,0003
$\cos\chi$	—213,568	—37,736	+1,373	+0,912	+0,011	—0,012	—0,001	0,000			
$\cos 2\chi$	+269,265	+56,990	+0,854	—1,307	—0,121	+0,012	+0,003	+0,001			
$\cos 3\chi$	—121,202	—44,904	—6,522	+0,528	+0,263	+0,014	—0,005	—0,001			
$\cos 4\chi$	— 8,248	+12,561	+6,490	+0,877	—0,141	—0,052	—0,001	+0,001			
$\cos 5\chi$	+ 24,800	+ 6,458	—1,619	—1,144	—0,140	+0,035	+0,011	0,000			
$\cos 6\chi$	— 11,715	— 6,969	—1,585	+0,316	+0,221	+0,022	—0,009	—0,002			
$\cos 7\chi$	— 0,370	+ 1,899	+1,497	+0,333	—0,071	—0,044	—0,003	+0,002			
$\cos 8\chi$	+ 1,940	+ 0,679	—0,315	—0,322	—0,067	+0,017	+0,009	0,000			
$\cos 9\chi$	— 0,934	— 0,729	—0,248	+0,060	+0,071	+0,014	—0,004	—0,002			
$\cos 10\chi$	+ 0,091	+ 0,213	+0,204	+0,069	—0,013	—0,015	—0,002	+0,001			
$\cos 11\chi$	+ 0,123	+ 0,041	—0,041	—0,053	—0,018	+0,003	+0,003	0,000			
$\cos 12\chi$	— 0,077	— 0,061	—0,026	+0,007	+0,013	+0,004	—0,001	—0,001			
$\cos 13\chi$	+ 0,016	+ 0,023	+0,022	+0,010	—0,002	—0,004	—0,001				
$\cos 14\chi$	+ 0,004	0,000	—0,005	—0,007	—0,003	0,000	+0,001				
$\cos 15\chi$	— 0,004	— 0,005	—0,002	+0,001	+0,002	+0,001					
$\cos 16\chi$	+ 0,001	+ 0,002	+0,002	+0,001		—0,001					

	$\cos\omega_2$	$\cos 2\omega_2$	$\cos 3\omega_2$	$\cos 4\omega_2$	$\cos 5\omega_2$	$\cos 6\omega_2$	$\cos 7\omega_2$	$\cos 8\omega_2$
$\sin\chi$	+287,297	+50,308	+2,200	—0,360	—0,062	—0,004	+0,001	+0,001
$\sin 2\chi$	—218,878	—48,167	—5,513	—0,213	+0,092	+0,021	0,000	—0,001
$\sin 3\chi$	— 91,589	— 2,221	+5,497	+1,271	+0,028	—0,035	—0,005	+0,001
$\sin 4\chi$	+ 60,170	+21,349	+1,216	—1,084	—0,253	+0,005	+0,009	+0,001
$\sin 5\chi$	— 14,523	—12,046	—3,972	—0,144	+0,229	+0,046	—0,003	—0,002
$\sin 6\chi$	— 7,149	+ 0,398	+2,118	+0,754	+0,010	—0,048	—0,009	+0,001
$\sin 7\chi$	+ 5,695	+ 2,834	+0,177	—0,420	—0,148	+0,002	+0,010	+0,001
$\sin 8\chi$	— 1,192	— 1,454	—0,743	—0,055	+0,090	+0,029	—0,001	—0,002
$\sin 9\chi$	— 0,369	+ 0,090	+0,331	+0,178	+0,012	—0,020	—0,006	0,000
$\sin 10\chi$	+ 0,430	+ 0,255	+0,022	—0,076	—0,042	—0,002	+0,005	+0,001
$\sin 11\chi$	— 0,132	— 0,142	—0,090	—0,012	+0,018	+0,009	0,000	—0,001
$\sin 12\chi$	— 0,008	+ 0,021	+0,038	+0,027	+0,004	—0,004	—0,002	
$\sin 13\chi$	+ 0,028	+ 0,017	0,000	—0,010	—0,007	—0,001	+0,001	
$\sin 14\chi$	— 0,014	— 0,013	—0,008	—0,001	+0,003	+0,002		
$\sin 15\chi$	+ 0,002	+ 0,003	+0,004	+0,003	+0,001	—0,001		
$\sin 16\chi$	+ 0,003	+ 0,002		—0,001	—0,001			

$\delta p \, . \sec i$

	$\cos\omega_2$	$\cos 2\omega_2$	$\cos 3\omega_2$	$\cos 4\omega_2$	$\cos 5\omega_2$	$\cos 6\omega_2$	$\cos 7\omega_2$
$\cos 0\chi$	+ 5″,6800	—0″,2453	—0″,1991	+0″,0000	+0″,0044	+0″,0002	—0″,0001
$\cos\chi$	—10,333	—0,040	+0,363	+0,017	—0,007	—0,001	
$\cos 2\chi$	+ 7,159	+0,730	—0,187	—0,040	+0,001	+0,001	
$\cos 3\chi$	— 1,436	—0,851	—0,073	+0,033	+0,007	0,000	
$\cos 4\chi$	— 0,793	+0,186	+0,148	+0,011	—0,007	—0,001	

	cos ω_2	cos $2\omega_2$	cos $3\omega_2$	cos $4\omega_2$	cos $5\omega_2$	cos $6\omega_2$
cos 5χ	+0″,535	+0″,173	−0″,043	−0″,028	−0″,001	+0″,002
cos 6χ	−0,126	−0,129	−0,034	+0,010	+0,006	0,000
cos 7χ	−0,058	+0,019	+0,030	+0,007	−0,003	−0,001
cos 8χ	+0,037	+0,021	−0,004	−0,007	−0,001	+0,001
cos 9χ	−0,010	−0,012	−0,006	+0,001	+0,002	
cos 10χ	−0,002	+0,002	+0,004	+0,002		
cos 11χ	+0,002	+0,001	0,000	−0,001		
cos 12χ	−0,001	−0,001	−0,001			
sin 1χ	+3,556	+0,602	+0,055	−0,012	−0,005	0,000
sin 2χ	−2,092	−0,544	−0,139	−0,003	+0,007	+0,001
sin 3χ	−2,950	−0,038	+0,172	+0,031	−0,004	−0,002
sin 4χ	+0,971	+0,454	−0,002	−0,036	−0,005	+0,001
sin 5χ	−0,004	−0,195	−0,083	+0,003	+0,007	+0,001
sin 6χ	−0,220	−0,026	+0,044	+0,017	−0,001	−0,002
sin 7χ	+0,085	+0,062	+0,006	−0,010	−0,003	0,000
sin 8χ	+0,003	−0,021	−0,015	−0,001	+0,002	+0,001
sin 9χ	−0,012	−0,003	+0,005	+0,004	0,000	−0,001
sin 10χ	+0,007	+0,006	+0,001	−0,001	−0,001	
sin 11χ	−0,001	−0,002	−0,002			
sin 12χ	−0,001		+0,001			

$\delta q \,.\, \sec i$

	cos ω_2	cos $2\omega_2$	cos $3\omega_2$	cos $4\omega_2$	cos $5\omega_2$	cos $6\omega_2$	cos $7\omega_2$
cos 0χ	−18″,7479	−1″,4105	+0″,6091	+0″,1184	−0″,0012	−0″,0021	−0″,0002
cos χ	+34,976	+4,271	−0,836	−0,245	−0,008	+0,004	+0,001
cos 2χ	−25,517	−5,513	−0,043	+0,184	+0,029	0,000	−0,001
cos 3χ	+ 6,422	+3,730	+0,797	−0,012	−0,035	−0,005	0,000
cos 4χ	+ 2,301	−0,503	−0,612	−0,140	+0,006	+0,007	+0,001
cos 5χ	− 2,106	−0,784	+0,056	+0,117	+0,025	−0,002	−0,002
cos 6χ	+ 0,671	+0,553	+0,190	−0,010	−0,023	−0,005	+0,001
cos 7χ	+ 0,152	−0,084	−0,124	−0,043	+0,002	+0,005	+0,001
cos 8χ	− 0,163	−0,083	+0,009	+0,028	+0,009	−0,001	−0,001
cos 9χ	+ 0,059	+0,057	+0,027	−0,001	−0,006	−0,002	
cos 10χ	+ 0,001	−0,011	−0,016	−0,008	0,000	+0,001	
cos 11χ	− 0,011	−0,006	+0,001	+0,004	+0,002		
cos 12χ	+ 0,005	+0,005	+0,003	0,000	−0,001		
cos 13χ	− 0,001	−0,001	−0,002	−0,001			
cos 14χ							
sin 1χ	−13,161	−3,788	−0,699	−0,048	+0,013	+0,003	0,000
sin 2χ	+ 8,125	+3,047	+0,914	+0,145	−0,006	−0,006	0,000
sin 3χ	+10,006	+1,213	−0,495	−0,205	−0,019	+0,004	+0,001
sin 4χ	− 4,103	−2,021	−0,267	+0,098	+0,039	+0,002	−0,001
sin 5χ	+ 0,406	+0,802	+0,407	+0,050	−0,021	−0,007	0,000
sin 6χ	+ 0,773	+0,125	−0,150	−0,084	−0,009	+0,005	+0,001
sin 7χ	− 0,399	−0,260	−0,050	+0,031	+0,017	+0,001	−0,001
sin 8χ	+ 0,044	+0,096	+0,069	+0,013	−0,007	−0,004	0,000
sin 9χ	+ 0,044	+0,008	−0,021	−0,017	−0,003	+0,001	+0,001
sin 10χ	− 0,032	−0,023	−0,006	+0,005	+0,004	+0,001	
sin 11χ	+ 0,008	+0,010	+0,008	+0,002	−0,001	−0,001	
sin 12χ	+ 0,002	−0,001	−0,003	−0,002	−0,001		
sin 13χ	− 0,002	−0,002	0,000	+0,001	+0,001		
sin 14χ	+ 0,001	+0,001	+0,001				

8. Es erübrigt noch, die Störungen der Hansen'schen Elemente in Störungen der mittleren Anomalie, des Log. hyp. des Radius Vector und des Sinus der Breite zu verwandeln. Dazu dienen die pag. 11 mitgetheilten Reihen für $\frac{r}{a}\cos f$, $\frac{r}{a}\sin f$, $\frac{ndt}{d\omega_2}$, $\cos f$ und $\sin f$. Man hat nämlich:

$$\frac{n\,d\delta z}{d\omega_2} = \frac{ndt}{d\omega_2}\cdot W = \frac{ndt}{d\omega_2}\left(\Upsilon\cdot\frac{r}{a}\cos f + \Psi\cdot\frac{r}{a}\sin f + \Xi\right)$$

$$w = -\tfrac{1}{2}W - \tfrac{1}{6}\Xi$$

$$\delta s = \delta q\,.\sin f - \delta p\,.\cos f.$$

Die Anzahl der hier auszuführenden mechanischen Multiplicationen ist eine sehr bedeutende. Jedoch lassen sich die Controllen bequem ausführen, da nur bei Bildung von $\frac{ndt}{d\omega_2}\cdot W$ Sinusreihen auftreten, alle übrigen Producte aber Cosinusreihen sind. Die Coefficienten der vorläufig unbestimmt bleibenden Constanten Υ_0, Ψ_0, Ξ_0, δp_0, δq_0, welche den Integralen Υ, Ψ, Ξ, δp, δq hinzugefügt werden müssen, führe ich ebenfalls mit auf. Die definitiven Störungsausdrücke für den Bahntheil ω_2 werden sodann:

$n\delta z =$

$$\begin{aligned}
&- \Upsilon_0\,.\,0{,}8384227 \cos \omega_2\\
&- \Upsilon_0\,.\,0{,}0470288 \cos 2\omega_2\\
&+ \Upsilon_0\,.\,0{,}0097322 \cos 3\omega_2\\
&+ \Upsilon_0\,.\,0{,}0000517 \cos 4\omega_2\\
&- \Upsilon_0\,.\,0{,}0001229 \cos 5\omega_2\\
&+ \Upsilon_0\,.\,0{,}0000088 \cos 6\omega_2\\
&+ \Upsilon_0\,.\,0{,}0000004 \cos 7\omega_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+ \Psi_0\,.\,0{,}2572383 \cos \omega_2\\
&- \Psi_0\,.\,0{,}0183623 \cos 2\omega_2\\
&- \Psi_0\,.\,0{,}0028534 \cos 3\omega_2\\
&+ \Psi_0\,.\,0{,}0005073 \cos 4\omega_2\\
&- \Psi_0\,.\,0{,}0000056 \cos 5\omega_2\\
&- \Psi_0\,.\,0{,}0000060 \cos 6\omega_2\\
&+ \Psi_0\,.\,0{,}0000007 \cos 7\omega_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+ \Xi_0\,.\,0{,}5993279 \cos \omega_2\\
&- \Xi_0\,.\,0{,}0019021 \cos 2\omega_2\\
&- \Xi_0\,.\,0{,}0039770 \cos 3\omega_2\\
&+ \Xi_0\,.\,0{,}0002961 \cos 4\omega_2\\
&+ \Xi_0\,.\,0{,}0000082 \cos 5\omega_2\\
&- \Xi_0\,.\,0{,}0000031 \cos 6\omega_2\\
&+ \Xi_0\,.\,0{,}0000003 \cos 7\omega_2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-7''{,}3029 \cos \omega_2\\
&-2{,}3858 \cos 2\omega_2\\
&-1{,}2664 \cos 3\omega_2\\
&+0{,}0241 \cos 4\omega_2\\
&+0{,}0266 \cos 5\omega_2\\
&-0{,}0018 \cos 6\omega_2\\
&-0{,}0003 \cos 7\omega_2
\end{aligned}
$$

$+12''{,}799 \cos \chi \cdot \cos \omega_2$	$+2''{,}536 \sin \chi \cdot \cos \omega_2$
$+8{,}314 \cos \chi \cdot \cos 2\omega_2$	$-12{,}082 \sin \chi \cdot \cos 2\omega_2$
$+3{,}023 \cos \chi \cdot \cos 3\omega_2$	$-2{,}040 \sin \chi \cdot \cos 3\omega_2$
$-0{,}143 \cos \chi \cdot \cos 4\omega_2$	$+0{,}238 \sin \chi \cdot \cos 4\omega_2$
$-0{,}062 \cos \chi \cdot \cos 5\omega_2$	$+0{,}018 \sin \chi \cdot \cos 5\omega_2$
$+0{,}005 \cos \chi \cdot \cos 6\omega_2$	$-0{,}004 \sin \chi \cdot \cos 6\omega_2$
$+0{,}001 \cos \chi \cdot \cos 7\omega_2$	
$-6{,}701 \cos 2\chi \cdot \cos \omega_2$	$-5{,}011 \sin 2\chi \cdot \cos \omega_2$
$-10{,}640 \cos 2\chi \cdot \cos 2\omega_2$	$+9{,}144 \sin 2\chi \cdot \cos 2\omega_2$
$-3{,}278 \cos 2\chi \cdot \cos 3\omega_2$	$+1{,}653 \sin 2\chi \cdot \cos 3\omega_2$
$+0{,}149 \cos 2\chi \cdot \cos 4\omega_2$	$-0{,}101 \sin 2\chi \cdot \cos 4\omega_2$
$+0{,}067 \cos 2\chi \cdot \cos 5\omega_2$	$-0{,}004 \sin 2\chi \cdot \cos 5\omega_2$
$-0{,}003 \cos 2\chi \cdot \cos 6\omega_2$	$+0{,}001 \sin 2\chi \cdot \cos 6\omega_2$
$-0{,}001 \cos 2\chi \cdot \cos 7\omega_2$	$-0{,}001 \sin 2\chi \cdot \cos 7\omega_2$
$-3{,}292 \cos 3\chi \cdot \cos \omega_2$	$+4{,}789 \sin 3\chi \cdot \cos \omega_2$
$+4{,}420 \cos 3\chi \cdot \cos 2\omega_2$	$+3{,}835 \sin 3\chi \cdot \cos 2\omega_2$
$+1{,}659 \cos 3\chi \cdot \cos 3\omega_2$	$+0{,}649 \sin 3\chi \cdot \cos 3\omega_2$
$+0{,}104 \cos 3\chi \cdot \cos 4\omega_2$	$-0{,}186 \sin 3\chi \cdot \cos 4\omega_2$
$-0{,}028 \cos 3\chi \cdot \cos 5\omega_2$	$-0{,}031 \sin 3\chi \cdot \cos 5\omega_2$
$-0{,}005 \cos 3\chi \cdot \cos 6\omega_2$	$+0{,}002 \sin 3\chi \cdot \cos 6\omega_2$
	$+0{,}001 \sin 3\chi \cdot \cos 7\omega_2$
$+2{,}659 \cos 4\chi \cdot \cos \omega_2$	$+0{,}719 \sin 4\chi \cdot \cos \omega_2$
$+0{,}625 \cos 4\chi \cdot \cos 2\omega_2$	$-2{,}191 \sin 4\chi \cdot \cos 2\omega_2$
$-0{,}229 \cos 4\chi \cdot \cos 3\omega_2$	$-0{,}897 \sin 4\chi \cdot \cos 3\omega_2$
$-0{,}168 \cos 4\chi \cdot \cos 4\omega_2$	$-0{,}018 \sin 4\chi \cdot \cos 4\omega_2$
$-0{,}016 \cos 4\chi \cdot \cos 5\omega_2$	$+0{,}031 \sin 4\chi \cdot \cos 5\omega_2$
$+0{,}004 \cos 4\chi \cdot \cos 6\omega_2$	$+0{,}004 \sin 4\chi \cdot \cos 6\omega_2$
$+0{,}001 \cos 4\chi \cdot \cos 7\omega_2$	
$-0{,}294 \cos 5\chi \cdot \cos \omega_2$	$-1{,}256 \sin 5\chi \cdot \cos \omega_2$
$-0{,}973 \cos 5\chi \cdot \cos 2\omega_2$	$+0{,}360 \sin 5\chi \cdot \cos 2\omega_2$
$-0{,}355 \cos 5\chi \cdot \cos 3\omega_2$	$+0{,}378 \sin 5\chi \cdot \cos 3\omega_2$
$+0{,}039 \cos 5\chi \cdot \cos 4\omega_2$	$+0{,}099 \sin 5\chi \cdot \cos 4\omega_2$
$+0{,}027 \cos 5\chi \cdot \cos 5\omega_2$	$+0{,}001 \sin 5\chi \cdot \cos 5\omega_2$
$+0{,}002 \cos 5\chi \cdot \cos 6\omega_2$	$-0{,}005 \sin 5\chi \cdot \cos 6\omega_2$
$-0{,}001 \cos 5\chi \cdot \cos 7\omega_2$	$-0{,}001 \sin 5\chi \cdot \cos 7\omega_2$

$-\ 0'',495 \cos 6\chi \,.\, \cos \omega_2$
$+\ 0,350 \cos 6\chi \,.\, \cos 2\omega_2$
$+\ 0,256 \cos 6\chi \,.\, \cos 3\omega_2$
$+\ 0,044 \cos 6\chi \,.\, \cos 4\omega_2$
$-\ 0,008 \cos 6\chi \,.\, \cos 5\omega_2$
$-\ 0,005 \cos 6\chi \,.\, \cos 6\omega_2$

$+\ 0,291 \cos 7\chi \,.\, \cos \omega_2$
$+\ 0,085 \cos 7\chi \,.\, \cos 2\omega_2$
$-\ 0,036 \cos 7\chi \,.\, \cos 3\omega_2$
$-\ 0,038 \cos 7\chi \,.\, \cos 4\omega_2$
$-\ 0,007 \cos 7\chi \,.\, \cos 5\omega_2$
$+\ 0,002 \cos 7\chi \,.\, \cos 6\omega_2$
$+\ 0,001 \cos 7\chi \,.\, \cos 7\omega_2$

$-\ 0,007 \cos 8\chi \,.\, \cos \omega_2$
$-\ 0,078 \cos 8\chi \,.\, \cos 2\omega_2$
$-\ 0,040 \cos 8\chi \,.\, \cos 3\omega_2$
$+\ 0,005 \cos 8\chi \,.\, \cos 4\omega_2$
$+\ 0,007 \cos 8\chi \,.\, \cos 5\omega_2$
$+\ 0,001 \cos 8\chi \,.\, \cos 6\omega_2$

$-\ 0,049 \cos 9\chi \,.\, \cos \omega_2$
$+\ 0,020 \cos 9\chi \,.\, \cos 2\omega_2$
$+\ 0,027 \cos 9\chi \,.\, \cos 3\omega_2$
$+\ 0,008 \cos 9\chi \,.\, \cos 4\omega_2$
$-\ 0,001 \cos 9\chi \,.\, \cos 5\omega_2$
$-\ 0,001 \cos 9\chi \,.\, \cos 6\omega_2$

$+\ 0,024 \cos 10\chi \,.\, \cos \omega_2$
$+\ 0,005 \cos 10\chi \,.\, \cos 2\omega_2$
$-\ 0,004 \cos 10\chi \,.\, \cos 3\omega_2$
$-\ 0,005 \cos 10\chi \,.\, \cos 4\omega_2$
$-\ 0,002 \cos 10\chi \,.\, \cos 5\omega_2$

$-\ 0,002 \cos 11\chi \,.\, \cos \omega_2$
$-\ 0,006 \cos 11\chi \,.\, \cos 2\omega_2$
$-\ 0,004 \cos 11\chi \,.\, \cos 3\omega_2$
$\ 0,000 \cos 11\chi \,.\, \cos 4\omega_2$
$+\ 0,001 \cos 11\chi \,.\, \cos 5\omega_2$

$-\ 0,003 \cos 12\chi \,.\, \cos \omega_2$
$+\ 0,001 \cos 12\chi \,.\, \cos 2\omega_2$
$+\ 0,002 \cos 12\chi \,.\, \cos 3\omega_2$
$+\ 0,001 \cos 12\chi \,.\, \cos 4\omega_2$

$+\ 0'',441 \sin 6\chi \,.\, \cos \omega_2$
$+\ 0,355 \sin 6\chi \,.\, \cos 2\omega_2$
$+\ 0,059 \sin 6\chi \,.\, \cos 3\omega_2$
$-\ 0,052 \sin 6\chi \,.\, \cos 4\omega_2$
$-\ 0,017 \sin 6\chi \,.\, \cos 5\omega_2$
$\ 0,000 \sin 6\chi \,.\, \cos 6\omega_2$
$+\ 0,001 \sin 6\chi \,.\, \cos 7\omega_2$

$+\ 0,129 \sin 7\chi \,.\, \cos \omega_2$
$-\ 0,190 \sin 7\chi \,.\, \cos 2\omega_2$
$-\ 0,121 \sin 7\chi \,.\, \cos 3\omega_2$
$-\ 0,009 \sin 7\chi \,.\, \cos 4\omega_2$
$+\ 0,009 \sin 7\chi \,.\, \cos 5\omega_2$
$+\ 0,004 \sin 7\chi \,.\, \cos 6\omega_2$

$-\ 0,140 \sin 8\chi \,.\, \cos \omega_2$
$+\ 0,006 \sin 8\chi \,.\, \cos 2\omega_2$
$+\ 0,043 \sin 8\chi \,.\, \cos 3\omega_2$
$+\ 0,020 \sin 8\chi \,.\, \cos 4\omega_2$
$+\ 0,002 \sin 8\chi \,.\, \cos 5\omega_2$
$-\ 0,001 \sin 8\chi \,.\, \cos 6\omega_2$

$+\ 0,035 \sin 9\chi \,.\, \cos \omega_2$
$+\ 0,027 \sin 9\chi \,.\, \cos 2\omega_2$
$+\ 0,006 \sin 9\chi \,.\, \cos 3\omega_2$
$-\ 0,007 \sin 9\chi \,.\, \cos 4\omega_2$
$-\ 0,004 \sin 9\chi \,.\, \cos 5\omega_2$

$+\ 0,009 \sin 10\chi \,.\, \cos \omega_2$
$-\ 0,012 \sin 10\chi \,.\, \cos 2\omega_2$
$-\ 0,012 \sin 10\chi \,.\, \cos 3\omega_2$
$-\ 0,002 \sin 10\chi \,.\, \cos 4\omega_2$
$+\ 0,001 \sin 10\chi \,.\, \cos 5\omega_2$
$+\ 0,001 \sin 10\chi \,.\, \cos 6\omega_2$

$-\ 0,010 \sin 11\chi \,.\, \cos \omega_2$
$+\ 0,001 \sin 11\chi \,.\, \cos 2\omega_2$
$+\ 0,004 \sin 11\chi \,.\, \cos 3\omega_2$
$+\ 0,002 \sin 11\chi \,.\, \cos 4\omega_2$

$+\ 0,003 \sin 12\chi \,.\, \cos \omega_2$
$+\ 0,001 \sin 12\chi \,.\, \cos 2\omega_2$
$+\ 0,001 \sin 12\chi \,.\, \cos 3\omega_2$
$-\ 0,001 \sin 12\chi \,.\, \cos 4\omega_2$
$-\ 0,001 \sin 12\chi \,.\, \cos 5\omega_2$

$\omega = -\frac{2}{3}\,\Xi_0$

$+ \Upsilon_0 \,.\, 0{,}6896423$
$+ \Upsilon_0 \,.\, 0{,}1692362 \cos \omega_2$
$- \Upsilon_0 \,.\, 0{,}0203181 \cos 2\omega_2$
$+ \Upsilon_0 \,.\, 0{,}0001350 \cos 3\omega_2$
$+ \Upsilon_0 \,.\, 0{,}0001981 \cos 4\omega_2$
$- \Upsilon_0 \,.\, 0{,}0000219 \cos 5\omega_2$
$+ \Upsilon_0 \,.\, 0{,}0000005 \cos 6\omega_2$

$- \Psi_0 \,.\, 0{,}2112522$
$+ \Psi_0 \,.\, 0{,}0583957 \cos \omega_2$
$+ \Psi_0 \,.\, 0{,}0062068 \cos 2\omega_2$
$- \Psi_0 \,.\, 0{,}0013488 \cos 3\omega_2$
$+ \Psi_0 \,.\, 0{,}0000800 \cos 4\omega_2$
$+ \Psi_0 \,.\, 0{,}0000039 \cos 5\omega_2$
$- \Psi_0 \,.\, 0{,}0000005 \cos 6\omega_2$

$+ 9''{,}5095$
$- 2{,}6044 \cos \omega_2$
$+ 4{,}7044 \cos 2\omega_2$
$+ 0{,}0836 \cos 3\omega_2$
$- 0{,}0624 \cos 4\omega_2$
$+ 0{,}0033 \cos 5\omega_2$

$-18''{,}797 \cos \chi$	$+ 3{,}368 \sin \chi$
$+ 7{,}440 \cos \chi \,.\, \cos \omega_2$	$- 7{,}468 \sin \chi \,.\, \cos \omega_2$
$- 9{,}451 \cos \chi \,.\, \cos 2\omega_2$	$+ 2{,}110 \sin \chi \,.\, \cos 2\omega_2$
$+ 0{,}131 \cos \chi \,.\, \cos 3\omega_2$	$- 1{,}100 \sin \chi \,.\, \cos 3\omega_2$
$+ 0{,}110 \cos \chi \,.\, \cos 4\omega_2$	$+ 0{,}034 \sin \chi \,.\, \cos 4\omega_2$
$- 0{,}010 \cos \chi \,.\, \cos 5\omega_2$	$+ 0{,}011 \sin \chi \,.\, \cos 5\omega_2$
$+14{,}295 \cos 2\chi$	$- 0{,}246 \sin 2\chi$
$- 8{,}742 \cos 2\chi \,.\, \cos \omega_2$	$+ 5{,}373 \sin 2\chi \,.\, \cos \omega_2$
$+ 7{,}342 \cos 2\chi \,.\, \cos 2\omega_2$	$- 0{,}461 \sin 2\chi \,.\, \cos 2\omega_2$
$- 0{,}380 \cos 2\chi \,.\, \cos 3\omega_2$	$+ 0{,}932 \sin 2\chi \,.\, \cos 3\omega_2$
$- 0{,}075 \cos 2\chi \,.\, \cos 4\omega_2$	$- 0{,}033 \sin 2\chi \,.\, \cos 4\omega_2$
$+ 0{,}010 \cos 2\chi \,.\, \cos 5\omega_2$	$- 0{,}009 \sin 2\chi \,.\, \cos 5\omega_2$
$- 1{,}557 \cos 3\chi$	$- 5{,}730 \sin 3\chi$
$+ 4{,}110 \cos 3\chi \,.\, \cos \omega_2$	$+ 3{,}167 \sin 3\chi \,.\, \cos \omega_2$
$- 0{,}861 \cos 3\chi \,.\, \cos 2\omega_2$	$- 2{,}944 \sin 3\chi \,.\, \cos 2\omega_2$
$+ 0{,}071 \cos 3\chi \,.\, \cos 3\omega_2$	$+ 0{,}089 \sin 3\chi \,.\, \cos 3\omega_2$
$+ 0{,}003 \cos 3\chi \,.\, \cos 4\omega_2$	$+ 0{,}004 \sin 3\chi \,.\, \cos 4\omega_2$
$+ 0{,}001 \cos 3\chi \,.\, \cos 5\omega_2$	$- 0{,}001 \sin 3\chi \,.\, \cos 5\omega_2$

$-\ 1'',600 \cos 4\chi$	$+\ 1'',674 \sin 4\chi$
$+\ 0,338 \cos 4\chi \,.\, \cos \omega_2$	$-\ 2,290 \sin 4\chi \,.\, \cos \omega_2$
$-\ 0,862 \cos 4\chi \,.\, \cos 2\omega_2$	$+\ 0,852 \sin 4\chi \,.\, \cos 2\omega_2$
$+\ 0,011 \cos 4\chi \,.\, \cos 3\omega_2$	$+\ 0,053 \sin 4\chi \,.\, \cos 3\omega_2$
$+\ 0,009 \cos 4\chi \,.\, \cos 4\omega_2$	$0,000 \sin 4\chi \,.\, \cos 4\omega_2$
	$-\ 0,001 \sin 4\chi \,.\, \cos 5\omega_2$
$+\ 1,092 \cos 5\chi$	$+\ 0,058 \sin 5\chi$
$-\ 1,027 \cos 5\chi \,.\, \cos \omega_2$	$+\ 0,512 \sin 5\chi \,.\, \cos \omega_2$
$+\ 0,560 \cos 5\chi \,.\, \cos 2\omega_2$	$+\ 0,070 \sin 5\chi \,.\, \cos 2\omega_2$
$+\ 0,054 \cos 5\chi \,.\, \cos 3\omega_2$	$-\ 0,009 \sin 5\chi \,.\, \cos 3\omega_2$
$-\ 0,006 \cos 5\chi \,.\, \cos 4\omega_2$	$-\ 0,014 \sin 5\chi \,.\, \cos 4\omega_2$
$-\ 0,002 \cos 5\chi \,.\, \cos 5\omega_2$	$+\ 0,001 \sin 5\chi \,.\, \cos 5\omega_2$
$-\ 0,229 \cos 6\chi$	$-\ 0,467 \sin 6\chi$
$+\ 0,465 \cos 6\chi \,.\, \cos \omega_2$	$+\ 0,318 \sin 6\chi \,.\, \cos \omega_2$
$-\ 0,089 \cos 6\chi \,.\, \cos 2\omega_2$	$-\ 0,250 \sin 6\chi \,.\, \cos 2\omega_2$
$-\ 0,023 \cos 6\chi \,.\, \cos 3\omega_2$	$-\ 0,020 \sin 6\chi \,.\, \cos 3\omega_2$
$-\ 0,008 \cos 6\chi \,.\, \cos 4\omega_2$	$+\ 0,005 \sin 6\chi \,.\, \cos 4\omega_2$
$+\ 0,006 \cos 6\chi \,.\, \cos 5\omega_2$	$+\ 0,002 \sin 6\chi \,.\, \cos 5\omega_2$
$-\ 0,122 \cos 7\chi$	$+\ 0,175 \sin 7\chi$
$+\ 0,026 \cos 7\chi \,.\, \cos \omega_2$	$-\ 0,250 \sin 7\chi \,.\, \cos \omega_2$
$-\ 0,077 \cos 7\chi \,.\, \cos 2\omega_2$	$+\ 0,077 \sin 7\chi \,.\, \cos 2\omega_2$
$-\ 0,003 \cos 7\chi \,.\, \cos 3\omega_2$	$+\ 0,020 \sin 7\chi \,.\, \cos 3\omega_2$
$+\ 0,005 \cos 7\chi \,.\, \cos 4\omega_2$	$+\ 0,003 \sin 7\chi \,.\, \cos 4\omega_2$
	$-\ 0,001 \sin 7\chi \,.\, \cos 5\omega_2$
$+\ 0,085 \cos 8\chi$	$-\ 0,003 \sin 8\chi$
$-\ 0,097 \cos 8\chi \,.\, \cos \omega_2$	$+\ 0,048 \sin 8\chi \,.\, \cos \omega_2$
$+\ 0,041 \cos 8\chi \,.\, \cos 2\omega_2$	$+\ 0,009 \sin 8\chi \,.\, \cos 2\omega_2$
$+\ 0,011 \cos 8\chi \,.\, \cos 3\omega_2$	$-\ 0,005 \sin 8\chi \,.\, \cos 3\omega_2$
$+\ 0,001 \cos 8\chi \,.\, \cos 4\omega_2$	$-\ 0,004 \sin 8\chi \,.\, \cos 4\omega_2$
$-\ 0,001 \cos 8\chi \,.\, \cos 5\omega_2$	$-\ 0,001 \sin 8\chi \,.\, \cos 5\omega_2$
$-\ 0,024 \cos 9\chi$	$-\ 0,030 \sin 9\chi \,.\, \cos \omega_2$
$+\ 0,041 \cos 9\chi \,.\, \cos \omega_2$	$+\ 0,023 \sin 9\chi \,.\, \cos 2\omega_2$
$-\ 0,007 \cos 9\chi \,.\, \cos 2\omega_2$	$-\ 0,016 \sin 9\chi \,.\, \cos 3\omega_2$
$-\ 0,004 \cos 9\chi \,.\, \cos 3\omega_2$	$-\ 0,004 \sin 9\chi \,.\, \cos 4\omega_2$
$-\ 0,001 \cos 9\chi \,.\, \cos 4\omega_2$	
$-\ 0,001 \cos 9\chi \,.\, \cos 5\omega_2$	
$-\ 0,004 \cos 10\chi$	$+\ 0,016 \sin 10\chi$
$-\ 0,002 \cos 10\chi \,.\, \cos \omega_2$	$-\ 0,022 \sin 10\chi \,.\, \cos \omega_2$
$-\ 0,004 \cos 10\chi \,.\, \cos 2\omega_2$	$+\ 0,006 \sin 10\chi \,.\, \cos 2\omega_2$
$-\ 0,002 \cos 10\chi \,.\, \cos 3\omega_2$	$+\ 0,002 \sin 10\chi \,.\, \cos 3\omega_2$
$0,000 \cos 10\chi \,.\, \cos 4\omega_2$	$+\ 0,002 \sin 10\chi \,.\, \cos 4\omega_2$
$+\ 0,001 \cos 10\chi \,.\, \cos 5\omega_2$	

$+ 0''{,}006 \cos 11\chi$
$- 0{,}008 \cos 11\chi . \cos \omega_2$
$+ 0{,}004 \cos 11\chi . \cos 4\omega_2$
$+ 0{,}001 \cos 11\chi . \cos 3\omega_2$
$+ 0{,}001 \cos 11\chi . \cos 2\omega_2$

$- 0''{,}003 \sin 11\chi$
$+ 0{,}005 \sin 11\chi . \cos \omega_2$
$0{,}000 \sin 11\chi . \cos 2\omega_2$
$+ 0{,}001 \sin 11\chi . \cos 3\omega_2$
$0{,}000 \sin 11\chi . \cos 4\omega_2$
$- 0{,}001 \sin 11\chi . \cos 5\omega_2$

$- 0{,}002 \cos 12\chi$
$+ 0{,}004 \cos 12\chi . \cos \omega_2$

$- 0{,}001 \sin 12\chi$
$+ 0{,}001 \sin 12\chi . \cos \omega_2$
$- 0{,}001 \sin 12\chi . \cos 2\omega_2$
$- 0{,}001 \sin 12\chi . \cos 3\omega_2$

$\delta s =$

$+ \delta q_0 . 0{,}305666$
$- \delta q_0 . 0{,}144003 \cos \omega_2$
$+ \delta q_0 . 0{,}013075 \cos 2\omega_2$
$- \delta q_0 . 0{,}001185 \cos 3\omega_2$
$+ \delta q_0 . 0{,}000102 \cos 4\omega_2$
$- \delta q_0 . 0{,}000006 \cos 5\omega_2$

$+ \delta p_0 . 0{,}945999$
$+ \delta p_0 . 0{,}047807 \cos \omega_2$
$- \delta p_0 . 0{,}010443 \cos 2\omega_2$
$+ \delta p_0 . 0{,}001656 \cos 3\omega_2$
$- \delta p_0 . 0{,}000240 \cos 4\omega_2$
$+ \delta p_0 . 0{,}000033 \cos 5\omega_2$

$+ 1''{,}4383$
$- 0{,}3975 \cos \omega_2$
$+ 0{,}7696 \cos 2\omega_2$
$- 0{,}0670 \cos 3\omega_2$
$- 0{,}0041 \cos 4\omega_2$
$- 0{,}0007 \cos 5\omega_2$
$+ 0{,}0001 \cos 6\omega_2$

$- 2''{,}666 \cos \chi$
$+ 0{,}859 \cos \chi . \cos \omega_2$
$- 1{,}421 \cos \chi . \cos 2\omega_2$
$+ 0{,}081 \cos \chi . \cos 3\omega_2$
$+ 0{,}010 \cos \chi . \cos 4\omega_2$
$+ 0{,}003 \cos \chi . \cos 5\omega_2$

$+ 0''{,}979 \sin \chi$
$- 0{,}466 \sin \chi . \cos \omega_2$
$+ 0{,}495 \sin \chi . \cos 2\omega_2$
$+ 0{,}023 \sin \chi . \cos 3\omega_2$
$+ 0{,}008 \sin \chi . \cos 4\omega_2$
$- 0{,}001 \sin \chi . \cos 5\omega_2$

$+ 1{,}917 \cos 2\chi$
$- 0{,}789 \cos 2\chi . \cos \omega_2$
$+ 1{,}009 \cos 2\chi . \cos 2\omega_2$

$- 0{,}598 \sin 2\chi$
$+ 0{,}332 \sin 2\chi . \cos \omega_2$
$- 0{,}286 \sin 2\chi . \cos 2\omega_2$

$+ 0'',005 \cos 2\chi \,.\, \cos 3\omega_2$
$- 0,003 \cos 2\chi \,.\, \cos 4\omega_2$
$- 0,001 \cos 2\chi \,.\, \cos 5\omega_2$

$- 0,455 \cos 3\chi$
$+ 0,358 \cos 3\chi \,.\, \cos \omega_2$
$- 0,220 \cos 3\chi \,.\, \cos 2\omega_2$
$- 0,061 \cos 3\chi \,.\, \cos 3\omega_2$
$- 0,007 \cos 3\chi \,.\, \cos 4\omega_2$

$- 0,183 \cos 4\chi$
$+ 0,007 \cos 4\chi \,.\, \cos \omega_2$
$- 0,115 \cos 4\chi \,.\, \cos 2\omega_2$
$+ 0,022 \cos 4\chi \,.\, \cos 3\omega_2$
$+ 0,008 \cos 4\chi \,.\, \cos 4\omega_2$
$+ 0,001 \cos 4\chi \,.\, \cos 5\omega_2$

$+ 0,154 \cos 5\chi$
$- 0,091 \cos 5\chi \,.\, \cos \omega_2$
$+ 0,083 \cos 5\chi \,.\, \cos 2\omega_2$
$+ 0,011 \cos 5\chi \,.\, \cos 3\omega_2$
$- 0,003 \cos 5\chi \,.\, \cos 4\omega_2$
$- 0,003 \cos 5\chi \,.\, \cos 5\omega_2$

$- 0,046 \cos 6\chi$
$+ 0,048 \cos 6\chi \,.\, \cos \omega_2$
$- 0,018 \cos 6\chi \,.\, \cos 2\omega_2$
$- 0,011 \cos 6\chi \,.\, \cos 3\omega_2$
$- 0,002 \cos 6\chi \,.\, \cos 4\omega_2$

$- 0,013 \cos 7\chi$
$- 0,002 \cos 7\chi \,.\, \cos \omega_2$
$- 0,009 \cos 7\chi \,.\, \cos 2\omega_2$
$+ 0,001 \cos 7\chi \,.\, \cos 3\omega_2$
$+ 0,002 \cos 7\chi \,.\, \cos 4\omega_2$

$+ 0,012 \cos 8\chi$
$- 0,010 \cos 8\chi \,.\, \cos \omega_2$
$+ 0,005 \cos 8\chi \,.\, \cos 2\omega_2$
$+ 0,002 \cos 8\chi \,.\, \cos 3\omega_2$

$- 0,004 \cos 9\chi$
$+ 0,005 \cos 9\chi \,.\, \cos \omega_2$
$0,000 \cos 9\chi \,.\, \cos 2\omega_2$
$- 0,001 \cos 9\chi \,.\, \cos 3\omega_2$
$- 0,001 \cos 9\chi \,.\, \cos 4\omega_2$

$- 0'',030 \sin 2\chi \,.\, \cos 3\omega_2$
$- 0,012 \sin 2\chi \,.\, \cos 4\omega_2$
$- 0,001 \sin 2\chi \,.\, \cos 5\omega_2$

$- 0,763 \sin 3\chi$
$+ 0,250 \sin 3\chi \,.\, \cos \omega_2$
$- 0,415 \sin 3\chi \,.\, \cos 2\omega_2$
$+ 0,019 \sin 3\chi \,.\, \cos 3\omega_2$
$+ 0,008 \sin 3\chi \,.\, \cos 4\omega_2$

$+ 0,296 \sin 4\chi$
$- 0,206 \sin 4\chi \,.\, \cos \omega_2$
$+ 0,151 \sin 4\chi \,.\, \cos 2\omega_2$
$+ 0,032 \sin 4\chi \,.\, \cos 3\omega_2$
$0,000 \sin 4\chi \,.\, \cos 4\omega_2$
$- 0,003 \sin 4\chi \,.\, \cos 5\omega_2$

$- 0,022 \sin 5\chi$
$+ 0,061 \sin 5\chi \,.\, \cos \omega_2$
$0,000 \sin 5\chi \,.\, \cos 2\omega_2$
$- 0,017 \sin 5\chi \,.\, \cos 3\omega_2$
$- 0,006 \sin 5\chi \,.\, \cos 4\omega_2$
$- 0,002 \sin 5\chi \,.\, \cos 5\omega_2$

$- 0,058 \sin 6\chi$
$+ 0,022 \sin 6\chi \,.\, \cos \omega_2$
$- 0,036 \sin 6\chi \,.\, \cos 2\omega_2$
$- 0,003 \sin 6\chi \,.\, \cos 3\omega_2$
$+ 0,004 \sin 6\chi \,.\, \cos 4\omega_2$
$+ 0,001 \sin 6\chi \,.\, \cos 5\omega_2$

$+ 0,028 \sin 7\chi$
$- 0,025 \sin 7\chi \,.\, \cos \omega_2$
$+ 0,014 \sin 7\chi \,.\, \cos 2\omega_2$
$+ 0,004 \sin 7\chi \,.\, \cos 3\omega_2$
$+ 0,001 \sin 7\chi \,.\, \cos 4\omega_2$

$- 0,003 \sin 8\chi$
$+ 0,010 \sin 8\chi \,.\, \cos \omega_2$
$+ 0,002 \sin 8\chi \,.\, \cos 2\omega_2$
$- 0,002 \sin 8\chi \,.\, \cos 3\omega_2$
$- 0,001 \sin 8\chi \,.\, \cos 4\omega_2$

$- 0,003 \sin 9\chi$
$+ 0,001 \sin 9\chi \,.\, \cos \omega_2$
$- 0,003 \sin 9\chi \,.\, \cos 2\omega_2$
$- 0,001 \sin 9\chi \,.\, \cos 3\omega_2$

9. Um eine durchgreifende Controlle aller Rechnungen zu gewinnen, habe ich noch eine Vergleichung der allgemeinen Störungen mit speciellen Störungsrechnungen ausgeführt. Wird vorausgesetzt, dass die Störungen in dem Theilpunkte $\omega_2 = 180°$, dessen wahre Anomalie 152° 21′ 7″,62 beträgt, verschwinden, so nehmen die Reihen, welche die Störungen im Bahntheil ω_2 ausdrücken, die Form an:

$$n\delta z = y_0 . \Upsilon_0 + \psi_0 . \Psi_0 + \xi_0 . \Xi_0 + 2\,\Sigma\,(k_1 + k_3 + k_5 + \ldots.) \left.\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\} i\chi$$

$$w = y'_0 . \Upsilon_0 + \psi'_0 . \Psi_0 + \xi'_0 . \Xi_0 + \Sigma\,(k_0 + k_1 + k_2 + \ldots.) \left.\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\} i\chi$$

$$\delta s = \varkappa_0\, \delta q_0 + \pi_0\, \delta p_0 + \Sigma\,(k_0 + k_1 + k_2 + \ldots.) \left.\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\} i\chi$$

Die Factoren y_0, ψ_0, ξ_0 etc. haben die Werthe:

$\log y_0 = 0{,}219487n$	$\log y'_0 = 9{,}923696$	$\log \varkappa_0 = 9{,}239670$
$\log \psi_0 = 9{,}706513$	$\log \psi'_0 = 9{,}170013n$	$\log \pi_0 = 9{,}993351$
$\log \xi_0 = 0{,}075809$	$\log \xi'_0 = 9{,}823909n$	

und die Constanten Υ_0 etc. sind aus den Gleichungen zu bestimmen:

$$\Upsilon_0 = \Sigma\,(\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \ldots.) \left.\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\} i\chi$$

$$\Psi_0 = \Sigma\,(\beta_1 - \beta_2 + \beta_3 - \ldots.) \left.\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\} i\chi$$

. . . .

wo mit α, β, ... die Coefficienten der Reihen für Υ, Ψ, ... bezeichnet sind. Man erhält dann:

$n\delta z = -\,40''{,}673$	$+101''{,}803 \cos \chi$	$-85''{,}785 \sin \chi$
	$-\;99{,}272 \cos 2\chi$	$+56{,}318 \sin 2\chi$
	$+\;21{,}161 \cos 3\chi$	$+42{,}282 \sin 3\chi$
	$+\;11{,}106 \cos 4\chi$	$-11{,}993 \sin 4\chi$
	$-\;6{,}327 \cos 5\chi$	$-\;0{,}368 \sin 5\chi$
	$+\;1{,}145 \cos 6\chi$	$+\;2{,}822 \sin 6\chi$

	$+\ 0{,}''889 \cos 7\chi$	$-\ 0{,}''774 \sin 7\chi$
	$-\ 0{,}345 \cos 8\chi$	$-\ 0{,}122 \sin 8\chi$
	$+\ 0{,}066 \cos 9\chi$	$+\ 0{,}130 \sin 9\chi$
	$+\ 0{,}030 \cos 10\chi$	$-\ 0{,}059 \sin 10\chi$
	$-\ 0{,}026 \cos 11\chi$	$+\ 0{,}002 \sin 11\chi$
	$+\ 0{,}004 \cos 12\chi$	$+\ 0{,}007 \sin 12\chi$
	$-\ 0{,}002 \cos 13\chi$	$-\ 0{,}002 \sin 13\chi$

$w = +\ 27{,}''641$	$-\ 47{,}''945 \cos \chi$	$-\ 8{,}''138 \sin \chi$
	$+\ 27{,}588 \cos 2\chi$	$+13{,}220 \sin 2\chi$
	$+\ 6{,}373 \cos 3\chi$	$-11{,}109 \sin 3\chi$
	$-\ 4{,}293 \cos 4\chi$	$-\ 0{,}722 \sin 4\chi$
	$+\ 0{,}812 \cos 5\chi$	$+\ 1{,}293 \sin 5\chi$
	$+\ 0{,}429 \cos 6\chi$	$-\ 0{,}640 \sin 6\chi$
	$-\ 0{,}285 \cos 7\chi$	$-\ 0{,}071 \sin 7\chi$
	$+\ 0{,}023 \cos 8\chi$	$+\ 0{,}083 \sin 8\chi$
	$+\ 0{,}015 \cos 9\chi$	$-\ 0{,}031 \sin 9\chi$
	$-\ 0{,}017 \cos 10\chi$	$+\ 0{,}002 \sin 10\chi$
	$+\ 0{,}004 \cos 11\chi$	$+\ 0{,}005 \sin 11\chi$
	$+\ 0{,}004 \cos 12\chi$	$-\ 0{,}002 \sin 12\chi$

$\delta s = +\ 4{,}''386$	$-\ 7{,}''559 \cos \chi$	$+\ 2{,}''237 \sin \chi$
	$+\ 4{,}746 \cos 2\chi$	$-\ 1{,}216 \sin 2\chi$
	$-\ 0{,}454 \cos 3\chi$	$-\ 1{,}916 \sin 3\chi$
	$-\ 0{,}679 \cos 4\chi$	$+\ 0{,}384 \sin 4\chi$
	$+\ 0{,}251 \cos 5\chi$	$+\ 0{,}111 \sin 5\chi$
	$-\ 0{,}011 \cos 6\chi$	$-\ 0{,}134 \sin 6\chi$
	$-\ 0{,}049 \cos 7\chi$	$+\ 0{,}021 \sin 7\chi$
	$+\ 0{,}010 \cos 8\chi$	$+\ 0{,}016 \sin 8\chi$
	$0{,}000 \cos 9\chi$	$-\ 0{,}008 \sin 9\chi$
	$+\ 0{,}004 \cos 10\chi$	$+\ 0{,}001 \sin 10\chi$

Diese Reihen wurden nun für 2 Umläufe benutzt. Für χ ist hier der dem jedesmal betrachteten Umlaufe entsprechende Winkel einzusetzen. — Herr Backlund stellte mir gütigst eine Störungsrechnung zu Gebote, welche derselbe für die Zeit 1878 Dec. 25.0 bis 1879 Sept. 21.0 nach der Methode der Variation der Constanten durchgeführt hatte. Während dieses Umlaufes hielt sich der Comet nach den den absoluten Störungsrechnungen zu Grunde liegenden Elementen im Bahntheil ω_2 von 1879 Januar 10,592 — 1879 August 26,756

M. Berl. Z. auf, wenn der Apheldurchgang auf 1880 März 17,814 fixirt wird. Für diesen Moment ist die mittlere Anomalie des Jupiter nach Leverriers Tafeln $c_1' = 345° \; 7' \; 20''$ oder da $c_1' = \xi + 147° \; 42'$: $\xi = 197° \; 25' \; 20''$. Daraus ergab sich $\chi = 236° \; 32' \; 3''$. Substituirt man diesen Werth in obige Reihen, so erhält man:

$$n\delta z = +\; 80''{,}31$$
$$w = +\; 76{,}09$$
$$\delta s = +\; 3{,}95$$

Ferner entnahm ich den Backlund'schen Störungstafeln die Störungen der Elemente für den betrachteten Zeitraum und fand dieselben:

$$\Delta M = -\; 1355''{,}48 \qquad \Delta\pi = +\; 300''{,}89$$
$$\Delta\mu = -\; 2{,}693 \qquad \Delta\Omega = -\; 15{,}03$$
$$\Delta\varphi = -\; 120{,}62 \qquad \Delta i = -\; 5{,}59$$

Werden dieselben in Coordinatenstörungen verwandelt, so ergiebt sich:

$$n\delta z = +\; 77''{,}43$$
$$w = +\; 79{,}32$$
$$\delta s = +\; 3{,}93$$

Bei den beträchtlichen Unterschieden der angewandten Elemente (in der mittleren Bewegung z. B. 2″,5) und der bedeutenden Grösse der Störungen konnte schwerlich eine bessere Uebereinstimmung erwartet werden, und zeigte mir auch schon dies Resultat, dass meine Rechnungen frei von systematischen Fehlern sind. An eigentliche Rechenfehler durfte ich nicht denken, da ich mir bewusst bin, jeden Schritt auf das sorgfältigste controllirt zu haben. Indessen begnügte ich mich nicht mit dieser Erklärung, sondern suchte die Correctheit meiner Störungsausdrücke noch dadurch zu erweisen, dass ich mit Zugrundelegung derselben Jupiter- und Cometenelemente, auf welche die Berechnung der allgemeinen Störungen basirt ist, die speciellen Störungen erster Ordnung direct nach Hansen's Methode für einen Umlauf berechnete, während dessen dieselben nahezu ein Maximum erreichten. Ich wählte dazu den Umlauf 1842 bis 1845, denselben, für den auch Asten eine Vergleichung seiner Störungsausdrücke angestellt hat. Der Comet weilte im Bahntheil ω_2 von 1842 Oct. 10,9024 — 1843 Mai 27,0661. Die Störungsrechnung wurde während dieses Zeitraums in 20-tägigen Intervallen ausgeführt und ergab:

$$n\delta z = -\; 248''{,}11$$
$$w = +\; 81{,}74$$
$$\delta s = +\; 15{,}70$$

Für diesen Umlauf ist $c_1' = 325° \; 3' \; 37''$, $\chi = 169° \; 35' \; 35''$. Letztere Zahlen konnte ich direct Asten's Abhandlung entnehmen. Nach Substitution dieses Werthes von χ in die Reihen erhielt ich:

$$n\delta z = -\;248''\!,14 \qquad \Delta\, n\delta z \text{ (Abs. — Spec.)} = -\;0''\!,03$$
$$w = +\;81,66 \qquad \Delta w = -\;0,08$$
$$\delta s = +\;15,80 \qquad \Delta\, \delta s = +\;0,10$$

eine Uebereinstimmung, die in Anbetracht dessen, dass die speciellen Störungen mit nur 5 Decimalen berechnet wurden, eine vollständig befriedigende genannt werden darf.

Ouvrages astronomiques et géodésiques publiés dans la VII. Série des Mémoires de l'Académie Impériale des sciences:

T. I, № 1. **Struve, O.** Nouvelle détermination de la parallaxe annuelle des étoiles α Lyrae et 61 Cygni. 1859. Pr. 45 K. = 1 Mk. 50 Pf.

№ 6. **Schubert, T. F.** Essai d'une détermination de la véritable figure de la terre. Avec 1 pl. 1859. Pr. 35 K. = 1 Mk. 20 Pf.

T. II, № 1. **Struve, O. u. Winnecke, Dr. A.** Pulkowaer Beobachtungen des grossen Cometen von 1858. Erste Abtheilung: Beobachtungen am Refractor, angestellt von O. Struve, Mitgliede der Akademie. Zweite Abtheilung: Beobachtungen am Heliometer nebst Untersuchungen über die Natur des Cometen von Dr. A. Winnecke, Adjunct-Astronomen der Hauptsternwarte. Mit 6 Taf. 1859. Pr. 1 R. 50 K. = 5 Mk.

№ 4. **Struve, O.** Beitrag zur Feststellung des Verhältnisses von Keppler zu Wallenstein. 1860. Pr. 30 K. = 1 Mk.

T. III, № 5. **Baeyer, J. J.** Ueber die Strahlenbrechung in der Atmosphäre. Avec 1 pl. lith. 1860. Pr. 65 K. = 2 Mk. 20 Pf.

T. IV, № 1. **Struve, O.** Beobachtung der totalen Sonnenfinsterniss vom 18. (6.) Juli 1860 in Pobes. Nach den Berichten der einzelnen Theilnehmer zusammengestellt. Mit 3 Taf. 1861. Pr. 85 K. = 1 Mk. 80 Pf.

T. V, № 4. **Struve, O.** Observations de la grande nébuleuse d'Orion, faites à Cazan et à Poulkova. I[e] Partie: Mémoire de M. Liapounov sur les observations de Cazan. II[e] Partie: O. Struve, Additions au mémoire de M. Liapounov et Observations de Poulkova. Avec 4 pl. lith. 1862. Pr. 1 R. 35 K. = 4 Mk. 50 Pf.

T. VI, № 7. **Winnecke, A.** Beobachtungen des Mars um die Zeit der Opposition 1862. 1863. Pr. 40 K. = 1 Mk. 30 Pf.

№ 11. **Sawitsch, A.** Opposition des Mars im Jahre 1862, beobachtet auf der kleinen akademischen Sternwarte zu St. Petersburg. 1863. Pr. 25 K. = 80 Pf.

T VII, № 7. **Winnecke, A.** Pulkowaer Beobachtungen des hellen Cometen von 1862, nebst einigen Bemerkungen. Mit 6 lith. Taf. 1864. Pr. 90 K. = 3 Mk.

T. VIII, № 2. **Linsser, C.** Vier von De l'Isle beobachtete Plejaden-Bedeckungen, bearbeitet und mit Hansen's Mond-Tafeln verglichen. 1864. Pr. 25 K. = 80 Pf.

T. X, № 1. **Gyldén, H.** Untersuchungen über die Constitution der Atmosphäre und die Strahlenbrechung in derselben. Erste Abhandlung. 1866. Pr. 70 K. = 2 Mk. 30 Pf.

T. XII, № 4. **Gyldén, H.** Untersuchungen über die Constitution der Atmosphäre und die Strahlenbrechung in derselben. Zweite Abhandlung. 1868. Pr. 45 K. = 1 Mk 50 Pf.

№ 5. **Struve, O.** Beobachtungen des grossen Cometen von 1861. Mit 1 lith. Taf. 1868. Pr. 50 K. = 1 Mk. 70 Pf.

T. XVI, № 10. **Gyldén, H.** Studien auf dem Gebiete der Störungstheorie. I. Entwickelung einiger Verbindungen elliptischer Functionen. 1871. Pr. 1 R. 5 K. = 3 Mk. 50 Pf.

T. XVII, № 1. **Kortazzi, J.** Bestimmung der Längen-Differenz zwischen Pulkowa, Helsingfors, Åbo, Lowisa und Wiborg. 1871. Pr. 60 K. = 2 Mk.

№ 10. **Fuss, V. u. Nyrén, M.** Bestimmung der Längen Differenz zwischen den Sternwarten, Stockholm und Helsingfors ausgeführt im Sommer 1870. 1871. Pr. 35 K. = 1 Mk. 20 Pf.

T. XVIII, № 3. **Fuss, V.** Beobachtungen und Untersuchungen über die astronomische Strahlenbrechung in der Nähe des Horizontes. 1872. Pr. 40 K. = 1 Mk. 30 Pf.

№ 5. **Asten, E. v.** Resultate aus Otto von Struve's Beobachtungen der Uranustrabanten 1872. Pr. 25 K. = 80 Pf.

№ 10. **Asten, E. v.** Untersuchungen über die Theorie des Encke'schen Cometen. I. Berechnung eines wichtigen Theiles der absoluten Jupitersstörungen des Encke'schen Cometen. 1872. Pr. 65 K. = 2 Mk 20 Pf.

T. XIX, № 2. **Nyrén, M.** Bestimmung der Nutation der Erdachse. 1872. Pr. 55 K. = 1 Mk. 80 Pf.
№ 10. **Nyrén, M.** Die Polhöhe von Pulkowa. 1873. Pr. 35 K. = 1 Mk 20 Pf.
T. XXIII, № 3. **Nyrén, M.** Das Aequinoctium für 1865,0, abgeleitet aus den am Passageninstrumente und am Verticalkreise in den Jahren 1861 — 1870 in Pulkowa angestellten Sonnenbeobachtungen. 1876. Pr. 30 K. = 1 Mk.
T. XXVI, № 2. **Asten, E. v.** Untersuchungen über die Theorie des Encke'schen Cometen. II. Resultate aus den Erscheinungen 1819—1875. 1878. Pr. 1 R. = 3 Mk. 30 Pf.
№ 4. **Hasselberg, Dr. B.** Studien auf dem Gebiete der Absorbtionsspectralanalyse. Avec 4 pl. 1878. Pr. 1 R. = 3 Mk. 30 Pf.
T. XXVII, № 1. **Hasselberg, Dr. B.** Ueber das durch electrische Erregung erzeugte Leuchten der Gaze bei niedriger Temperatur. 1879. Pr 25 K. = 80 Pf.
№ 11. **Struve, O.** Études sur le mouvement relatif des deux étoiles du système de 61 Cygni. 1880. Pr. 35 K. = 1 Mk. 20 Pf.
T. XXVIII, № 6. **Backlund, O.** Zur Theorie des Encke'schen Cometen. 1881. Pr. 70 K. = 2 Mk. 30 Pf.
T. XXX, № 4. **Lindemann, Ed.** Zur Beurtheilung der Veränderlichkeit rother Sterne. 1882. Pr. 15 K. = 50 Pf.
№ 7. **Hasselberg, Dr. B.** Untersuchungen über das zweite Spectrum des Wasserstoffs. Avec 1 pl. 1882. Pr. 30 K. = 1 Mk.
№ 8. **Struve, Hermann.** Ueber den Einfluss der Diffraction an Fernröhren auf Lichtscheiben. 1882. Pr. 90 K. = 3 Mk.
T. XXXI, № 1. **Struve, Hermann.** Zur Theorie der Talbot'schen Linien. 1883. Pr. 15 K. = 50 Pf.
№ 2. **Struve, Ludwig.** Resultate aus den in Pulkowa angestellten Vergleichungen von Procyon mit benachbarten Sternen. 1883. Pr. 45 K. = 1 Mk. 50 Pf.
№ 4. **Lindstedt, And.** Beitrag zur Integration der Differentialgleichungen der Störungstheorie. 1883. Pr. 20 K. = 70 Pf.
№ 9. **Nyrén, M.** L'aberration des étoiles fixes. 1883. Pr. 40 K. = 1 M. 30 Pf.
№ 14. **Hasselberg, Dr. B.** Untersuchungen über das zweite Spectrum des Wasserstoffs. Zweite Abhandlung. Avec 2 pl. 1883. Pr. 50 K. = 1 Mk. 70 Pf.

Imprimé par ordre de l'Académie Impériale des sciences.

Décembre, 1883. C. Vessélofsky, Secrétaire perpétuel.

Imprimerie de l'Académie Impériale des sciences. (Vass.-Ostr., 9e ligne, № 12.)

MÉMOIRES
DE
L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES DE ST.-PÉTERSBOURG, VIIE SÉRIE.
Tome XXXI, N° 16 et dernier.

RUSSISCHE

CALEDONIT- UND LINARIT-KRYSTALLE.

VON

P. W. Jeremejew.

(Lu le 24 mai 1883.)

ST.-PÉTERSBOURG, 1883.
Commissionnaires de l'Académie Impériale des sciences:
à St.-Pétersbourg: MM. Eggers et Cie et J. Glasounof;
à Riga: M. N. Kymmel;
à Leipzig: Voss' Sortiment (G. Haessel).

Prix: 25 Kop. = 80 Pf.

MÉMOIRES
DE
L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES DE ST.-PÉTERSBOURG, VIIE SÉRIE.
TOME XXXI, N° 16 ET DERNIER.

RUSSISCHE
CALEDONIT- UND LINARIT-KRYSTALLE.

VON

P. W. Jeremejew.

(Lu le 24 mai 1883.)

ST.-PÉTERSBOURG, 1883.
Commissionnaires de l'Académie Impériale des sciences:

à St.-Pétersbourg:	à Riga:	à Leipzig:
MM. Eggers et Cie et J. Glasounof;	M. N. Kymmel;	Voss' Sortiment (G. Haessel).

Prix: 25 Kop. = 80 Pf.

Imprimé par ordre de l'Académie Impériale des sciences.
Décembre, 1883. C. Vessélofsky, Secrétaire perpétuel.

Imprimerie de l'Académie Impériale des sciences.
(Vass.-Ostr., 9 ligne, № 12.)

1. Caledonit.

Die ersten Nachrichten über die chemische Zusammensetzung des Caledonit (Beudant) und seiner Krystallformen wurden im Jahre 1825 von H. J. Brooke veröffentlicht. Seither ist dieses seltene und interressante Mineral, welches seine Benennung von Caledonien, dem alten römischen Namen des westlichen Theiles Schottlands erhielt, nur aus der Bleigrube Leadhills in Lancashire bekannt gewesen. Später wurde es in Red-Gill in Cumberland, dann in Rezbanya in Siebenbürgen und wie es scheint auch in «Mine la Motte» im Staate Missuri entdeckt;[1]) aber überall fand sich dieses Mineral in sehr geringer Quantität und nur in kleinen Krystallen.

Die ersten Exemplare des russischen Caledonit fand und bestimmte ich unter Gesteinsarten und Mineralien, die aus der Grube Preobraschensk[2]) der Seife von Beresowsk stammen und vom Bergingenieur A. A. Auerbach mir zugestellt waren, wofür ich mich verpflichtet fühle ihm meinen innigsten Dank auszusprechen. In der Folge wurden ebensolche Exemplare und aus demselben Fundort Preobraschensk unter den Doubletten der Lehrsammlungen des Berginstituts gefunden.

Wie aus früheren Untersuchungen und Ansichten bekannt ist, bildet der Caledonit eine Verbindung von 55,8 Bleisulfat mit 22,8 Bleicarbonat und 11,4 Kupfercarbonat entsprechend der Formel $3PbSO^4 + 2PbCO^3 + CuCO^3$. Aber in Folge der neuesten Untersuchungen von Flight (Journ. Chem. Soc. [2], XII, p. 101) stammt die Kohlensäure in der

1) J. D. Dana, A System of Mineralogie, V edition, p. 626.

2) Diese Grube ist auf dem Preobraschenskischen Berge angelegt, welcher sich im 24. Quadrat der zweiten Hälfte der Goldseife von Beresowsk befindet. Sie wurde im Jahre 1797 angelegt und bewährte im Verlaufe von 25 Jahren ihren Ruhm durch Reichthum an Gold, so wie als Fundstätte vieler seltener, so zu sagen einzigen Stufen von Rothbleierz, Pyromorphit und Vanadinit.

angeführten Formel von dem, das eigenthümliche Mineral begleitenden Weissbleierz und die wirkliche Zusammensetzung des Caledonit in den erwähnten schottländischen Exemplaren muss als eine Verbindung von Bleisulfat mit Bleihydroxyd und Kupferhydroxyd angesehen werden, entsprechend dem Ausdruck $5PbSO^4 + 2(H^2PbO^2) + 3(H^2CuO^2)$, aus dem sich folgender Procentgehalt der Bestandtheile ergiebt: $PbO = 68,42$, $CuO = 10,17$, $SO^3 = 17,30$ und $H^2O = 4,05$. Die russischen Exemplare sind wegen Mangels an Material nur qualitativ geprüft worden, wobei sich die Anwesenheit der oben angeführten Elemente herausstellte.

Das Krystallsystem des Caledonit ist nach der Ansicht fast aller Mineralogen rhombisch mit dem Axenverhältniss in der Hauptpyramide $a : b : c = 1,5314 : 1 : 1,0913$. Auf Grund der von mir ausgeführten Messungen, welche aber mit den Untersuchungen von A. Schrauf vollkommen übereinstimmen,[1]) neige ich mich zu der Ansicht dieses Gelehrten und rechne die in Rede stehenden Caledonitkrystalle zum monoklinischen Krystallsystem, mit einem Axenverhältniss, welches dem vorhergehenden nahe steht und einen Winkel zwischen der Klinodiagonale und der Hauptaxe $\beta = 89°22'$ bildet. Unter den, mit Hülfe des Mitscherlichschen Goniometers, durch zahlreiche Messungen bestimmten monoklinen Formen des in Rede stehenden Minerals erscheinen besonders entwickelt die Flächen des Orthopinakoid $\infty P \infty$ $(a) = (100)$, des Basopinakoid OP $(o) = (001)$, des verticalen Protoprisma ∞P $(m) = (110)$, der positiven und negativen Hemipyramiden $+ 2P$ $(v) = (\bar{2}21)$ und $- 2P$ $(w) = (221)$, wobei die Flächen der ersten beiden Formen in der Richtung der orthodiagonalen Axe verlängert sind und den Krystallen ein feinprismatisches Ansehen geben. Nach diesen folgen als Partialformen die Flächen der Haupt- und der stumpfen Hemipyramiden $+ P$ $(t) = (\bar{1}11)$, $- P$ $(u) = (111)$, $+ \frac{2}{3} P$ $(r) = (\bar{2}23)$, $- \frac{2}{3} P$ $(s) = (223)$, so wie einige Hemiorthodomen $\pm mP\infty = (hol)$, deren Parameter weiter unten angegeben sind. Alle Krystalle sind scheinbar Zwillinge mit der dem Basopinakoid OP $(o) = (001)$ parallelen Zusammensetzungsfläche der Individuen und einer zur letzteren verticalen Drehungsaxe.

Der Caledonit gehört überhaupt zu den zarten und sehr spröden Mineralien; seine Härte ist 2,5 ... 3; die vollkommenste Spaltbarkeit geht bei ihm in der Richtung des Bsaopinakoid, während die minder vollkommene eine dem Orthopinakoid $\infty P \infty$ $(a) = (100)$ parallele Richtung hat. Die Krystalle des russischen Caledonit sind im Allgemeinen deutlich entwickelt und ihre Flächen oft stark glänzend; nur bei einigen Exemplaren sind die Kanten der orthodiagonalen Zone, in Folge der oscillatorischen Combinationen der Hemiorthodomen $\pm m P \infty$ und Pinakoide $\infty P \infty$ und OP mit einer sehr feinen Streifung bedeckt. Die absoluten Dimensionen der russischen Exemplare dieser Mineralspecies übertreffen nicht die ausländischen und variiren überhaupt von 1—3,5 mm. nach der Orthodiagonale, bei 1—1,5 mm. in der Querrichtung. Die meisten der russischen Krystalle sind an beiden Enden

1) Sitzungsberichte d. Kais. Academie d. Wissenschaften zu Wien, Jahrg. 1871, I. Abth., Juli-Heft, S. 57.

ausgebildet; die übrigen gewöhnlich nur an einem Ende, entweder als Folge von Verwachsung und Durchwachsung vieler Individuen oder Aufwachsung derselben auf dem Muttergestein.

Die Farbe der Caledonitkrystalle ist sehr schön, blau-grün, ganz wie bei den schottländischen Exemplaren, das Pulver dagegen grünlich-weiss. Die Flächen derselben sind fettglänzend, einige sehr stark glänzend, auf den übrigen genügt der Glanz zur Messung mit dem Reflexionsgoniometer. Einige Krystalle sind ganz, andere nur halb durchsichtig oder durchschimmernd. Bei der Drehung der ersteren um ihre Orthodiagonale in zwei einander perpendicularen Richtungen und zwar in der Fläche des Klinopinakoids, ist der Unterschied in der Intensität der grünen Farbe, als Folge des Dichroismus, deutlich bemerkbar, so wie auch eine in der Richtung der Klinodiagonale gelbliche und in der Hauptaxe bläuliche Nüance.

Vor dem Löthrohr auf Kohle schmilzt das Mineral leicht unter Brausen und reducirt sich zu Blei, wobei die Kohle mit gelben Anflug von PbO bedeckt wird; Glasperlen geben eine deutliche Reaction auf Kupfer und werden durch Reduction des letzteren braun gefärbt; mit Soda reagirt es auf Schwefelsäure. In Salpetersäure löst sich das Mineral unter ziemlich starkem Brausen mit Ausscheidung von Bleisulfat; bei Zufügung von Ammoniak nimmt die Lösung eine blaue Farbe an.

Die Aufstellung der Caledonitkrystalle aus ausländischen Fundorten zur Deutung ihrer Krystallformen ist bisher von verschiedenen Gelehrten auf dreierlei Art ausgeführt worden Einige nahmen für die Hauptaxe die grösste Dimension und zählten diese Krystalle zum. rhombischen System; andere behielten dasselbe Krystallsystem bei, gaben aber der angeführten Dimension eine horizontale Lage und nahmen sie als brachi- oder makrodiagonale Axe an. Die von mir ausgeführten Untersuchungen zahlreicher Krystalle des Caledonit vom Ural veranlassten mich dieselben nach der letzten Methode aufzustellen, wobei ich aber die Krystalle als zum monoklinen Krystallsystem gehörig rechne und die bezeichnete grösste Dimension als Richtung der Orthodiagonale ansehe, wie das schon früher von A. Schrauf bezüglich des Systems, in seiner obenerwähnten Untersuchung über den Caledonit aus Rezbanya, unzweifelhaft nachgewiesen worden ist.

Aus der folgenden Tabelle ersieht man ausser den verschiedenen Methoden der Aufstellung der Krystalle, noch die krystallographische Bedeutung, so wie die entsprechenden Zeichen der wichtigsten Formen, die in den Werken verschiedener Autoren angeführt werden.

W. Phillips [1].	W. Phillips [2].	J. Dana. C. Naumann [3].	R. Greg [4].	W. Haidinger, F. Mohs, F. Hessenberg [5].	A. Schrauf [6].	P. Jeremejew.
h	a 100	$i\breve{i}$, $\infty\breve{P}\infty$	a (100)	a $\infty\bar{P}\infty$	a (100)	$\infty P\infty$ (a)
P	c 001	o, OP	P (010)	c $\infty\breve{P}\infty$	c (001)	OP (c)
c	e 101	$1\breve{i}$, $\breve{P}\infty$	e (110)	e ∞P	e (101) η ($\bar{1}01$)	—$P\infty$ (o)
M	m 110	I, ∞P	M (101)	m $\bar{P}\infty$	m (110)	$+\infty P$ (m)
a^1		$1\bar{i}$, $\bar{P}\infty$		$\breve{P}\infty$		$+P\infty$ (n)
a^2	x 021	$2\bar{i}$, $2\bar{P}\infty$	x (011)	$\frac{1}{2}\breve{P}\infty$		
e^1	s 223	$\frac{2}{3}$, $\frac{2}{3}P$	s (232)	s $\frac{3}{2}\breve{P}\frac{3}{2}$	s (223) σ ($\bar{2}23$)	$-\frac{2}{3}P$ (s) $+\frac{2}{3}P$ (r)
e^2	r 111	1, P	r (111)	P	r (111) ρ ($\bar{1}11$)	$-P$ (u) $+P$ (t)
e^3		2, 2P	t (212)	t $\bar{P}2$	t (221) τ ($\bar{2}21$)	$-2P$ (w) $+2P$ (v)

Ausser den hier angeführten Formen finden sich an den Krystallen des Caledonit vom Ural fast alle krystallographischen Flächen, die schon längst von den oben genannten Autoren an schottländischen und cumberländischen Exemplaren beobachtet worden sind, so wie der grösste Theil der Formen, die A. Schrauf an den Krystallen aus Rezbanya nachgewiesen hat. So erscheinen auf den, von mir untersuchten Exemplaren, ausser den, in der Tabelle angeführten, noch folgende Formen: die positiven Hemiorthodomen $+\frac{1}{6}P\infty$ (e) $= (\bar{1}06)$, $+\frac{1}{3}P\infty$ (g) $= (\bar{1}03)$, $+\frac{1}{2}P\infty$ (i) $= (\bar{1}02)$ und die negativen Hemiortho-

1) W. Phillips. An Elementary Introduction to Mineralogy, IV edition, London, 1837, p. 360.

2) Id............Edition H. J. Brooke und W. H. Miller, 1852, p. 561.

3) J. D. Dana, aided by G. J. Brush. A system of Mineralogy, V edition. New-Jork. 1868, p. 625. C. F. Naumann. Elemente der Mineralogie, XI vollständig neu bearbeitete Auflage von F. Zirkel, Leipzig, 1881; S. 456.

4) R. P. Greg and W. G. Lettsom. Manuel of the Mineralogy of Great Britain and Ireland. London, 1858, p. 403. Die in der 4 Colonne neben den Buchstaben befindlichen krystallographischen Zeichen habe ich aus der Stellung der Figur und den Winkelgrössen im bezeichneten Werke von Greg berechnet.

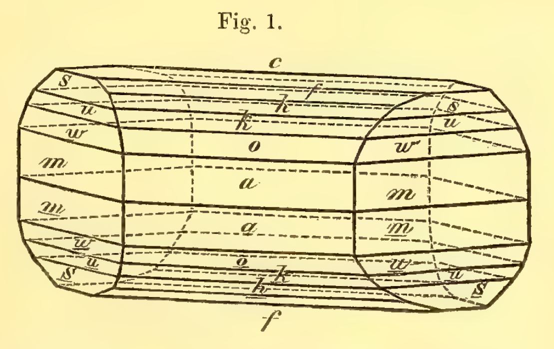
5) W. Haidinger. Anfangsgründe der Mineralogie, Leipzig, 1829, S. 148. F. Mohs. Leichtfassliche Anfangsgründe der Naturgeschichte des Mineralreiches, II Th., Wien, 1839, S. 154. F. Hessenberg. Mineralogische Notizen, Frankfurt a. M. 1870, № 9, S. 48.

6) A. Schrauf. Sitzungsber. der Kais. Akademie d. Wissenschaften zu Wien. Jahrg. 1871, LXIV Bd., I Abth. S. 57.

domen — $\frac{1}{16}$ P ∞ (*q*) = (1.0.16), — $\frac{1}{6}$ P ∞ (*f*) = (106), — $\frac{1}{3}$ P ∞ (*h*) = (103) — — $\frac{1}{2}$ P ∞ (*k*) = (102). Die Hemiorthodomen + $\frac{1}{6}$ P ∞ (*e*) und — $\frac{1}{3}$ P ∞ (*h*) treten ziemlich selten auf und müssen als neue Formen für den Caledonit angesehen werden, weil sie an ausländischen Exemplaren noch nicht entdeckt sind. Die erste ist aus dem Neigungswinkel ihrer Flächen zum Basopinakoid OP (*c*) und die zweite zur Hemidoma — $\frac{1}{2}$ P ∞ (*k*) bestimmt; $e : c = 166° 22' 40''$ nach der Messung (166° 24′ 5″ berechnet) und $h : k = 170° 2' 30''$ nach Messung (169° 57′ 35″ berechnet).

Es existiren wahrscheinlich noch andere Krystallformen des Caledonit, wie dies von A. Schrauf für die Exemplare aus Rezbanya nachgewiesen worden ist, indem er an denselben die folgenden bestimmte: + $\frac{1}{20}$ P ∞, + $\frac{1}{10}$ P ∞, — $\frac{1}{24}$ P ∞, — $\frac{1}{8}$ P ∞, + $\frac{3}{5}$ P und — 20 P (?), jedoch war es mir wegen der geringen Grösse der untersuchten Krystalle nicht möglich alle Flächen mit der wünschenswerthen Genauigkeit zu messen. Aus demselben Grunde ist es mir auch nicht möglich gewesen den Unterschied in der physikalischen Beschaffenheit der Flächen nachzuweisen. Ich will nur anführen, dass die Kanten aller Hemipyramiden und der verticalen Prismen ∞ P (*m*) = (110) an einzelnen und vollständig ausgebildeten Krystallen im Allgemeinen spiegelglänzend sind und, dass die Kanten der Hemiorthodomen ± P ∞ (*n*, *o*) und des Orthopinakoids ∞ P ∞ (*a*), in Folge der polysynthetischen Zwillingsbildung der Individuen nach dem obenangeführten Gesetz, so wie in Folge der sich wiederholenden Combinationen, gewöhnlich mit den feinsten Streifen parallel zu den Combinationskanten dieser Formen mit ∞ P ∞ (*a*) und OP (*c*) bedeckt sind. Die Combinationen einiger Krystalle bestehen am häufigsten nur aus einer geringen Anzahl Flächen, wie ∞ P ∞ (*a*), ∞ P (*m*), OP (*c*), + P ∞ (*n*) und — P ∞ (*o*); an andern erscheinen sie, übrigens in seltenen Fällen, in Folge des Hinzutretens der Flächen der Hemipyramiden der Hauptreihe, so wie der Hemiorthodomen, ziemlich complicirt, wie aus der beigefügten Zeichnung ersichtlich (Fig. 1).

Fig. 1.



Das sehr seltene Vorkommen des Caledonit und die stets geringe Grösse seiner Krystalle müssen als Hauptgrund für die geringe Zahl der angeführten Untersuchungen angesehen werden, obgleich das Mineral schon längst in Leadhills und Cumberland entdeckt worden ist. Diesen Umständen muss zum Theil auch die so lange unerklärt gebliebene Verschiedenheit der Grössen derselben zweiflächigen Winkel zugeschrieben werden, die von H. Brooke, R. Greg und F. Hessenberg gemessen wurden. Im Jahre 1871 revidirte A. Schrauf ausführlich die Resultate der früheren Beobachtungen und vollführte mit möglichster Genauigkeit Messungen an Krystallen dieses seltenen Minerals an einer von ihm im Wiener kaiserl. Hofmineraliencabinet gefundenen Stufe des Caledonit in Begleitung von Linarit

aus Rezbanya[1]). Dank diesen letzteren Untersuchungen wurden bei der Bestimmung des Caledonit vom Ural die früheren Irrthümer leicht umgangen, denn die von mir durch Messung erzielten Resultate stimmten mit den von A. Schrauf erhaltenen überein, wie aus der folgenden Tabelle der Combinationswinkel zu ersehen ist.

Die vermittelst des Mitscherlichschen Goniometers am genauesten gemessenen zweiflächigen Winkel, die zur Berechnung aller Elemente der krystallographischen Formen des Caledonit dienten, wurden von den folgenden Flächen gebildet:

OP	(c)	(001) :	$-\frac{1}{6}P\infty$	(f)	(106) =	166°	30′	10″	
$\infty P\infty$	(a)	(100) :	$+2P\infty$	(p)	($\bar{2}01$) =	160	49	10	
$\infty P\infty$	(a)	(100) :	$\infty P\infty$	(a)	(100) =	178	44	10	(Zwillingswinkel)
∞P	(m)	(110) :	$+P$	(t)	($\bar{1}11$) =	154	50	56	
∞P	(m)	(110) :	$-2P$	(w)	(221) =	166	52	0	
∞P	(m)	(110) :	∞P	(m)	(110) =	94	54	18	(Y)

Nimmt man hier den Winkel zwischen der Klinodiagonale $\grave{a}$ und der Hauptaxe $\acute{c}$, das heisst $r = 89°22'$ und rechnet man die Orthodiagonale $\bar{b} = 1$, so findet man durch Berechnung das Verhältniss der krystallographischen Axen: $\grave{a} : \bar{b} : \acute{c} = 1{,}089562 : 1 : 1{,}577254$.

Nimmt man diese Grössen der krystallographischen Axen als Basis für die Berechnung aller Formen des Caledonit, die vermittelst Messung bestimmt wurden, und bezeichnet man in den positiven Hemipyramiden durch X den Neigungswinkel ihrer Flächen zu dem klinodiagonalen Hauptschnitt, durch Y zu dem orthodiagonalen Hauptschnitt und durch Z zu dem basischen Hauptschnitt, während in den negativen Hemipyramiden dieselben Neigungswinkel durch X^I, Y^I und Z^I bezeichnet werden; wenn man ferner in den positiven Hemipyramiden den Neigungswinkel der klinodiagonalen Polkanten zu der Hauptaxe durch μ, derselben Kanten zur Klinodiagonalaxe durch v und der orthodiagonalen Polkanten zu der Hauptaxe durch ρ, den Neigungswinkel der Mittelkanten zur Klinodiagonalaxe durch σ, dagegen in den negativen Hemipyramiden die beiden erstgenannten Winkel durch μ^I und v^I bezeichnet, so ergiebt sich vermittelst Berechnung für die Hemipyramiden, Hemiorthodomen und Prismen Folgendes:

Positive und negative Hemipyramiden.

$+\frac{2}{3}P\ (r) = (\bar{2}23)$		$-\frac{2}{3}P\ (s) = (223)$	
X	= 52° 44′ 12″	X^1	= 53° 2′ 28″
Y	= 56 40 31	Y^1	= 56 4 13
Z	= 55 16 10	Z^1	= 54 41 42
μ	= 46 20 46	μ^1	= 45 41 26
v	= 44 17 14	v^1	= 43 40 34

1) Andere Exemplare von Caledonit sind auch in Rezbanya von W. Haidinger entdeckt (Jahrb. d. k. k. geolog. Reichsanstalt, 1851, II, 2, S. 79) und später von K. Peters untersucht worden (Sitzungsber. der Kais. Akademie der Wissenschaften zu Wien. Jahrg. 1861, XLIV Bd. I Abth. S. 170).

ρ = 43 33 43	ρ = 43 33 43
σ = 42 32 45	σ = 43 32 45

+ P (t) = ($\bar{1}$11)	— P (u) = (111)
X = 47° 58′ 43″	X^1 = 48° 16′ 24″
Y = 52 25 48	Y^1 = 52 0 23
Z = 65 18 50	Z^1 = 64 36 39
μ = 34 50 26	μ^1 = 34 25 51
ν = 55 47 34	ν^1 = 54 56 9
ρ = 32 22 31	ρ = 32 22 31
σ = 42 32 45	σ = 42 32 45

+ 2 P (v) = ($\bar{2}$21)	— 2 P (w) = (221)
X = 44° 3′ 40″	X^1 = 44° 15′ 23″
Y = 48 55 27	Y^1 = 48 42 27
Z = 77 15 37	Z^1 = 76 26 53
μ = 19 7 16	μ^1 = 18 59 11
ν = 71 30 44	ν^1 = 70 22 49
ρ = 17 35 20	ρ = 17 35 20
σ = 42 32 45	σ = 42 32 45

Positive und negative Hemiorthodomen,

— $\frac{1}{16}$ P ∞ (q) (1.0.16) $\begin{cases} Y^1 = 84° 12′ 8″ \\ Z^1 = 5\ 9\ 52 \end{cases}$

+ $\frac{1}{6}$ P ∞ (e) = ($\bar{1}$06)	— $\frac{1}{6}$ P ∞ (f) = (106)
Y = 77° 2′ 5″	Y^1 = 75° 50′ 16″
Z = 13 35 55	Z^1 = 13 31 44

+ $\frac{1}{3}$ P ∞ (g) = ($\bar{1}$03)	— $\frac{1}{3}$ P ∞ (h) = (103)
Y = 64° 45′ 20″	Y^1 = 63° 43′ 41″
Z = 25 52 40	Z^1 = 25 38 19

+ $\frac{1}{2}$ P ∞ (i) = ($\bar{1}$02)	— $\frac{1}{2}$ P ∞ (k) = (102)
Y = 54° 31′ 8″	Y^1 = 53° 41′ 16″
Z = 36 6 51	Z^1 = 35 40 44

+ P ∞ (n) = ($\bar{1}$01)	— P (o) = (101)
Y = 52° 25′ 48″	Y^1 = 52 0′ 23″
Z = 65 18 50	Z^1 = 64 36 39

+ 2 P ∞ (p) = ($\bar{2}$01)	Prisma ∞ P (m) = (110)
Y = 19° 7′ 16″	Y = 42° 32′ 51″
Z = 71 30 44	Z = 47 27 9

Die gegenseitigen Neigungswinkel der Kanten in diesen Formen, die auf Grund der von mir ausgeführten Messungen der Kantenwinkel berechnet wurden, sind in der folgenden Tabelle vergleichsweise mit den von A. Schrauf berechneten Resultaten der Neigungswinkel für Caledonit angeführt.[1]

Zeichen der krystallinischen Formen.	P. Jeremejew.		A. Schrauf.	
	Gemessen.	Berechnet.	Zeichen.	Berechnet.
		In der Zone: c r t v m w u s.		
OP (*c*) : + $\frac{2}{3}$P(*r*) . . .	124°42′10″	124°43′50″	*c* (001) : σ $(\bar{2}23)$	124°41′30″
» : — $\frac{2}{3}$P(*s*) . . .	125 15 20	125 18 18	» : *s* (223)	125 20 0
» : + P (*t*) . . .	114 39 30	114 41 10	» : ρ $(\bar{1}11)$	114 38 54
» : — P (*u*) . . .	115 27 40	115 23 21	» : *r* (111)	115 25 30
» : + 2P (*v*) . .	102 47 8	102 44 23	» : τ $(\bar{2}21)$	102 43 0
» : — 2P (*w*) . .	103 37 32	103 33 7	» : *t* (221)	103 35 36
∞P (*m*) : + 2P (*v*) . .	166 47 30	166 49 55	*m* (110) : τ $(\bar{2}21)$	166 48 30
» : — 2P (*w*) . .	166 52 0	166 52 35	» : *t* (221)	166 52 54
» : + P (*t*)	154 50 56	154 53 8	» : ρ $(\bar{1}11)$	154 52 30
» : — P (*u*) . . .	155 6 10	155 2 21	» : *r* (111)	155 3 0
» : + $\frac{2}{3}$P (*r*) . .	. . . .	144 50 28	» : σ (223)	144 50 0
» : — $\frac{2}{3}$P (*s*) . .	145 3 20	145 7 24	» : *s* (223)	145 8 30
» : OP (*c*)	. . . .	{ 89 34 18 90 25 42 }	» : *c* (001)	{ 89 31 30 90 28 30 }
		In den Zonen: ars, atu, avw und am.		
∞P∞ (*a*) : + $\frac{2}{3}$P (*r*) . . .	. . . .	123°19′29″	a^1 (100) : σ $(\bar{2}23)$	123°18′ 0″
» : — $\frac{2}{3}$P (*s*) . . .	. . . .	123 55 47	*a* (100) : *s* (223)	123 58
+ $\frac{2}{3}$P (*r*) : — $\frac{2}{3}$P (*s*) . . .	. . . .	112 44 44	σ $(\bar{2}23)$: *s* (223)	112 44
∞P∞ (*a*) : + P (*t*)	127 29 50	127 34 12	a^1 (100) : ρ $(\bar{1}11)$	127 33
» : — P (*u*) . . .	128 4 30	127 59 37	» : *r* (111)	128 1
+ P (*t*) : — P (*u*) . . .	. . . .	104 26 11	ρ (111) : *r* (111)	104 26
∞P∞ (*a*) : + 2P (*v*) . .	131 1 10	131 4 30	*a* (100) : τ $(\bar{2}21)$	131 2 30
» : — 2P (*w*) . .	131 12 20	131 17 33	» : *t* (221)	131 18 30
+ 2P (*v*) : — 2P (*w*) . .	. . . .	97 37 54	τ $(\bar{2}21)$: *t* (221)	97 30

1) Alle in diesem Artikel angeführten gemessenen Winkel sind das Mittel aus mehreren Messungen.

Zeichen der krystallinischen Formen.	P. Jeremejew.		A. Schrauf.	
	Gemessen.	Berechnet.	Zeichen.	Berechnet.
∞P∞(*a*) : ∞ P(*m*)….	132°35′10″	132°32′51″	*a* (100) : *m* (110)	132°33′
∞P(*m*) : ∞ P(*m*) *X* .	……..	85 5 42	*m* (110) : *m* (110)	85 4
» : ∞ P(*m*) *Y* .	94 54 18	94 54 18	» : *m* (110)	94 56

In der Zone: *c e g i n p o k h f q a.*

OP (*c*) : — $\frac{1}{16}$P∞(*q*)	174°45′30″	174°50′ 8″	*c* (001) : *h* (1.0.16)	174°50′42″
» : + $\frac{1}{6}$P ∞(*e*)	166 20 40	166 24 5	………………	……..
» : — $\frac{1}{6}$P ∞(*f*)	166 30 10	166 28 16	*c* (001) : *k* (106)	166 28 42
+$\frac{1}{6}$∞P (*e*) : — $\frac{1}{6}$P ∞(*f*)	über *c*	152 52 21	………………	……..
	über *a*	27 7 39		
OP (*c*) : + $\frac{1}{3}$P ∞(*g*)	154 12 48	157 7 20	*c* (001) : ψ $(\bar{1}03)$	154 6 30
» : — $\frac{1}{3}$P ∞(*h*)	154 18 50	154 21 41	………………	……..
+$\frac{1}{3}$P (*g*) : — $\frac{1}{3}$P ∞(*h*)	über *c*	128 29 1	………………	……..
	über *a*	51 30 59		
OP (*c*) : + $\frac{1}{2}$P ∞(*i*)	143 57 30	143 53 8	*c* (001) : φ $(\bar{1}02)$	143 51 30
» : — $\frac{1}{2}$P ∞(*k*)	……..	144 19 16	» : *f* (102)	144 20 42
+$\frac{1}{2}$P∞ (*i*) : — $\frac{1}{2}$P ∞(*k*)	über *c*	108 12 24	φ $(\bar{1}02)$: *f* (102)	108 12 12
	über *a*	71 47 36		71 47 48
OP (*c*) : + P ∞(*n*)	……..	124 12 26	*c* (001) : η $(\bar{1}01)$	124 9 30
» : — P ∞(*o*)	……..	125 3 51	» : *e* (101)	125 6 30
+P∞(*n*) : — P ∞(*o*)	über *c*	69 16 17	η $(\bar{1}01)$: *e* (101)	69 16 0
	über *a*	110 43 43		110 44 0
OP (*c*) : + 2P ∞(*p*)	……..	108 29 16	*c* (001) : δ $(\bar{2}01)$	108 25 18
» : ∞P ∞(*a*)	……..	90 38	» : *a* (100)	90 42 12
∞P ∞ (*a*) : + 2P ∞(*p*)	160 49 10	160 52 44	*a′* $(\bar{1}00)$: δ $(\bar{2}01)$	169 52 30
» : + P ∞(*n*)	145 5 20	145 9 34	» : η $(\bar{1}01)$	145 8 30
» : — P ∞(*o*)	145 31 30	145 34 9	» : *e* (101)	145 35 30
» : + $\frac{1}{2}$P ∞(*i*)	……..	125 28 52	» : φ $(\bar{1}02)$	125 26 24
» : — $\frac{1}{2}$P ∞(*k*)	126 21 10	126 18 44	» : *f* (102)	126 21 30
» : + $\frac{1}{3}$P ∞(*g*)	……..	115 14 40	» : ψ $(\bar{1}03)$	115 11 30
» : — $\frac{1}{3}$P ∞(*h*)	……..	116 16 19	………………	……..
» : + $\frac{1}{6}$P ∞ (*e*)	……..	102 57 55	………………	……..
» : — $\frac{1}{6}$P ∞(*f*)	……..	104 9 44	*a* (100) : *k* (106)	104 13 30
» : — $\frac{1}{16}$P∞(*q*)	……..	95 47 52	» : *h* (1.0.16)	95 51 30
» : OP ∞(*c*)	….. ..	89 22	» : *c* (001)	89 17 48

Zeichen der krystallinischen Formen.	P. Jeremejew.		A. Schrauf.	
	Gemessen.	Berechnet.	Zeichen.	Berechnet.
Zwillingswinkel in den Zonen: *m w u c t v* und *a o c n p*.				
$\infty P\,(m) : \infty P\,(m)$	179° 9′10″	179° 8′36″	$m\,(110) : \bar{m}\,(110)$	179° 3′30″
$-2P\,(w) : -2P\,(w)$	....	152 53 46	$t\,(221) : \bar{t}\,(221)$	152 48 0
$+2P\,(v) : +2P\,(v)$	....	154 31 14	$\tau\,(\bar{2}21) : \bar{\tau}\,(221)$	154 34 0
$-P\,(u) : -P\,(u)$	....	129 13 18	$r\,(111) : \bar{r}\,(111)$	129 9 0
$+P\,(t) : +P\,(t)$	....	130 37 40	$\rho\,(\bar{1}11) : \bar{\rho}\,(\bar{1}11)$	130 42 12
$\infty P \infty\,(a) : \infty P \infty\,(a)$	178 44 10	178 44 0	$a\,(100) : \bar{a}\,(100)$	178 35 36
$+2P\infty\,(p) : +2P\infty\,(p)$	....	143 1 28	$\delta\,(\bar{2}01) : \bar{\delta}\,(\bar{2}01)$	143 9 24
$-P\infty\,(o) : -P\infty\,(o)$	....	109 52 18	$e\,(101) : \bar{e}\,(101)$	109 47 0
$+P\infty\,(n) : +P\infty\,(n)$	....	111 35 8	$\eta\,(\bar{1}01) : \bar{\eta}\,(\bar{1}01)$	111 41 0

Der grösste Theil der in dieser Tabelle gegebenen krystallographischen Formen ist verhältnissmässig erst vor Kurzem von A. Schrauf nachgewiesen worden, dagegen ist die Anzahl der schon lange bekannten Formen des Caledonit eine sehr beschränkte, wesshalb ich, um die vielen Lücken in den Tabellen zu umgehen, in denselben die von H. Brooke und F. Hessenberg bestimmten Winkel nicht aufgenommen habe, dieselben aber in der folgenden Tabelle vergleichsweise mit den von mir berechneten Grössen zusammenstelle.

P. Jeremejew. Berechnet.		F. Hessenberg.		H. Brooke und Miller.	
		Zeichen.	Berechnet.	Zeichen.	Berechnet.
$c : r$	124°43′50″	$c\ \infty\breve{P}\infty : s\ \frac{3}{2}\breve{P}\frac{3}{2}$	125°21′	c 001 : s 223	125°50′ 0″
$c : s$	125 18 18				
$c : t$	114 41 10	....	....	c 001 : r 111	115 42 30
$c : u$	115 23 21				
$c : v$	102 44 23	$c\ \infty\breve{P}\infty : t\ \bar{P}2$	103 5	....	....
$c : w$	103 33 7	Berechnet	103 32		
$c : m$	89 34 18 90 25 42	$c\ \infty\breve{P}\infty : m\bar{P}\infty$	90 0	c 001 : m 110	90 0 0
$m : r$	144 50 28	$m\ \bar{P}\infty : s\ \frac{3}{2}\breve{P}\frac{3}{2}$	144 56	m 110 : s 223	144 10 0
$m : s$	145 7 24				

	P. Jeremejew. Berechnet.	F. Hessenberg. Zeichen.	F. Hessenberg. Berechnet.	H. Brooke und Miller. Zeichen.	H. Brooke und Miller. Berechnet.
m : *v*	166°49′55″	$m\,\bar{P}\infty : t\,\bar{P}2$	166°28′	....	....
m : *w*	166 52 35				
c : *n*	124 12 26	$c\,\infty\breve{P}\infty : e\,\infty P$	125 25	*c* 001 : *e* 101	125°28′30″
c : *o*	125 3 51				
a : *n*	145 9 34	$a\,\infty\bar{P}\infty : e\,\infty P$	144 39	*a* 100 : *e* 101	144 31 30
a : *o*	145 34 9				
n : *o* über *a*	110 43 43	$e\,\infty P : e\,\infty P$ über *a*	109 38	*e* 101 : *e* 101	109 3 0
a : *c*	89 22 0 90 38 0	$a\,\infty\bar{P}\infty : c\,\infty\breve{P}\infty$	90 7	*a* 100 : *c* 001	90 0 0
a : *m*	132 32 51	$a\,\infty\bar{P}\infty : m\,\bar{P}\infty$	132 42 132 16	*a* 100 : *m* 110	132 30 0
m : *m*	94 54 18	$m\,\bar{P}\infty : m\,\bar{P}\infty$	94 47	*m* 110 : *m* 110	95 0 0

In Betreff des Vorkommens des Caledonit ist überhaupt hervorzuheben, dass in der geringen Zahl bisher bekannt gewordener ausländischer Fundorte derselbe, ausser von Weissbleierz und einigen andern Bleimineralien, zunächst immer von Linarit begleitet wird. Die complicirten chemischen Processe, welche bei Bildung dieser beiden seltenen Mineralien vor sich gehen, sind umständlich und klar von Karl F. Peters in seiner geologischen und mineralogischen Beschreibung des südöstlichen Theiles von Ungarn dargelegt[1]) und zwar, nicht nur nach den vom Autor an Ort und Stelle untersuchten Exemplaren d. h. in der Grube von Dolea in Rézbánya selbst, sondern auch nach den Exemplaren, welche sich in den Sammlungen der Pester Universität und des Wiener Hof-Mineralien-Cabinets befinden.

Aus diesen Untersuchnngen ist unter Anderem zu ersehen, dass viele Krystalle des Caledonit mit einer dünnen Weissbleierzrinde bedeckt sind, wodurch sie auf der Oberfläche weisslich trüb erscheinen, während andere, obgleich in der Nähe befindliche, aber besser geschützte Krystalle des Caledonit, in Folge der Linaritunterlage ganz unverändert geblieben sind. An einigen von K. F. Peters untersuchten Exemplaren ist zu ersehen, dass bei den Bildungsprocessen der Oxydverbindungen, der Caledonit in geringerem Grade der Einwirkung von kohlensäurehaltigem Wasser widersteht als der Linarit, während an andern Exemplaren man das Gegentheil zu beobachten Gelegenheit hat. Im Allgemeinen geht die successive Bildung dieser Sulfate in Dolea nach K. F. Peters durch Einwirkung der im Wasser aufgelösten Carbonate auf solche Weise vor sich, dass aus der ursprünglichen

1) Sitzungsber. der kais. Akademie der Wissenschaften zu Wien. Jahrg. 1861, XLIV Bd. I. Abth. S. 170.

Schwefelverbindung d. h. Bleiglanz zuerst Linarit, dann Caledonit und schliesslich Weissbleierz entsteht.

Andrerseits ist es aber auch bekannt, dass beim Auftreten von Bleiglanz mit andern Schwefelverbindungen, wie z. B. Schwefelkies, durch Oxydation des ersteren vermittelst kohlensaurer Flüssigkeiten eine saure Lösung von Eisenvitriol entsteht, welche, stark auf den Bleiglanz einwirkend, ihn in Bleisulfat verwandelt, das mitsammt dem gelösten Bleicarbonat zu den gewöhnlichsten Zersetzungsproducten des Bleiglanzes gehört und in der Folge neuen chemischen Veränderungen unterliegt[1]). Bei gleichzeitigem Auftreten von Bleiglanz und Kupferkies oder anderen kupferhaltigen Schwefelverbindungen bilden sich schwefelsaure Salze, welche durch die Wirkung kohlensaurer Lösungen wasserhaltige basische Salze des Bleies und Kupfers ausscheiden und zwar: Linarit ($PbSO^4 + H^2PbO^2$), ($CuSO^4 + H^2CuO^2$) und Caledonit $5PbSO^4 + 2 (H^2PbO^2) + 3 (H^2CuO^2)$[2]).

Diese complicirten chemischen Processe, welche die Umwandlungs-Pseudomorphosen verschiedener metallhaltiger Mineralien bedingen, können meiner Ansicht nach die wenigen Erscheinungen erklären, welche ich bei der Untersuchung der Mineralstufen aus der Beresowsker Grube behufs des Vorkommens von Caledonit in denselben, zu beobachten Gelegenheit hatte.

Auf den von A. A. Auerbach aus der Preobraschensk-Grube erhaltenen Stufen fand ich nur Caledonit ohne die geringsten Spuren seines in andern Fundorten stetigen Begleiters, des Linarit. Der Caledonit befindet sich auf diesen Stufen, wie oben erwähnt, in krystallischen Gruppen auf goldführendem Quarz in Begleitung von Weissbleierz, Bleivitriol und Wismuthocker. Unter den einzelnen kleinen Krystallen des Caledonit, die in dem erdigen Thone frei liegen, konnte auch kein Linarit entdeckt werden. Die Abwesenheit des Linarit in den angeführten Fällen schloss jedoch die Möglichkeit nicht aus, diese beiden Mineralien dennoch zusammen auf ein und demselben Gesteinsstück in der bezeichneten Grube zu treffen, wie sich das später auch bestätigt hat.

2. Linarit.

Die Entdeckung des Linarit in der Grube Beresowsk am Ural schrieb man dem verstorbenen Mitgliede der Kaiserlichen Mineralogischen Gesellschaft A. P. Uschakow zu, weil sich in dessen Sammlung ein Exemplar dieses Minerals (ohne Caledonit) aus dem genannten Fundort befand. Jedoch ist diese Stufe von ihm nie beschrieben worden und ich

---

1) Ed. Jannetaz. Bulletin de la société géologique de France. 1875, Tome III, 3 série, p. 309.

2) Justus Roth. Allgemeine und chemische Geologie. I. Band. Berlin, 1879, s. 243.

hatte auch keine Gelegenheit dieselbe in Augenschein zu nehmen. Nach Besichtigung dieser seltenen Stufe sprach der Akademiker N. J. von Kokscharow seine Zweifel über die Auffindung derselben in der Beresowsker Grube aus und war der Meinung, dass sie aus der Grube Kadainsk im Nertschinsker Bergrevier stamme, von woher eine Mineralstufe schon vor langer Zeit von F. von Kobell als Linarit erkannt worden ist [1]).

In der Hauptsammlung des Museums des Berginstituts befindet sich ein Exemplar dieses Minerals, das unzweifelhaft von der Beresowsker Grube stammt, welches aber leider nicht zu Messungen mit dem Reflexions-Goniometer verwendbar ist, da die Krystalle nicht genügend ausgebildete Flächen haben und ohne Beschädigung der Stufe nicht aus dem Gestein geschieden werden können.

Die absoluten Dimensionen der Stufe erreichen 7—9 cm. Länge und Breite bei 5 cm. Dicke; der in derselben befindliche Linarit besteht aus einer kleinen nierenförmigen Masse, die unten näher besprochen werden soll und aus zwei verwachsenen Krystallen von dunkler lazurblauer Farbe von 0,5 cm. Länge, die auf Quarz-Krystallen, welche ihrerseits aus dichtem Quarze ausgeschieden sind, sich aufgewachsen finden. Auf drei Seiten dieses letzteren, welche den Wandungen der das Gestein durchsetzenden Klüfte entsprechen, befindet sich eine dünne Ueberkrustung von Oxydsalzen des Kupfers von hellblauer und spangrüner Farbe. Alle drei kupferhaltigen Mineralien zusammen mit den übrigen, weiter unten bezeichneten, sind wahrscheinlich durch Zersetzung von metallischen Schwefelverbindungen und zwar hauptsächlich des Bleiglanzes und Nadelerzes (Patrinit) entstanden, von denen das letztere auf der Stufe in ziemlich grosser Menge, stellenweise zwar noch in frischem Zustande vorhanden, aber grösstentheils in Wismuthocker verwandelt ist und in Begleitung von gediegenem Golde, individuellen Anhäufungen des auf der Oberfläche zersetzten Bleiglanzes, kleinen Krystallen von Weissbleierz und Bleivitriol vorkommt.

Bei näherer Betrachtung der beiden erwähnten Linarit-Krystalle unter der Lupe erweist es sich, dass sie nicht aus zwei einzelnen Individuen dieses Minerals bestehen, sondern ein Aggregat eng verwachsener kleiner Krystalle darstellen, die rindenförmig ziemlich grosse Weissbleierzkrystalle bedecken. Die Linaritrinde nimmt die ganze Oberfläche der Weissbleierzkrystalle ein und kann nicht immer von denselben abgelöst werden. Ein zweites Exemplar einer ähnlichen Umhüllungs-Pseudomorphose des Linarits ist vollkommen deutlich auf der entgegengesetzten Seite des Gesteinsstückes sichtbar, wo eine ziemlich bedeutende Anhäufung von Individuen von Weissbleierz zufällig bis zur Mitte abgebrochen ist. Es stellen folglich im Allgemeinen beide hier angeführten Fälle eine entgegengesetzte Erscheinung der unzweifelhaften Verhältnisse dar, die von K. Peters bei den Linaritkrystallen aus Dolea in Rézbánya beobachtet worden sind, welche gewöhnlich von Weissbleierz überzogen sind und bei denen keineswegs der umgekehrte Fall beobachtet worden ist. Es war jedoch die Möglichkeit geboten auf der erwähnten Stufe an einzelnen Punkten der Linaritkruste, ver-

1) Materialien zur Mineralogie Russlands, von N. v. Kokscharow, 1866, V. Band, s. 106.

einzelte kleine Krystalle von Weissbleierz zu entdecken, wie auch einzelne Linaritkörner, welche in der Masse des Weissbleierzes eingebettet waren.

Das Weissbleierz, welches den Kern der beschriebenen Pseudomorphose bildet, ist bis auf einige Stellen vollkommen durchsichtig, hat einen muscheligen Bruch und ist etwas körnig.

Auf den übrigen Seiten des Gesteinsstückes, die keinen Linarit enthalten, sieht man vereinzelte kleine und durchsichtige Krystalle von Weissbleierz so wie Bleivitriol. Die abgebrochenen Individuen des von der Linaritrinde bedeckten Weissbleierzes unterscheiden sich von den beiden erwähnten Krystallen des Linarit dadurch, dass ihre blaue Rinde stellweise mit knollenförmigen Aggregaten äusserst kleiner Kryställchen von hell blaugrüner Farbe bedeckt ist, die in unmittelbarer Verbindung mit den oben bezeichneten Krusten von spangrüner und blauer Farbe stehen. Diese beiden Krusten befinden sich auf dem Quarz in kleinen, vereinzelten Partieen, wobei es sich erwies, dass die hellblau gefärbte aus Linarit besteht. Was die grüne Kruste und die hellgrünen Kryställchen anbelangt, die nach dem Entstehen der krystallinischen Linaritrinde sich gebildet haben, so wage ich sie in Folge des geringen Materials nicht mit Sicherheit als Caledonit anzusehen, obgleich die chemische Untersuchung auf dieses Mineral hinweist. Neben der beschriebenen Anhäufung des Weissbleierzes bemerkt man an einer Stelle in der Masse des Quarzes noch einen anderen kleinen Einschluss von Bleiglanz, von dem ein Theil der Oberfläche zuerst mit blauer Linarit- und dann mit hellgrüner Caledonitrinde bedeckt ist; beide Rinden sind ihrer Structur nach gleichförmig, glänzend und können vom Bleiglanz leicht getrennt werden, sind aber mit einander fest verbunden.

Die chemische Untersuchung der blauen und grünen krystallinischen Krusten, welche das Weissbleierz umhüllen, ist auf trockenem und nassem Wege von mir ausgeführt worden, wobei in beiden Fällen das unzweifelhafte Vorhandensein von Blei, Kupfer, Schwefelsäure und Wasser constatirt worden ist. Beim Aussuchen des zu diesen Untersuchungen erforderlichen Materials löste sich zufällig ein kleines tafelförmiges Stück ab, welches, nach der Spaltbarkeit zu urtheilen, als Linarit angesehen werden musste: glänzende Flächen, lazurblaue Farbe und Durchsichtigkeit besass.

Bei Messung dieses Bruchstückes mit dem Reflexionsgoniometer erwies sich, dass die höchst vollkommene Spaltbarkeit, welche Flächen mit Spiegelglanz bedingt, dem Orthopinakoid $\infty P \infty$ (100) entspricht und zur Fläche der zweiten weniger vollkommenen Spaltbarkeit, parallel dem Basopinakoid OP (001), unter einem Winkel $102°43'10''$ geneigt ist. Ausser den Spaltungsflächen befindet sich auf diesem Bruchstück eine ziemlich glänzende Fläche der positiven Haupthemipyramide $+ P$ ($\bar{1}11$), welche zur Fläche der ersten Spaltbarkeit unter einem Winkel von $101° 45'$ und der zweiten Spaltbarkeit unter dem Winkel von $143° 47'$ geneigt ist.

Die mikroskopischen Untersuchungen zeigen, dass alle kleinen Bruchstücke der blauen

Kruste aus ähnlichen durchsichtigen krystallischen Stückchen bestehen, die sich der Spaltbarkeit nach in spitzwinklige Täfelchen theilen.

Dieses interessante, obgleich nicht ganz deutlich krystallisirte Exemplar des russischen Linarit veranlasste mich in den Sammlungen des Berginstituts eine grosse Suite verschiedener Mineralien aus der Beresowsker Grube genau zu durchmustern, wobei es mir gelang zu constatiren, dass das auf einigen Stücken Quarz mit Nadelerz (Patrinit), Wismuthocker, Weissbleierz und Bleivitriol, befindliche blaue Mineral, welches im Catalog als Kupferlazur bezeichnet ist, zuweilen aus Linarit besteht, welcher zwar in Beziehung zum Weissbleierz, so wie der blauen und grünen Kruste mit dem oben angeführten Exemplar Aehnlichkeit besitzt, doch immer in bedeutend geringeren Dimensionen vorkommt. Bei den Krusten, wie auch den feinkrystallinischen Anhäufungen des Linarit und Caledonit ist die blaue und grüne Farbe nicht von grosser Bedeutung, da sie in den meisten Fällen, besonders auf Exemplaren mit Fahlerz und Beresit dem Kupferblau, Kupferlazur und Malachit zukommt.

Aus dem hier Angeführten über die Art des Vorkommens des Caledonit und Linarit, welche zuweilen die äusseren Theile der Weissbleierzkrystalle krustenförmig überziehen, könnte man, wie es mir scheint, im Allgemeinen annehmen, dass dieselben später gebildet worden sind als die Weissbleierzkrystalle, und dass überhaupt die chemischen Processe, denen diese Mineralien ihren Ursprung verdanken, nicht in der Weise aufeinander folgten, wie sie K. Peters in Dolea beobachtet hat, sondern dass dieselben grösstentheils wie in dem zweiten obenangeführten von Ed. Jannetaz und Justus Roth beschriebenen Falle vor sich gegangen sind, mit dem Unterschiede, dass zu einer gewissen Bildungsperiode der Mineralien in der Lösung die Carbonate im Verhältniss zu den Sulfaten der Metalle vorherrschend waren.

Bei meinen unausgesetzt betriebenen Nachforschungen in dem Museum des Berginstituts gelang es mir, bei Durchmusterung einer grossen Anzahl Stufen goldhaltigen Quarzes mit verschiedenen blei- und kupferhaltigen Mineralien aus der Beresowsker Grube, in der jüngsten Zeit auf einige Exemplare zu stossen, die theils unzersetztes, theils aber zersetztes Nadelerz (Patrinit) aufwiesen, auf dem sich zwar kleine, aber vollkommen messbare Krystalle des Linarit vorfanden. In früherer Zeit wurden sie allgemein für Kupferlazurkrystalle gehalten, wie man aus dem von W. W. Nefedjew im Jahre 1871 herausgegebenen Catalog der Mineraliensammlung des Museums des Berginstituts ersehen kann.

Dieser letztere Umstand bewog mich noch eine fernere genauere Revision aller Dubletten zweifelhafter Exemplare von Kupferlasurstufen aus den Gruben der Altaier und Nertschinsker Bergbezirke, die sich in den Sammlungen des Museums befinden, vorzunehmen. Zu meiner grössten Zufriedenheit wurde auch diese Nachforschung mit Erfolg gekrönt, da es mir gelang unzweifelhafte Krystalle von Linarit in Begleitung von Bleivitriol auf einer kleinen Stufe aus der Annensker Grube (?) des Altaier Bergreviers zu entdecken. Dieses Exemplar, ist im Jahre 1835 dem Museum des Berginstituts unter dem Namen «Weissbleierz mit Kupferlasur aus der Annensker Grube» von dem Koliwanowoskresensker Bergrevier

(vormaliger Name des Altaier Bergreviers) nebst einigen andern Mineralien zugestellt worden. Da es aber in dem Altaier Bergrevier keine Annensker Grube giebt und auch früher nicht gegeben hat, so vermuthete ich, dass dieser Name sich auf einen Aufschlussbau dieses Reviers bezieht. Nach den genauesten Nachforschungen in den Archiven des Berginstituts, so wie nach den Informationen bei Persönlichkeiten, die den Altai genau kennen, erwies es sich, dass ein Annensker Aufschlussbau sich auf der nordöstlichen Seite des Altaier Bezirks befindet und zwar am Flüsschen Fedorowka, linken Zufluss des Orton, welcher in den Fluss Mrassa mündet. Gegenwärtig ist an derselben Stelle eine Goldwäscherei gleichen Namens.

Die chemische Zusammensetzung des Linarit aus beiden angeführten Localitäten ist auf trockenem und nassem Wege nur qualitativ bestimmt worden; zu einer quantitativen Untersuchung fehlt es gegenwärtig an Material. Aus demselben Grunde war es auch unmöglich, die physikalischen Eigenschaften des Minerals genau zu bestimmen und bis jetzt sind auch nur wenige häufiger vorkommende krystallinische Formen dieses seltenen Minerals nachgewiesen. Die vorliegende Abhandlung bezieht sich daher bloss auf die Resultate der von mir an neuen Krystallen (von 2 bis 7 Millim. Grösse) ausgeführten Messungen, aus denen sich die weiter unten angeführten einfachen Formen ableiten lassen. Ich bin der Meinung, dass man bei Auffindung einer grösseren Anzahl von Linaritexemplaren aus der Beresowsker Grube, sowie im Altai, Gelegenheit haben wird auf eine ebensolche Fülle der verschiedenartigsten Combinationen monoklynoedrischer Formen zu stossen, wie sie vom Akademiker N. von Kokscharow an Krystallen aus Cumberland entdeckt und im IV. und V. Bande der «Materialien zur Mineralogie Russlands» ausführlich beschrieben sind.

Die erste ziemlich gründliche Untersuchung der Krystallformen des Linarit aus Leadhills in Schottland und Cumberland wurde 1822 von H. Brooke ausgeführt[1]); seit jener Zeit aber haben nur wenige Forscher ihr Augenmerk auf dieses sehr seltene Mineral gerichtet. So wurden, nach H. Brooke neue Formen in den Krystallbildungen des Linarit aus den angeführten Localitäten von R. Greg[2]) nachgewiesen, später von F. Hessenberg[3]) und in der jüngsten Zeit von N. von Kokscharow, der im Ganzen 32 Formen dieses Minerals beschrieben hat, unter denen 12 von ihm entdeckt sind. Die Krystalle des Linarit aus Dolea in Rézbánya sind von K. Petersen[4]) und später von A. Schrauf[5]) untersucht und beschrieben worden. Im IV. Bande der «Zeitschrift für Krystallographie und Mineralogie» von P. Groth, 1880, S. 426 findet sich eine Notiz von G. vom Rath über Linarit aus der Grube Ortiz in der Provinz Catamarca, der Republik Argentina.

Dank der umfassenden Untersuchung des Akademikers N. von Kokscharow ist die

1) H. J. Brooke and W. H. Miller. An Elementary Introduction to Mineralogy. London, 1852, p. 554.

2) R. P. Greg and W. G. Lettsom. Manual of the Mineralogy of Great-Britain and Ireland. London, 1858, p. 395.

3) Friedrich Hessenberg. Mineralogische Notizen. Drittes Heft. Frankfurt a. M. 1864, p. 31.

4) Sitzungsarichte der kais. Academie der Wissenschaften zu Wien, Jahrg. 1861, XLIV. Bd. I. Abth. s. 168.

5) Ebed. Jahrg. 1871, LXIV. Bd., I. Abth., s. 50.

Feststellung der Combinationen ausserordentlich erleichtert worden, trotz der geringen Anzahl der Krystalle des Linarit aus russischen Fundorten und ihre unregelmässige Entwickelung.

Die von mir an vier Krystallen dieses Minerals aus der Beresowsker Grube ausgeführten Messungen, so wie die Messungen an fünf Krystallen vom Altai, wiesen an den Kantenwinkeln, wie an den besonders genau messbaren Flächen nicht den geringsten Unterschied auf und gaben im Mittel folgende Grössen:

∞ P ∞ (*a*) (100)	: OP (*c*)	(001)	= 102°35′30″
»	: +P∞ (*s*)	$(\bar{1}01)$	= 105 10 34
»	: —P∞ (*y*)	(101)	= 125 40 44
»	: ∞P (*M*)	(110)	= 120 47 39
OP (*c*)	: +P∞ (*s*)	$(\bar{1}01)$	= 152 13 56

Alle diese Messungen sind vermittelst des Mitscherlich'schen Reflexionsgoniometers mit einem Fernrohr ausgeführt worden; die grösste Zahl der übrigen unten angeführten Messungen sind mit demselben Instrument ausgeführt, jedoch wurde das Fernrohr nur zum Einstellen der Krystalle benutzt.

Trotz der geringen Zahl der von mir untersuchten Linaritkrystalle aus der Beresowsker Grube, erweist es sich, dass in ihnen die Flächen der orthodiagonalen Zone vorherrschend und die Individuen in dieser Richtung verlängert sind, obgleich auch manches Mal Flächen der vertikalen Zone entwickelt vorkommen. Ausser der positiven Haupthemipyramide + P (*e*) = $(\bar{1}11)$, finden sich in ihnen, obgleich selten, vereinzelte Flächen der Ortho- und Klinopyramiden, deren Coefficienten ich, des geringen Glanzes wegen, nicht bestimmen konnte. Zu den Formen der ersten Zone gehören: das Ortho- und Basopinakoid ∞ P ∞ (*a*) = (100), OP (*c*) = (001) und Hemidomen + $\frac{2}{3}$ P ∞ (*o*) = $(\bar{2}03)$, + P ∞ (*s*) = $(\bar{1}01)$, + $\frac{3}{2}$ P ∞ (*x*) = $(\bar{3}02)$, + 2P ∞ (*u*) = $(\bar{2}01)$ und — P ∞ (*y*) = (101). Zu den vertikalen Prismen müssen gerechnet werden: ∞ P (*M*) = (110) und ∞ P2 (*l*) = (210). Zur genauen und bequemen Orientirung sind auf Fig. 2 die Flächen des Krystalls vollzählig in idealer regelmässiger Entwickelung dargestellt. Einige Lamellen die in der Richtung des Blätterdurchganges, parallel dem Orthopinakoid ∞ P ∞ (*a*) und dem Basopinakoid OP (*c*) sich abgelöst haben, zeigen die polysinthetische Zwillingsstructur nach dem für dieses Mineral bekannten Zwillingsgesetz.

Fig. 2.

Die Krystalle des Linarit vom Altai (von 3 bis 4 Millim. Grösse) unterscheiden sich

bei gleicher polysinthetischer Zwillingsstructur von den obigen Exemplaren, wie durch grössere Complication ihrer Combinationen, so durch eine andere noch bedeutend anormalere Entwickelung.

Im Allgemeinen sind sie klinoidal-tafelförmig und es ist bei der geringen zur Verfügung gestandenen Anzahl Exemplare schwer zu entscheiden, welche Flächen dieser Krystalle als vorherrschend und welche als untergeordnet angesehen werden müssen? Hierzu kommt noch der Umstand, dass in Folge der Unvollkommenheit in der Krystallisation, die Mehrzahl der monoklinoedrischen Formen bei weitem nicht mit der vollen Zahl der ihnen zugehörigen Flächen vertreten ist.

Jedenfalls finden sich in den Combinationen der Krystalle des Linarits vom Altai, ausser den oben für die Krystalle der Beresowsker Grube angeführten Formen, wie: $\infty P \infty$ (*a*), OP (*c*), $+ \frac{2}{3} P \infty$ (*o*), $+ P \infty$ (*s*), $\frac{3}{2} P \infty$ (*x*), $+ 2P \infty$ (*u*), $- P \infty$ (*y*), $+ P$ (*e*), ∞P (*M*) u $\infty P2$ (*l*) noch die Flächen der Hemipyramiden, Klinodomen und das Klinopinakoid: $+ \frac{1}{2} P$ (*q*) $= (\bar{1}12)$, $+ 2P2$ (*g*) $= (\bar{2}11)$, $(\frac{1}{2} P \infty)$ (*w*) $= (012)$, $(P \infty)$ (*r*) $= (011)$ und $(\infty P \infty)$ (*b*) $= (010)$. Die Fig. 3 stellt eine ideale Vereinigung des grössten Theils der angeführten Formen in einem und demselben Krystalle dar, was jedoch bis jetzt noch nicht angetroffen wurde.

Fig. 3.

Wenn man die durch Messung bestimmten Grössen als Basis zur Berechnung der übrigen gelten lässt und den Winkel zwischen $\grave{a}$ und $\acute{c}$, dass heisst $r = 77° 24' 30''$, dabei die orthodiagonale Axe $\bar{b} = 1$ setzt, so ergiebt sich das folgende Verhältniss für die krystallographischen Axen des russischen Linarit:

$$\grave{a} : \bar{b} : \acute{c} = 1{,}719252 : 1 : 0{,}829926.$$

Wenn man ferner dieses Verhältniss der Axen beibehält und bezeichnet, in den positiven Hemipyramiden, durch X den Neigungswinkel ihrer Flächen zu dem klinodiagonalen Hauptschnitt, durch Y zu dem orthodiagonalen Hauptschnitt und durch Z zu dem basischen Hauptschnitt, dagegen in den negativen Hemipyramiden dieselben Neigungswinkel durch X^{I}, Y^{I} und Z^{I}; wenn man ferner in den positiven Hemipyramiden den Neigungswinkel der klinodiagonalen Polkanten zu der Hauptaxe durch μ, derselben Kanten zur Klinodiagonalaxe durch ν und der orthodiagonalen Polkanten zu der Hauptaxe durch ρ, den Neigungswinkel der Mittelkanten zur Klinodiagonalaxe durch σ, dagegen in negativen Hemipyramiden die beiden erstgenannten Winkel durch μ' und ν' bezeichnet, so ergiebt

sich vermittelst Rechnung für die Hemipyramiden, Hemiorthodomen, Klinodomen und Prismen das Folgende:

Hemipyramiden.

$+\frac{1}{2}$ P $(q) = (\bar{1}12)$	$+$ P $(e) = (\bar{1}11)$
$X = 67° 28' 10''$	$X = 51° 18' 21''$
$Y = 88\ 44\ 1$	$Y = 78\ 12\ 37$
$Z = 26\ 18\ 48$	$Z = 46\ 19\ 20$
$\mu = 88\ 37\ 44$	$\mu = 74\ 49\ 26$
$\nu = 13\ 57\ 46$	$\nu = 27\ 46\ 7$
$\rho = 67\ 27\ 49$	$\rho = 50\ 18\ 35$
$\sigma = 30\ 11\ 4$	$\sigma = 30\ 11\ 4$

$+$ 2 P 2 $(g) = (\bar{2}11)$
$X = 56° 37' 10''$
$Y = 59\ 29\ 14$
$Z = 57\ 34\ 1$
$\mu = 52\ 33\ 9$
$\nu = 50\ 2\ 21$
$\rho = 50\ 18\ 35$
$\sigma = 49\ 19\ 0$

Hemiorthodomen.

$+\frac{2}{3}$ P ∞ $(o) = (\bar{2}03)$	$+$ P ∞ $(s) = (\bar{1}01)$
$Y = 83° 56' 11''$	$Y = 74° 49' 26''$
$Z = 18\ 39\ 19$	$Z = 27\ 46\ 7$

$+\frac{3}{2}$ P ∞ $(x) = (\bar{3}02)$	$+$ 2 P ∞ $(u) = (\bar{2}01)$
$Y = 62° 35' 25''$	$Y = 52° 33' 9''$
$Z = 39\ 56\ 15$	$Z = 50\ 2\ 21$

$-$ P ∞ $(y) = (101)$
$Y^1 = 54° 19' 13''$
$Z^1 = 23\ 5\ 14$

Klinodomen.

$(\frac{1}{2}$ P $\infty)$ $(w) = (012)$	(P ∞) $(r) = (011)$
$X = 67° 57' 10''$	$X = 50° 59' 37''$
$Y = 101\ 39\ 27$	$Y = 99\ 45\ 11$
$Z = 22\ 2\ 50$	$Z = 39\ 0\ 23$

Prismen.

∞ P (*M*) = (110)	∞ P 2 (*l*) = (210)
X = 30° 47′ 39″	*X* = 50° 0′ 16″
Y = 59 12 21	*Y* = 39 59 44

Die gegenseitigen Neigungswinkel der Flächen in Krystallen des Linarit aus russischen Fundorten, von mir durch Messung wie durch Berechnung der Kantenwinkel bestimmt, sind in der folgenden Tabelle angegeben und zwar vergleichungsweise mit den von N. Kokscharow und F. Hessenberg für dieselben Winkel gefundenen Grössen.

Zeichen der krystallinischen Formen.	P. Jeremejew.		N. v. Kokscharow.	F. Hessenberg.
	Gemessen.	Berechnet.	Berechnet.	Berechnet.
In der Zone: *c o s x u a y*.				
OP (*c*) : + $\frac{2}{3}$P ∞ (*o*).	161°13′30″	161°20′41″	*c* : *o* ...161°18′29″	*c* : *o* . 161°23′28″
» : + P ∞ (*s*).	152 13 56	152 13 56	*c* : *s* ...152 11 24	*c* : *s*.. 152 18 47
» : + $\frac{3}{2}$P ∞ (*x*).	140 4 15	139 59 55	*c* : *x* ...139 56 27	*c* : *x*.. 140 6 28
» : + 2 P ∞ (*u*).	129 52 42	129 57 39	*c* : *u* ...129 53 40	*c* : *u*.. 130 5 0
» : ∞ P ∞ (*a*).	{ .... / 102 35 30 }	{ 77 24 30 / 102 35 30 }	*c* : *a*.. { 77 22 40 / 102 37 20 }	*c* : *a*.. { 77 27 0 / 102 33 0 }
» : — P ∞ (*y*).	156 57 18	156 54 46	*c* : *y* ...156 53 36	*c* : *y*.. 156 57 27
+ $\frac{2}{3}$P ∞ (*o*) : + P ∞ (*s*)..	....	170 53 15	*o* : *s* ...170 52 55	*o* : *s*.. 170 55 19
» : + $\frac{3}{2}$P ∞ (*x*).	....	158 39 14	*o* : *x* ...158 37 58	*o* : *x*.. 158 43 0
» : + 2 P ∞ (*u*).	148 40 10	148 36 58	*o* : *u* ...148 35 11	*o* : *u*.. 148 41 32
» : ∞ P ∞ (*a*).	....	96 3 49	*o* : *a*... 96 4 11	*o* : *a*.. 96 3 32
» : — P ∞ (*y*).	....	138 15 27	*o* : *y* ...138 12 5	*o* : *y*.. 138 20 55
+ P ∞ (*s*) : + $\frac{3}{2}$P ∞ (*x*).	167 40 15	167 45 59	*s* : *x*.. 167 45 3	*s* : *x*.. 167 47 41
» : + 2 P ∞ (*u*).	....	157 43 43	*s* : *u* ...157 42 16	*s* : *u*.. 157 46 13
» : ∞ P ∞ (*a*).	105 10 34	105 10 34	*s* : *a* ...105 11 16	*s* : *a*.. 105 8 13
» : — P ∞ (*y*).	....	129 8 42	*s* : *y* ...129 5 0	*s* : *y*.. 129 16 14
+ $\frac{3}{2}$P ∞ (*x*) : + 2P ∞ (*u*).	....	169 57 44	*x* : *u* ...169 57 13	*x* : *u*.. 169 58 32
» : ∞ P ∞ (*a*).	117 20 45	117 24 35	*x* : *a* ...117 26 13	*x* : *a*.. 117 20 32
» : — P ∞ (*y*).	....	116 54 41	*x* : *y* ...116 50 3	*x* : *y*.. 117 3 55
+ 2 P ∞ (*u*) : ∞ P ∞ (*a*).	127 29 40	127 26 51	*u* : *a* ...127 29 0	*u* : *a*.. 127 22 0
» : — P ∞ (*y*).	106 50 12	106 52 25	*u* : *y* ...106 47 16	*u* : *y*.. 107 2 27

Zeichen der krystallinischen Formen.	P. Jeremejew.		N. v. Kokscharow.	F. Hessenberg.
	Gemessen.	Berechnet.	Berechnet.	Berechnet.
		In der Zone: *c w r b*.		
OP (*c*) : ($\frac{1}{2}$ P ∞) (*w*).	158° 3′20″	157°57′10″	*c* : *w*. . .157°57′45″	*c* : *w*. . 158° 0′52″
» : (P ∞) (*r*). . .	141 5 10	140 59 37	*c* : *r*. . .141 0 27	*c* : *r*. . 141 4 50
» : (∞ P ∞) (*b*).	. . . .	90 0 0	*c* : *b*. . . 90 0 0	*c* : *b*. . 90 0 0
($\frac{1}{2}$ P ∞) (*w*) : (P ∞) (*r*). . .	162 58 15	163 2 27	*w* : *r* . . .163 2 42	*w* : *r*. . 163 3 58
» : (∞ P ∞) (*b*).	. . . .	112 2 50	*w* : *b*. . 112 2 15	*w* : *b*. . 111 59 8
(P ∞) (*r*) : (P ∞) (*r*). . .	. . . .	78 0 46	*r* : *r* . . . 77 59 13	*r* : *r*. . 77 50 20
» : (∞ P ∞) (*b*).	. . . .	129 0 23	*r* : *b* . . .128 59 33	*r* : *b*. . 128 55 10
		In der Zone: *a l m b*.		
∞ P ∞ (*a*) : ∞ P 2 (*l*) . .	140° 4′30″	140° 0′23″	*a* : *l* . . .140 3 35	*a* : *l*. . 140° 0′41″
» : ∞ P (*M*). . .	120 47 39	120 47 39	*a* : *M* . .120 50 35	*a* : *M*. . 120 48 0
∞ P 2 (*l*) : ∞ P (*M*). . .	160 43 10	160 47 23	*l* : *M* . .160 47 0	*l* : *M*. . 160 47 19
» : ∞ P 2 (*l*) . .	. . . .	{*X* 100 0 32 *Y* 79 59 28}	*l* : *l*. . . {100 7 10 79 52 50}	*l* : *l*. . {100 1 22 79 58 38}
∞ P (*M*) : ∞ P (*M*). . .	. . . .	{*X* 61 35 18 *Y* 118 24 42}	*M* : *M*. {61 41 10 118 18 50}	*M* : *M*. {61 36 0 118 24 0}
		In der Zone: *c q e M*.		
OP (*c*) : + $\frac{1}{2}$ P (*q*). .	153°46′15″	153°41′12″	*c* : *q* . . .153°40′56″	. . . .
» : + P (*e*). . . .	133 37 8	133 40 40	*c* : *e* . . .133 40 0	*c* : *e*. . 133°47′ 7″
» : ∞ P (*M*). . .	{. . . . . 96 27 50}	{83 35 32 96 24 28}	*c* : *M*. {83 34 3 96 25 57}	*c* : *M*. . {83 36 43 96 23 17}
+ $\frac{1}{2}$ P (*q*) : + P (*e*). . . .	. . . .	159 59 28	*q* : *e* . . .159 59 4	. . . .
» : ∞ P (*M*). . .	. . . .	109 54 19	*q* : *M* . .109 53 7	. . . .
+ P (*e*) : ∞ P (*M*). . .	129 58 30	129 54 51	*e* : *M* . .129 54 3	*e* : *M*. . 129 49 36
		In der Zone: *c g l*.		
OP (*c*) : + 2 P 2 (*g*).	. . . .	122°25′59″	*c* : *g* . . .122 23 31	*c* : *g*. . 122°33′ 0″
» : ∞ P 2 (*l*) . .	. . . .	{80 23 9 99 36 51}	*c* : *l*. . {80 21 18 99 38 42}	. . . .
+ 2 P 2 (*g*) : ∞ P 2 (*l*) . .	137 52 36	137 57 10	*g* : *l*. . 137 57 47	. . . .

Zeichen der krystallinischen Formen	P. Jeremejew.		N. v. Kokscharow.	F. Hessenberg.
	Gemessen.	Berechnet.	Berechnet.	Berechnet.
		In der Zone: *a e g r*.		
∞ P ∞ (*a*) : + P (*e*) ...	101°50′10″	101°47′23″	*a* : *e* .. 101°48′ 3″	*a* : *e* .. 101°46′27″
» : + 2 P 2 (*g*).	120 30 45	120 30 46	*a* : *g* .. 120 32 57	*a* : *g* .. 120 28 22
» : (P ∞) (*r*)...	....	80 14 49	*a* : *r* .. 80 13 17	*a* : *r* .. 80 16 1
+ 2 P 2 (*g*) : + P (*e*)....	....	161 16 37	*g* : *e* .. 161 15 6	*g* : *e* .. 161 18 5
» : (P ∞) (*r*)...	139 37 30	139 44 3	*g* : *r* .. 139 40 20	*g* : *r* .. 139 47 39
+ P (*e*) : (P ∞) (*r*)...	158 28 13	158 27 26	*e* : *r* .. 158 25 14	*e* : *r* .. 158 29 34

Nach den von mir untersuchten Exemplaren zu urtheilen, finden sich die best entwickelten Krystalle des Beresowsker Linarit auf Stufen in Begleitung von Nadelerz, dessen Zersetzung sie, in dem gegebenen Falle, ihre Entstehung verdanken. Bei dem Exemplar des Linarit vom Altai ist es augenscheinlich, dass er theilweise seinen Ursprung dem Bleisulphat (Anglesit) verdankt, bei gleichzeitiger Zersetzung desselben und der Carbonate des Kupfers, was durch die Nachbarschaft der Krystalle von Bleivitriol bestätigt wird auf denen der Linarit stellenweise als Umhüllungspseudomorphose auftritt. Alle Krystalle des Bleivitriols, obgleich von regelmässiger Bildung, sind in Folge der später eingetretenen Zersetzung von Aussen matt, im Innern aber durchsichtig und farblos. Die Mehrzahl derselben ist nicht von einer Linaritrinde bekleidet und in diesem Falle bilden die Linaritkrystalle kleine drusenartige Anhäufungen. Das Gestein der ganzen Stufe besteht aus dichtem feinkörnigem Sandstein von graulich weisser Farbe, in dessen Höhlungen die erwähnten Krystalle des Bleivitriols ebenso wie Malachit aufgewachsen vorkommen, während auch Eisenocker stellenweise auf verschiedenen Partien des Sandsteins zu ersehen ist.

Ouvrages minéralogiques publiés dans la VII. Série des Mémoires de l'Académie Impériale des sciences:

T. I, № 10. **Kokscharow, N. v.** Ueber den russischen Euklas. Mit einer Tafel 1859. Pr. 35 K. = 1 Mk. 20 Pf.
№ 11. **Kokscharow, N. v.** Ueber den russischen Zirkon. Mit 4 Tafeln. 1859. Pr. 50 K. = 1 Mk. 70 Pf.

T. II, № 5. **Kokscharow, N. v.** Anhang zu der Abhandlung «Ueber die russischen Topase». Mit 4 Tafeln. 1860. Pr. 50 K. = 1 Mk. 70 Pf.

T. III, № 4. **Kokscharow, N. v.** Zweiter Anhang zu der Abhandlung «Ueber die russischen Topase». Mit 3 Tafeln. 1860. Pr. 36 K. = 1 Mk. 20 Pf.
№ 7. **Kokscharow, N. v.** Ueber den russischen Epidot und Orthit. Mit 5 Tafeln. 1860. Pr. 95 K. = 3 Mk. 20 Pf.

T. IV, № 3. **Kokscharow, N. v.** Ueber den russischen Monazit und Aeschynit. Mit 4 Tafeln. 1861. Pr. 55 K.= 1 Mk. 80 Pf.

T. V, № 2. **Kokscharow, N. v.** Beschreibung des Alexandrits. Mit 3 Tafeln. 1862. Pr. 45 K. = 1 Mk. 50 Pf.

T. VII, № 9. **Kokscharow, N. v.** Ueber den Lepolith. Mit 2 Tafeln und 2 Holzschnitten. 1864. Pr. 40 K. = 1 Mk. 30 Pf.

T. VIII, № 8. **Kokscharow, N. v.** Notiz über den Chiolith. 1864. Pr. 25 K. = 80 Pf.
№ 12. **Kokscharow, N. v.** Beschreibung einiger Topas-Krystalle aus der Mineralien-Sammlung des Museums des Kaiserlichen Berg-Institutes zu St. Petersburg. 1865. Pr. 25 K. = 80 Pf.
№ 14. **Kokscharow, N. v.** Monographie des russischen Pyroxens. Mit 5 lith. Tafeln und einem Holzschnitt. 1865. Pr. 1 R. 10 K. = 3 Mk. 70 Pf.

T. XI, № 1. **Kokscharow, N. v.** Ueber den russischen Orthoklas, nebst mehreren allgemeinen Bemerkungen und Messungen der Krystalle einiger ausländischer Fundorte. Mit einer lithogr. Tafel. 1867. Pr. 30 K. = 1 Mk.

T. XIII, № 3. **Kokscharow, N. v.** Ueber Linaritkrystalle. 1869. Pr. 60 K. = 2 Mk.

T. XV, № 5. **Fritzsche, J.** Ueber einen eigenthümlichen Molecularzustand des Zinnes. Mit einer Tafel. 1870. Pr. 25 K. = 80 Pf.
№ 6. **Kokscharow, N. v.** Ueber den Olivin aus dem Pallas-Eisen. Mit 4 Kupfertafeln. 1870. Pr. 70 K.= 2 Mk. 30 Pf.

T. XVI, № 14. **Kokscharow, N. v.** Ueber Weissbleierz-Krystalle, vorzüglich aus russischen Fundorten. Mit 5 Kupfertafeln. 1871. Pr. 1 R. 10 K. = 3 Mk. 70 Pf.

T. XXII, № 3. **Kokscharow, N. v.** Ueber das Titaneisen vom Ural. Avec 1 planche. 1875. Pr. 25 K. = 80 Pf.
№ 5. **Kokscharow, N. v.** Ueber den russischen Calcit. Mit 4 Tafeln. 1875. Pr. 60 K. = 2 Mk.

T. XXIV, № 5. **Kokscharow, N. v.** Ueber das russische Rothbleierz. Mit einer Tafel. 1877. Pr. 35 K. = 1 Mk. 20 Pf.
№ 9. **Kokscharow, N. v.** Ueber das Krystallsystem und die Winkel des Glimmers. 1877. Pr. 70 K. = 2 Mk. 30 Pf.

T. XXV, № 4. **Kokscharow, N. v.** Ueber Waluewit. Avec une planche. 1877. Pr. 30 K. = 1 Mk.

Imprimé par ordre de l'Académie Impériale des sciences.
Décembre, 1883. C. Vessélofski, Secrétaire perpétuel.

Imprimerie de l'Académie Impériale des sciences. (Vass.-Ostrow, 9 ligne, № 12.)


SMITHSONIAN INSTITUTION LIBRARIES
3 9088 01769 5677